

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

# SCIENTIFICA ACTA

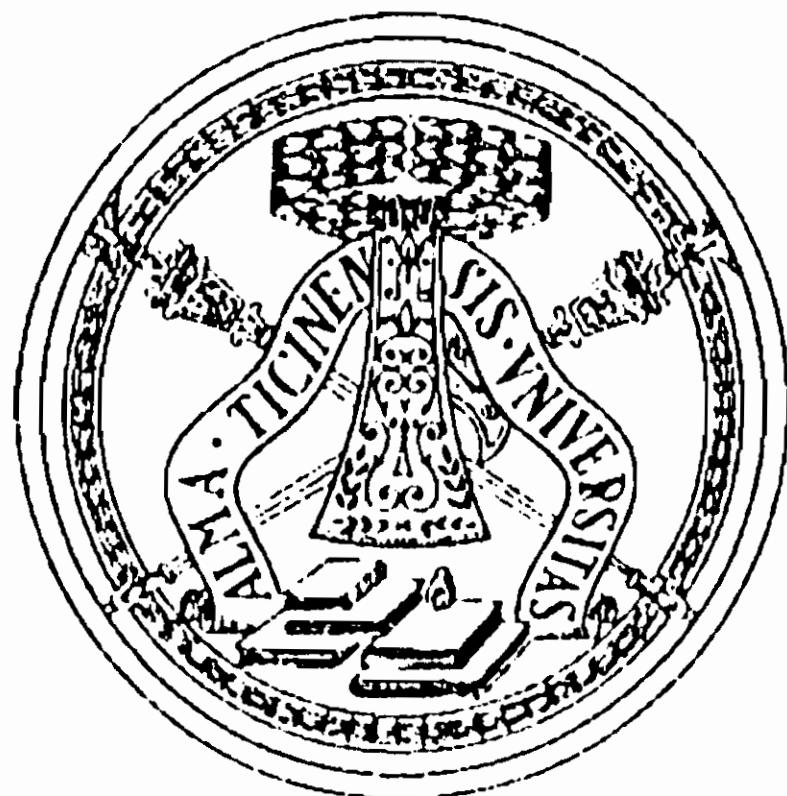
QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME XX

ANNO XX

NUMERO 1

15 APRILE 2005



Sergio P. Ratti

## INTRODUZIONE PROPEDEUTICA AI FRATTALI IN FISICA (ed altro)

(Edizione provvisoria)

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

CENTRO STAMPA – DIPARTIMENTI FISICI  
Via Bassi, 6 27100 Pavia

***A mia moglie che mi sopporta da 50 anni***

***Ai miei figli che sono il mio presente***

***Ai miei nipoti che sono il mio futuro***

# Capitolo 1

## I frattali e il nostro mondo

### 1.1 Considerazioni iniziali

La natura si è sempre divertita a giocare brutti scherzi agli esseri umani. Snoopy scriverebbe: "...era una notte buia e tempestosa...": dopo che grossi nuvoloni si sono addensati nel cielo, all'improvviso scoppiano tuoni e fulmini; luminosi lampi e gelide saette disegnano cammini impazziti su uno sfondo cupo. eppure quelle saette sembrano avere qualcosa in comune. Le felci, gli abeti, le specie degli alberi e dei fiori, i monti ... sembrano mostrare certamente qualcosa in comune tra loro ma non per questo ci appaiono come tra loro identici. Altissimo è il numero degli oggetti e delle figure che la natura ci mostra e che, se da un lato ci fanno percepire la netta sensazione di una componente assolutamente caotica, dall'altro ci fanno intuire l'esistenza sfuggevole di una sostanziale uguaglianza e di un imperscrutabile ordine che vorremmo poter capire ed interpretare e di fronte al quale ci sentiamo troppe volte disarmati. Per come Euclide ci ha tramandato i suoi insegnamenti, la geometria non sembra in grado di rendere conto delle troppe figure e dei troppi oggetti naturali le cui forme sono, seppur bellissime, incomprensibili e indescrivibili. Alla base di queste sensazioni sta una atavica mistificazione alla quale siamo costantemente soggetti come esseri

umani e come individui: il senso comune.

Albert Einstein definiva il senso comune quell'insieme di pregiudizi con i quali siamo cresciuti e che costituiscono tutto il bagaglio di false conoscenze della nostra adolescenza.

## 1.2 Nomen est Numen

Il nostro senso comune ci fa inconsciamente associare al concetto di *geometria* il concetto di ordine, di simmetria, di ... bellezza. Perché? Il nome *geometria* ci fa tornare alla mente per lo più figure regolari come quelle della sfera, del cubo, del parallelepido. Siamo talmente condizionati da questo pregiudizio che nel linguaggio comune si arriva all'eretica affermazione che, in senso figurato, un discorso è *geometrico* per dire che è chiaro, ordinato, calligrafico. Per non parlare della stortura, che mi ha sempre personalmente procurato dolori palpabilmente fisici, contenuta nell'affermazione politica delle *convergenze parallele!*

La geometria, soprattutto quella euclidea, condizionata da un malinteso senso comune, appare arida fintanto che si limita a trattare delle figure semplici, quando per contro la natura ci pone di fronte a dei tratti talmente irregolari e spesso frammentati da proporci un *diverso livello di complessità*. La presenza di figure complesse o di oggetti che nella concezione euclidea sarebbero privi di forma come una nube, uno schizzo di vernice, una frattura nella roccia, ha portato Benoit Mandelbrot ad investigare *la morfologia dell'amorfo*. Mandelbrot ha raccolto la sfida della Natura e, a partire dal 1975, si è proposto di sviluppare una nuova geometria della complessità, cercando le regolarità più recondite che si possono intravedere nelle forme più irregolari: la geometria frattale. Egli ha identificato una famiglia di *forme* che chiama *frattali*. *Nomen est numen*: il nome frattale deriva dall'aggettivo latino *fractus* o dal verbo *frangere* che vuole dire *rompere*, per creare dei pezzi, dei frammenti irregolari e contorti. Nella introduzione al suo volume[1] *The Fractal Geometry of Nature* Mandelbrot si dilunga in una

analisi dei possibili neologismi e dei possibili significati contrapposti. Al latino *frangere*, si rifà il termine *rifrazione*, fenomeno ottico che *spezza* il cammino ottico della luce quando passa da un mezzo rifrangente ad un altro; al latino *fractus* si rifà il termine scientifico *frammento* che richiama un oggetto irregolare.

Pertanto frattale deve essere assunto anche come sinonimo di *irregolare*. Così, mentre un insieme frattale avrà una sua definizione nel Capitolo 2 per *frattale naturale* deve intendersi una figura o una forma altamente frastagliata, irregolare, come il profilo di una montagna, la foglia di una felce o la forma di un cavolfiore, la forma geometrica dei confini di uno Stato. Per contro, *algebra* proviene dall'arabo *jabara* che significa *legare insieme*; pertanto *frattale* ed *algebra* vanno considerati come due concetti etimologicamente opposti. I frattali più utili implicano anche eventi casuali cosicchè sia le regolarità che le irregolarità vanno intese in senso statistico: tendono a mostrare proprietà e caratteristiche che si ripetono a diverse scale di ingrandimento, che Mandelbrot chiama *proprietà di scaling*.

In Fisica, il moto browniano è quanto di più caotico e disordinato si possa immaginare; la traiettoria descritta da una particella soggetta al moto browniano è estremamente tortuosa e statisticamente imprevedibile. Tuttavia, nonostante la Natura ci proponga continuamente situazioni dominate da condizioni altamente caotiche ed aleatorie, i nostri condizionamenti provenienti dal *senso comune* e dall'indiscusso dominio culturale della matematica sul mondo scientifico, hanno fatto di tutto per portarci fuori strada, imponendo quasi di forza soltanto lo studio di quanto si manifesta come regolare e continuo.

### 1.3 Jean Perrin - 1906

Mandelbrot richiama, nel volume già citato[1], un lungo discorso fatto nel 1906 dal fisico francese Jean Perrin[2], premio Nobel per la Fisica nel

1926, che è per molti versi illuminante. Ne riproduco qui una traduzione molto libera e personale.

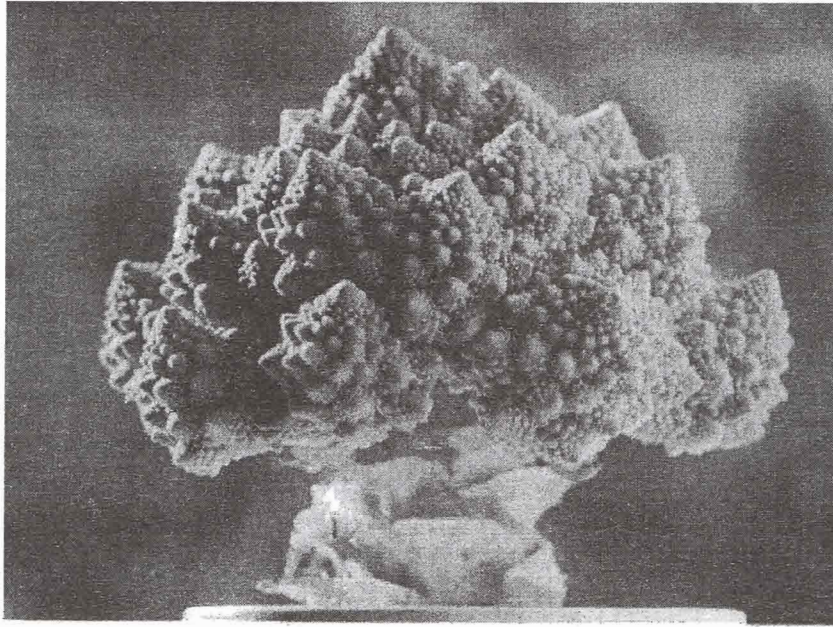


Figura 1.1: Un cavolfiore minareto.

*E' ben noto che un buon insegnante, prima di dare una definizione rigorosa di continuità matematica, tenta di convincere gli scolari che essi posseggono già l'idea che sta alla base del concetto. Disegna con cura una curva ben definita e, usando un righello dice: "vedete bene che esiste la tangente in questo punto". E' anche ben noto che un buon insegnante di fisica, per illustrare il concetto di velocità istantanea di un oggetto in movimento, in un punto preciso della sua traiettoria dice: "vedete bene, naturalmente, che la velocità media tra due posizioni vicine non varia in modo apprezzabile, tanto meno quanto più le due posizioni si avvicinano tra di loro". I matematici, per contro, sono ben consci della fragilità di una tale impostazione, che inevitabilmente tende a far prematuramente concludere che ogni funzione continua ammette derivata. Sebbene le funzioni differenziabili siano le funzioni più semplici*

*e più facili da manipolare, esse sono comunque del tutto eccezionali. Le curve che non ammettono la tangente in ogni punto sono la regola, mentre l'eccezione è costituita dalle rette, dalle circonferenze, dalle ellissi: curve interessanti ma molto speciali.*

*Appare quindi che la matematica propone dei casi generali -che in realtà sono una eccezione- i quali costituiscono un esercizio intellettuale molto ingegnoso ma pur sempre artificioso ed artificiale, nell'intento di raggiungere una assoluta accuratezza descrittiva. Lo studente, quando sente citare in un'aula universitaria curve che non ammettono tangente e funzioni che non ammettono derivata in alcun punto, è portato a pensare che la natura sia incapace di tante e tali atrocità. Invece è vero il contrario.*

Anche nel campo della fisica spesso alcune osservazioni possono portare a valutazioni e conclusioni sbagliate.

Continua sempre Perrin: *Consideriamo per esempio uno dei piccoli grumi bianchi che si formano quando si aggiunge del sale ad una soluzione saponata. Osservati da una certa distanza, i suoi contorni sembrano netti e definiti; da lontanissimo ogni oggetto sembra un punto; da lontano ogni oggetto sembra un cerchietto ma quando li osserviamo da minore distanza, i contorni netti sembrano scomparire al punto che ad occhio è impossibile tracciare una tangente in ogni punto del contorno.*

*Una retta che a prima vista potrebbe apparire come una tangente soddisfacente, vista più da vicino, appare addirittura perpendicolare o perlomeno obliqua. L'uso di una lente d'ingrandimento o di un microscopio non ci è di alcun aiuto: tutte le volte che aumentiamo l'ingrandimento nella speranza di cogliere un migliore dettaglio, appaiono nuove irregolarità e non riusciremo mai ad avere una visione neppure lontanamente analoga a quella che ci appare quando osserviamo con sempre maggiore ingrandimento un dischetto di acciaio<sup>1</sup>.*

---

<sup>1</sup>Qualcosa di analogo -ma che non ha nulla a che vedere con i frattali- avviene nel campo dell'ottica quando cerchiamo di ingrandire i bordi di un ostacolo: guardando sempre più vicino e con una lente di ingrandimento, ad un certo punto compare il fenomeno della diffrazione e noi ci troviamo nella impossibilità di localizzare la

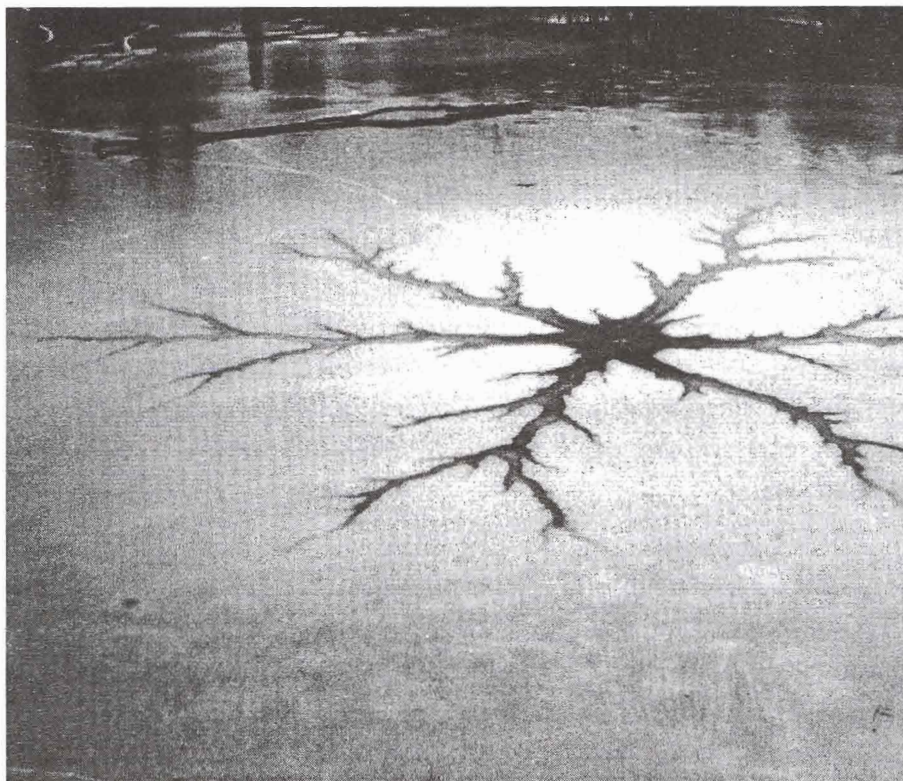


Figura 1.2: Struttura frattale formata da un laghetto ghiacciato a temperatura molto al di sotto dello zero.

*Pertanto, se adottiamo la sferetta d'acciaio come un esempio per illustrare la classica forma continua, il grumo di sale nella soluzione saponata ci suggerisce, su base logica equivalente, una nozione più generale di funzione continua che non ammette derivata in ogni punto.*

Continua poi Perrin: *Dobbiamo tener ben presente che l'incertezza sulla posizione nella quale valutare la tangente in un punto del contorno del grumo di sale non è affatto la stessa incertezza che si ha nell'osservare la mappa dei confini dell'Inghilterra. Seppure il risultato dipenda dalla scala con cui è stata disegnata la mappa dell'isola inglese, si trova sempre*  
posizione del contorno dell'ostacolo.



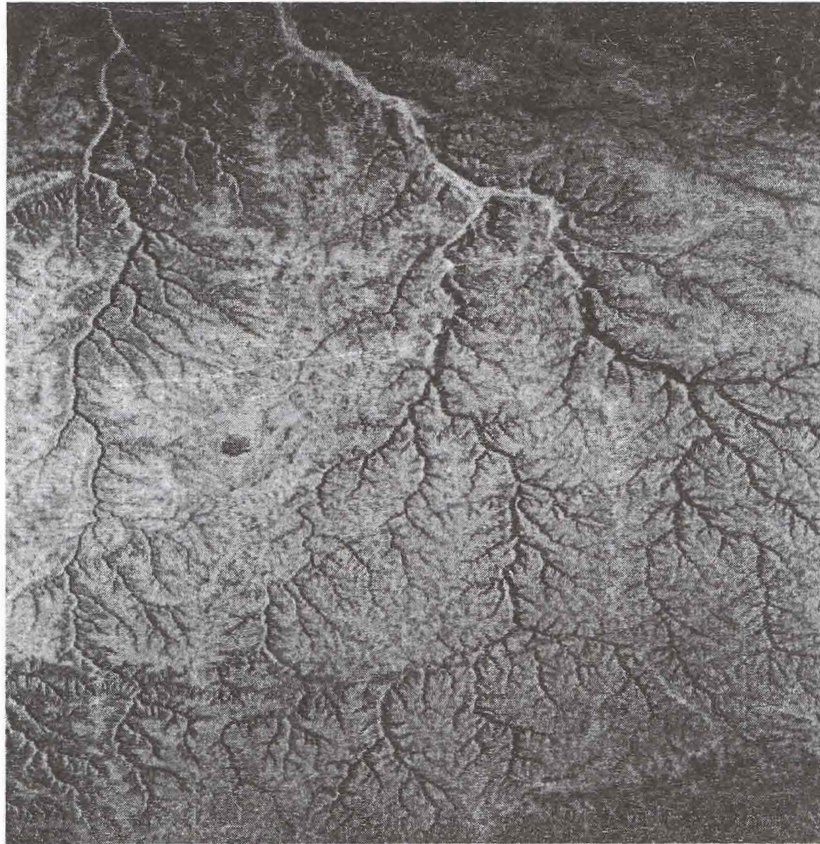


Figura 1.3: Fotografia satellitare del bacino idrografico di un fiume dello Yemen del Sud.

*una tangente, perché la mappa è una rappresentazione convenzionale. Al contrario, nel caso reale del grumo di sale la cosa non è così. Una caratteristica essenziale sia del problema del grumo di sale sia delle reali coste inglesi risiede in un "sospetto" che ci sorge spontaneo. Nei casi reali, senza che noi li vediamo chiaramente, sospettiamo che ad ogni maggiore ingrandimento intervengano sempre ulteriori dettagli che rendono impossibile definire una tangente in un punto.*

*Siamo ancora immersi nelle incertezze della realtà sperimentale allorchè osserviamo al microscopio il moto browniano che agita le piccole*

*particelle di Clarkia pulchella sospese nel liquido: la direzione dei trattini rettilinei che congiungono le posizioni occupate in due istanti successivi molto vicini nel tempo, varia in modo del tutto irregolare, casuale ed imprevedibile, anche quando i due istanti di osservazione si avvicinano indefinitamente. Un osservatore obbiettivo dovrebbe concludere che si trova di fronte ad una traiettoria che non ammette tangente e ad una legge oraria che non ammette derivata.* Va detto, ad onor del vero, che sebbene l'osservazione di un oggetto con ingrandimenti sempre maggiori metta in evidenza imperfezioni e strutture altamente irregolari, il senso comune tende ad approssimare con un apparente notevole vantaggio la descrizione delle sue proprietà mediante funzioni continue e derivabili. In parole molto semplici, a certe scale d'ingrandimento e per certi metodi di descrizione, molti fenomeni "possono" essere rappresentati da funzioni continue e regolari in senso matematico, così come si può pensare di avvolgere una spugna in un contenitore di sottilissima plastica e approssimare la descrizione della sua forma geometrica senza seguire nei dettagli il suo complicatissimo contorno.

Se, per spingere ancora più a fondo le argomentazioni, attribuiamo alla materia la sua intima struttura granulare che è insita nelle teorie atomiche, svanisce presto la nostra pretesa di applicare il concetto rigoroso della continuità matematica alla descrizione della realtà fisica.

Consideriamo ancora, per esempio, il modo in cui viene definita la densità di un gas in un determinato punto ed istante. Prendiamo una sfera di volume  $V$ , centrata in quel punto, che racchiuda una determinata massa  $M$ : il quoziente  $M/V$  è la densità media all'interno della sfera ed assumiamo come densità "vera" il valore limite di questo quoziente per il volume  $V$  tendente a zero. Ma le cose si complicano terribilmente. Questa nozione, infatti, implica che, ad un dato istante, la densità media sia praticamente costante, anche per sfere di volume al di sotto di determinati valori ... In verità, il valore medio della densità di un gas, per valori estremamente piccoli del volume, subisce delle fluttuazioni

che, invece di diventare trascurabili, aumentano considerevolmente. Alle dimensioni di scala alle quali i moti browniani si manifestano apertamente, le fluttuazioni statistiche possono raggiungere valori di 1 parte su 1000 e diventare addirittura dell'ordine di 1 parte su 5 quando il raggio dell'ipotetico volumetto diventa dell'ordine di un centesimo di micron. Un passo ancora e si arriva al di sotto delle dimensioni di una singola molecola. Il punto può così trovarsi localizzato con grandissima probabilità nello spazio intermolecolare dove la densità media si annulla e, con essa, si annulla anche la "densità vera". Tuttavia, con una probabilità di circa 1 parte su 1000, il centro del volumetto può giacere "entro" una molecola ed il valore medio della densità diventa in tal caso circa 1000 volte superiore al valore medio ottenuto "per volumetti abbastanza grandi", cioè 1000 volte superiore a quello pensato per la "densità vera" del gas.

Ma non possiamo fermarci qui. Scrive sempre Perrin: *Lasciamo che la nostra sfera diventi sempre più piccola: molto presto, salvo eccezionali circostanze, il volumetto sarà sempre vuoto e rimarrà vuoto fintanto che il punto verrà scelto negli spazi interatomici. La densità "vera" sarà quindi nulla in tutti i punti, quasi dappertutto, tranne che in un numero finito di punti isolati - tanti quanto è il numero delle molecole di gas presenti nel sistema- punti nei quali assume un valore elevatissimo.*

*La funzione che rappresenta una qualsiasi proprietà fisica forma in uno spazio intermateriale un continuo vuoto con un numero infinito di punti singolari.*

*Una materia infinitamente discontinua ed un etere continuo costellato di minuscole stelle appare anche nell'universo cosmico. In verità, alla stessa conclusione alla quale siamo arrivati nel caso del gas, possiamo arrivare immaginando di prendere una sfera sempre più grande che abbraccia la Terra, poi i pianeti, il sistema solare, le nebulose.*

*Permettetemi quindi un'ipotesi che è sì arbitraria ma almeno non auto-contraddittoria. Si potrebbero incontrare delle circostanze nelle quali l'uso di una funzione non derivabile potrebbe essere più semplice che*

*non l'uso di una funzione completamente differenziabile. Quando questo avverrà, lo studio matematico delle irregolarità avrà dimostrato tutto il suo valore di applicazione pratica. Tuttavia, questa speranza non è altro che un sogno ad occhi aperti, almeno per il momento.*

Questo nel 1906. Oggi il sogno è diventato, almeno in parte, realtà.

Le parole di Jean Perrin, che vinse il Premio Nobel per i suoi studi sul moto browniano, sottolineano già dall'inizio del Secolo XX il pericolo al quale il senso comune ci porta, quando non è soggetto ad una aspra e costante critica logica dei concetti e delle definizioni adottate per interpretare le osservazioni sperimentali.



Figura 1.4: *Il diluvio* di Leonardo da Vinci, dalla collezione del Castello di Windsor.

L'embrione dei concetti frattali si può scoprire anche in lavori tipicamente grafici di famosissimi artisti del passato. Un disegno a matita

di Leonardo intitolato *Il diluvio*, appartenente alla collezione del Castello di Windsor, riprodotto in fig. 1.4, rappresenta il flusso di aria tempestosa ed è il risultato della sovrapposizioni di piccoli vortici. Che nella mente del genio rinascimentale risiedesse già in embrione il concetto di scaling così importante nel campo dei frattali è testimoniato da moltissimi disegni del maestro riguardanti il fluire delle acque e dei liquidi. Il concetto di scaling nei fenomeni di turbolenza fu per la prima volta introdotto nell'ambito delle scienze da Lewis F. Richardson negli anni venti del Novecento. L'origine corretta della interpretazione giunse al fallimento dal tentativo di *formalizzare* matematicamente la descrizione del fenomeno. Mandelbrot ha resuscitato vecchie idee e, prendendo spunto da queste, ha sviluppato una nuova geometria di contenuto più ampio. Esulando dalle dimensioni intere ed entrando nel mondo delle dimensioni non intere, ha reso più potente la geometria e, di converso, la matematica. Se un tempo di fronte ad una funzione non integrabile ci si doveva fermare, oggi si può proporre una risposta: tramite la conoscenza della sua dimensione frattale, si può fornire il valore di quell'integrale nota che sia la approssimazione con la quale se ne vuole sapere il valore e noto che sia il passo di approssimazione con cui si esegue la misura. All'opera di Mandelbrot si associano quelle di altri matematici che sono usciti dall'ambito della geometria ed hanno affrontato il problema dei frattali stocastici: le proprietà degli insiemi frattali non sono attribuite a forme geometriche (e di converso a funzioni rappresentabili sotto forma geometrica), bensì a distribuzioni di probabilità che dominano indubbiamente moltissimi fenomeni fisici soggetti inevitabilmente ad una buona dose di aleatorietà.

## 1.4 I frattali naturali e non

La natura ci offre molti esempi di frattali naturali: le felci, i lampi, le nubi, i cavolfiori, i profili delle montagne e chi più ne ha più ne metta.

In questo capitolo abbiamo inserito alcune figure di frattali naturali.

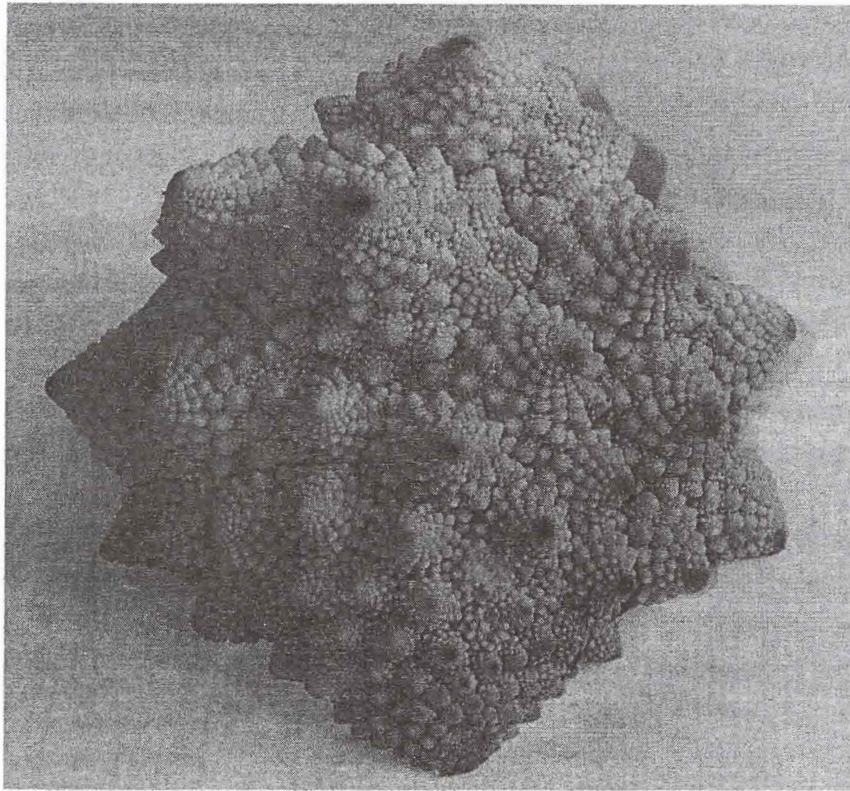


Figura 1.5: Un cavolfiore minareto acquistato da uno studente in un supermercato bresciano e fotografato sulla scrivania del docente.

Un broccolo minareto in fig. 1.3; la frattura in laghetto ghiacciato in fig. 1.2; il bacino idrografico di un fiume nello Yemen del Sud in fig. 1.3. Nella fig. 1.3 è stato fotografato un altro cavolfiore *minareto* per la sua forma a guglie, acquistato da un mio studente in un supermercato di Brescia. La struttura morfologia di questo ortaggio della famiglia delle crocifere, mostra caratteristiche frattali, soprattutto di autosomiglianza (una parte simile al tutto) più spiccate del cavolfiore normale usato da Benoit Mandelbrot nelle interviste divulgative.

Nelle figure 1.4 e 1.4 sono riportati gli effetti provocati da agenti chimici (fig. 1.4 o da agenti fortemente ionizzanti (fig.1.4 sulle proprietà

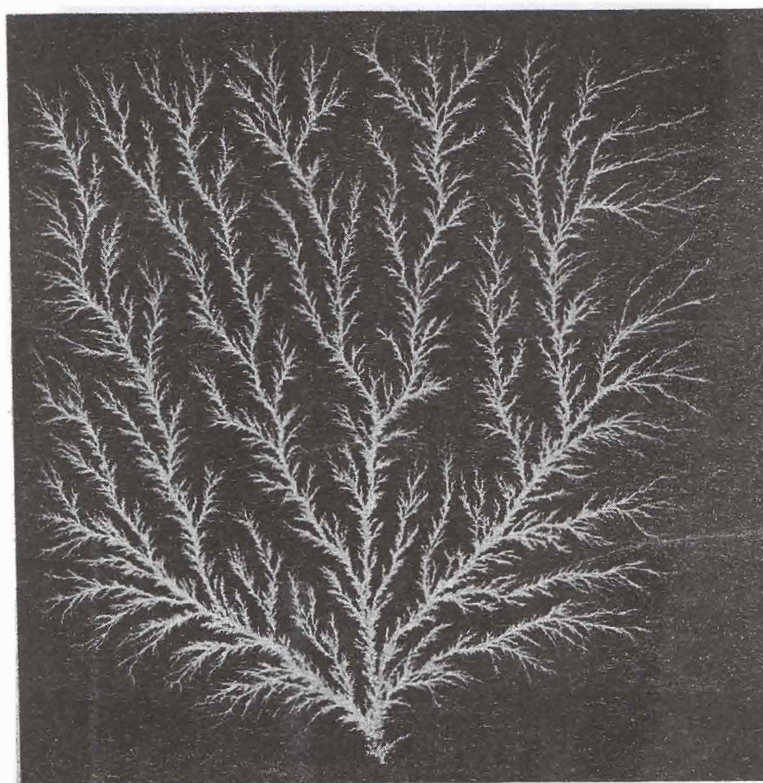


Figura 1.6: Struttura frattale indotta da un agente chimico su un pezzo di materiale trasparente.

di trasparenza dei materiali. Gli effetti sono ingenti: l'effetto chimico di corrosione, fig. 1.4, si propaga lungo tragitti difficilmente prevedibili e tende ad invadere lentamente tutto il volume di materiale plastico che trova a propria disposizione. L'effetto di interazione elettromagnetica di un intenso fascio di elettroni estratto da un acceleratore di particelle di alta energia, spacca i legami molecolari del materiale che perde localmente le proprie proprietà di trasparenza. Insieme con le proprietà ottico-elettriche cambiano anche le proprietà meccaniche,

Con una ricerca su internet e con l'aiuto fattivo del dr. Gabriele Sani e del dr. Elio Giroletti, ho trovato altre figure di frattali naturali.

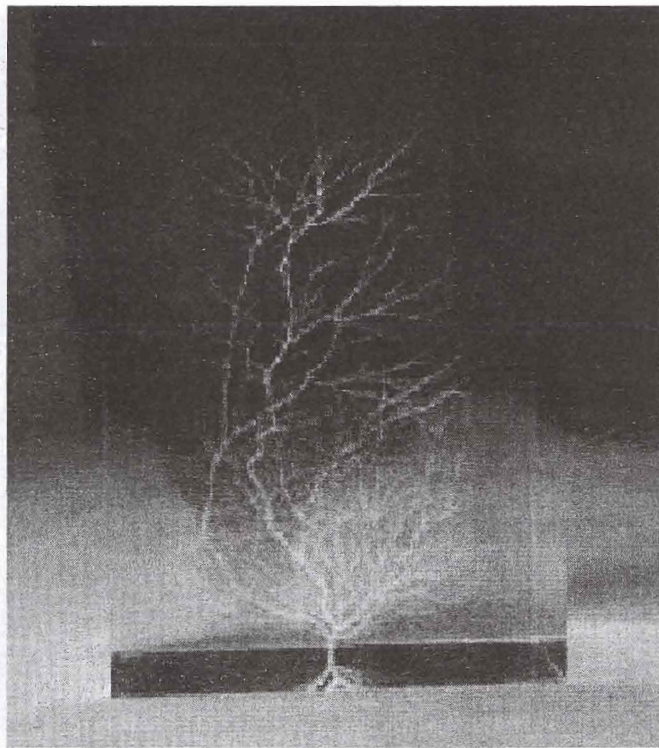


Figura 1.7: Struttura frattale indotta da un evento elettromagnetico: un pezzo di plexiglass esposto ad un fascio intenso di elettroni prodotti da un sincrotrone.

Ho pensato che fosse meglio distribuirli nell'arco di questa introduzione sfruttando solamente le disclie per illustrare le fotografie.

## 1.5 I frattali e la fisica

Nel 1989 è stato pubblicato[3]a) un volume dal titolo *Fractals in Physics* nel quale viene coperto un ampio campo di ricerche fisiche: dalla distribuzione della materia nell'universo e nelle galassie, alla trasmissione delle tensioni in un aggregato; dalla formazione dei vasi sanguigni nella retina dell'uomo, alla percolazione di liquidi nei mezzi porosi; dalla



conducibilità dei materiali disordinati, alle transizioni di fase dei polimeri. Una serie di contributi che mettono in piena evidenza la potenza del metodo.

Ritengo importante citare qui le parole di esordio di un contributo di L. Pietronero[3]b. Nel lavoro si pone il problema di capire -almeno preliminarmente- perché la Natura produce e dà luogo a strutture frattali. Per tentare una risposta occorre formulare modelli mediante i quali si possa descrivere la crescita di strutture frattali in base a fenomeni fisici e, conseguentemente, si possa capire la loro struttura matematica, nello stesso modo in cui il gruppo di rinormalizzazione ha permesso di comprendere tutti i modelli di tipo di Ising che tanta importanza hanno nell'ambito della fisica. I modelli di aggregazione a diffusione limitata e, più in generale, i modelli di "cedimento" delle proprietà dielettriche, basati su processi iterativi governati dall'equazione di Laplace e da un campo stocastico, hanno un preciso significato fisico ed evolvono con molta naturalezza verso strutture frattali casuali di grande complessità. Nel suo lavoro Pietronero, entro una nuova cornice interpretativa teorica di grande spessore, chiarifica l'origine delle strutture frattali nei modelli di aggregazione e propone un metodo sistematico per la misura della dimensione frattale e delle proprietà multifrattali della distribuzione fisica. Un lavoro molto impegnativo cui il lettore si potrà rivolgere solo alla fine del corso e dopo un ulteriore approfondimento degli aspetti matematici del problema.

Le sue parole -liberamente tradotte- sono: *La geometria frattale è uno di quei concetti che, a prima vista, generano incredulità ma che in un secondo momento diventano così naturali talchè uno si domanda come mai sia stato sviluppato soltanto in tempi così recenti. Queste parole, usate da M. Berry[4] nella recensione del libro di Mandelbrot citato[1], spiegano perché la geometria frattale stia esercitando una grande ed importante influenza su tutte le discipline scientifiche, in modo particolare sulla fisica. Un concetto così importante mancava per la descrizione delle strutture complesse della natura. Introducendolo,*

*Mandelbrot ha fornito alla Scienza una formidabile palestra nella quale potersi cimentare per affrontare i nuovi problemi riguardanti le proprietà basilari dei fenomeni naturali. Molti di questi problemi erano stati lasciati ai margini della speculazione scientifica in quanto risultavano impossibili a causa dell'inadeguatezza dei metodi matematici basati sulla analiticità. Dal punto di vista della geometria frattale, ora questi problemi si possono porre ed affrontare in modo corretto.*

*Questo nuovo approccio ha profonde conseguenze anche su problemi che sono stati in passato affrontati con metodi tradizionali. Un esempio interessante è il problema delle proprietà statistiche della distribuzione su larga scala della materia nell'Universo. Solo recentemente è stata completata una mappatura tridimensionale delle galassie -in un certo intervallo di luminosità- in volumi sufficientemente grandi su scala cosmica; è quindi possibile procedere ad una analisi statistica delle distribuzioni ottenute. Ciò è stato fatto (da Davis e Peebles[5]) impiegando metodi matematici che assumono a priori una "omogeneità" della materia su larga scala. Le ragioni di questa assunzione sono prevalentemente storiche e basate sul seguente argomento: il Principio Cosmologico implica una isotropia locale; tale fatto, insieme con la ipotesi di analiticità, conduce all'assunzione di omogeneità. L'ipotesi di lavoro è discussa ampiamente in un trattato di Steven Weinberg[6] universalmente accettato, non fosse altro che per la statura del proponente, premio Nobel per la Fisica nel 1979. In assenza di un qualsiasi quadro di riferimento alternativo, la analiticità non era mai stata considerata una proprietà da controllare e verificare con i dati sperimentali, bensì era in qualche modo automaticamente inclusa nello stesso Principio Cosmologico. La geometria frattale, invece, chiarisce molto bene come la isotropia locale non debba essere necessariamente associata alla omogeneità della distribuzione della materia nell'Universo.*

La rinuncia a questa ipotesi arbitraria ha portato a risultati sorprendenti: contrariamente a quanto concluso nel lavoro di Davis e Peebles, la distribuzione delle galassie non mostra alcuna tendenza ad omogeneizzarsi

nello spazio portando alla conclusione che la implicita assunzione di analiticità non può considerarsi corretta. La nuova analisi di Pietronero[8] conduce piuttosto a considerare la possibilità che la distribuzione su larga scala della materia nell'Universo sia frattale ad ogni scala osservabile. Tale conclusione risulta in accordo anche con l'osservazione di ampi "vuoti" e con la presenza di "superclusters", situazioni entrambe inconciliabili con le assunzioni di analiticità ed omogeneità. Recentemente Y. Barishev e P. Teeriporpi [7] hanno raccolto in un interessante volume la storia della scoperta dei .... frattali cosmici.

## 1.6 Lo sviluppo del presente volume

Dovendo giungere alle applicazioni delle idee frattali alla fisica, mi sono dovuto imporre una scelta. Per passare dalla matematica (o dalla geometria che fa lo stesso) alla fisica ho dovuto affrontare due problemi: fornire gli strumenti operativi per applicare i concetti frattali ai casi particolari e limitare il numero delle applicazioni ad alcuni casi soltanto, quelli cioè a cui mi sono dedicato in modo particolare.

Pertanto il presente volume, dedicato ad una introduzione elementare, pedagogica e minimale all'uso delle tecniche frattali, è organizzato in modo da portare il lettore alla possibilità di affrontare una analisi frattale di molti diversi fenomeni. Esso trae molti vantaggi dallo studio dell'opera di Jens Feder [9].

Il Capitolo 1 è chiaramente introduttivo e dovrebbe essere leggibile da parte di qualsiasi lettore che abbia una cultura media ed una educazione a livello post liceale.

Il Capitolo 2 è dedicato alla introduzione dei concetti fondamentali di frattale geometrico e di dimensione frattale, partendo dalla definizione di dimensione di un insieme secondo Hausdorff e Besicovitch.

Il Capitolo 3 mette in relazione la geometria frattale con le funzioni frattali. Viene descritto ed illustrato il paradosso di Schwartz che mette in luce i limiti nella impostazione dei processi di integrazione. Spesso

la geometria serve per illustrare il significato degli enunciati mentre le funzioni matematiche hanno una più immediata utilità applicativa.

Nel Capitolo 4 viene affrontato il problema del *random walk* ed in particolare è trattato il problema del moto browniano, partendo dalla interpretazione di Einstein, per passare a quello classico ed arrivare infine al moto browniano frazionale, fornendo anche qualche indicazione per procedere ad una sua simulazione con computer.

Il Capitolo 5 è dedicato alle prime definizioni degli insiemi multifrattali ed ai parametri -quali il parametro di Lipschitz e Hölder- atti a caratterizzarne le proprietà. Vengono illustrate la barra di Cantor e le scale diaboliche; viene proposto un primo processo di cascata moltiplicativa particolarmente semplice -quella binomiale- mostrandone le proprietà. Infine viene definito il coefficiente di massa che ha trovato applicazione in diversi campi.

Nel Capitolo 6 vengono introdotti i concetti fondamentali concernenti i frattali stocastici semplici, partendo dalla osservazione sperimentale che alcune proprietà fondamentali di *scaling* sono proprie di molti fenomeni naturali quali la caduta della pioggia e la formazione delle nubi. Nel capitolo viene anche introdotto il semplice modello detto della somma frattale di impulsi (monodimensionali) alla base di moltissime procedure di simulazione.

Il Capitolo 7 è dedicato ai multifrattali stocastici ed alla loro caratterizzazione. Particolare rilievo è dedicato ai modelli a cascata moltiplicativa con i quali risulta naturale costruire distribuzioni statistiche che godono delle proprietà multifrattali; al significato dello *scaling* multiplo delle distribuzioni di probabilità; alle proprietà della funzione codimensione nonché alla dimensione statistica di un campione limitato. Viene affrontato il problema dello *scaling* dei momenti statistici; procedendo infine ad una prima classificazione dei multifrattali stocastici.

Il Capitolo 8 introduce i multifrattali universali: la formulazione più moderna ed avanzata dei multifrattali stocastici che tenta di universalizzare le funzioni di probabilità cercando in tal modo di

razionalizzare la individuazione della  $C$  che sta alla base del fenomeno che si studia. La lettura di questo capitolo richiede almeno una scorsa alla Appendice A.

Da qui in poi, ci si muove essenzialmente verso la applicazione delle idee multifrattali alla Fisica, all'Astrofisica ed alla Econofisica ed alla connessione con gli studi della complessità e dei processi caotici.

Prima di buttarsi sulle applicazioni, il Capitolo 9 è dedicato ad un approccio alternativo di trattare il moto caotico in Meccanica Classica, secondo i dettami della Meccanica Statistica. Caos e frattali sono intimamente legati tra loro. Mentre da un lato utilizzando semplici regole si possono costruire figure o insiemi molto complessi, dall'altro sistemi meccanici relativamente semplici, definiti da pochi parametri possono sfociare in un comportamento estremamente complesso e non deterministicamente prevedibile se non per un periodo di tempo molto limitato. Come i frattali nascono applicando i metodi della geometria, il caos nasce applicando i metodi della meccanica. Questi argomenti possono facilmente essere trattati in volumi di molte pagine ed in corsi universitari interi. In questo libro ci limitiamo a giungere alla definizione dell'attrattore strano e della sua dimensione frattale.

Il Capitolo 10 mostra una panoramica delle analisi con le quali effetti di *intermittenza* sono stati scoperti nel fenomeno della produzione multipla di particelle negli urti tra particelle lementari di alta energia. La lettura di questo capitolo richiede lo lettura della Appendice B. Nel capitolo è presentata una rassegna dei dati raccolti da numerosi esperimenti condotti ad acceleratori ed a collisionatori negli ultimi 25 anni e la loro interpretazione in termini di parametri frattali e multifrattali.

Il Capitolo 11 tratta degli aspetti frattali legati all'astrofisica ed alla descrizione della materia nell'Universo.

Il Capitolo 12, invece, applica concetto di fisica e di geometria frattale alla trattazione dei mercati finanziari, mettendo in luce come le leggi dei sistemi dinamici si adattano molto bene allo studio della fluttuazione dei

prezzi dei valri azionari e dei mercati, fatto che ha dato origine ad una nuova disciplina detta Econofisica.

I Capitoli 13 e 14 sono dedicati alla descrizione di due fenomeni studiati personalmente dall'autore usando *anche* le tecniche frattali: nel capitolo 13 la distribuzione del contaminante diossina sparso sul suolo attorno alla città di Seveso in seguito ad un incidente chimico accaduto nel lontano 1976; nel capitolo 14 lo studio della concentrazione in aria ed al suolo di diversi radionuclidi (in particolare  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$  e  $^{132}\text{I}$ ) in alta Italia ed in Europa.

L'appendice A, che non ha nulla a che vedere con i frattali, è dedicata al richiamo di una serie di nozioni fondamentali di statistica e oltre ad essere propedeutica -almeno- al Capitolo 8, permette di introdurre concetti che non sono molto familiari alla gran parte degli studenti. Nei corsi di esercitazioni di fisica la statistica è presentata prevalentemente in funzione della sua applicazione alla teoria degli errori. La fisica tradizionale è per lo più dominata dalle distribuzioni binomiali, poissoniane e gaussiane, mentre la estrema variabilità connessa con i principi fondamentali insiti nel concetto di frattale richiede di ricorrere ad una più vasta gamma di possibilità. Le variabili di Lévy sono introdotte al fine di poter definire il parametro *grado di multifrattalità*  $\alpha$  che dal matematico francese prende il nome ed i voli di Levy sono un concetto poco noto.

L'Appendice B, infine, è dedicata alla definizione delle variabili cinematiche più in uso per la descrizione delle particelle prodotte in interazioni di alta energia trattate, frutto di annose speculazioni teoriche, ed è propedeutica al Capitolo 10.

## 1.7 Ringraziamenti

Devo soprattutto agli studenti il più ampio merito se questo volume ha visto la luce. Mi hanno spinto a preparare un testo che potesse aiutarli nella preparazione dell'esame, in mancanza di libri di testo già

scritti. Partendo da questo principio, quasi tutti mi hanno aiutato a redigere pezzi di capitolo, a verificare esplicitamente molte dimostrazioni, a svolgere esplicitamente calcoli per stimare delle soluzioni, a scrivere programmi per la generazione di frattali di ogni tipo. Inoltre, alcuni si sono posti alla caccia di figure illustranti frattali naturali, esplorando numerosi siti internet. Marco Merlo è stato mio maestro nell'uso dei programmi latex per la stesura dei testi, Photopaint per le trattazioni delle figure e la loro trasformazione dal formato GIF al formato .eps o .ps. Giovanni Bacchetta mi ha aiutato nella stesura di parte del Capitolo 3 per quanto riguarda la costruzione esplicita delle funzioni di Mandelbrot-Weiestrass. Gabriele Gianini ha collaborato a diverse parti circa i richiami di statistica classica. Gabriele Sani ha fornito una revisione critica dei primi quattro Capitoli ed ha provveduto alla regolarizzazione di molte notazioni. Luca Celardo ha letteralmente "aggiunto" il Capitolo 9 che connette l'approccio di Edward Lorenz al caos deterministico ed ai processi non lineari ed il linguaggio degli attrattori con il concetto di dimensione frattale. David Lopes Pegna si è impegnato nella stesura del capitolo sulla intermittenza nella produzione multipla di particelle nelle interazioni di alta energia. Armando Manzali ha redatto il Capitolo sugli aspetti frattali della distribuzione della materia nell'Universo. Pablo Genova ha redatto il capitolo riguardante l'Econofisica. Monica Necchi ha procurato un *escursus* ardito nel campo dell'evoluzionismo. Simone D'Angelo mi ha fatto "pensare" su tutte le inesattezze del libro di Jens Feder, con il quale è intercorsa una proficua corrispondenza. Manuel Pincetti e Silvia Entradi sono state le vittime che hanno portato a termine la versione finale. A Guido Montagna (e ai suoi giovani Moreni, Bormetti ed altri) devo un contributo al reperimento della trattazione originale di Einstein del moto browniano. Infine alla prof. Maria Giuseppina Bruno della LUISS, devo la lettura critica del Capitolo sulla Econofisica con il quale ho "invaso" il campo insidioso della Economia moderna. Gli studenti Alberto Arneri e Gianluca Romani sono stati destinati al "martirio finale" per la produzione dei Capitoli che descrivono l'analisi

dei dati sugli incidenti di Seveso e di Chernobyl. Il disegnatore signor Giovanni Bestiani ha prodotto al CAD numerosi disegni necessari per la illustrazione di numerose situazioni.



# Capitolo 2

## I frattali geometrici

### 2.1 Introduzione

Una definizione matematica chiara ed esaustiva di frattale che sia universalmente accettata non esiste ancora. Lo stesso Mandelbrot, da tutti considerato il padre dei frattali, nel corso degli anni ha proposto almeno tre definizioni:

- *Una forma o una figura frammentata, spezzata, fortemente discontinua (1978).*
- *Un insieme per il quale la dimensione secondo Hausdorff e Besicovitch eccede rigorosamente la dimensione topologica (1982).*
- *Una forma fatta di parti che sono in qualche modo simili al tutto (1986).*

La prima definizione è sicuramente valida intuitivamente ma troppo ingenua, qualitativa e *non matematica* per un personaggio come B. Mandelbrot; la seconda è troppo limitata e restrittiva non comprendendo alcuni dei frattali usati in fisica, mentre la terza è decisamente astratta e oscura. Definire un frattale non è semplice e nemmeno facile.

## 2.2 Dimensione di Hausdorff-Besicovitch

Per meglio capire il concetto di frattale occorre rifarsi alla definizione operativa di misura o copertura di un insieme. Supponiamo di voler *misurare* (secondo Hausdorff e Besicovitch) un insieme di punti, siano essi una linea, una superficie o un volume. Dividiamo lo spazio in *cubetti* di lato  $\delta$  ( o sferette di raggio  $\delta/2$ ) e contiamo il numero  $N(\delta)$  di cubetti necessari a ricoprire l'insieme. Chiamiamo  $\delta$  il nostro "passo di approssimazione" in quanto "non" contiamo le frazioni di  $\delta$  che costituiscono "il resto" e che eventualmente restano fuori dal conteggio. La procedura è molto semplice: si moltiplica il valore del passo ( $\delta$  oppure  $\delta^2$  oppure  $\delta^3$ ) per il numero di passi necessari per coprire l'insieme. La *misura*  $S_\delta = N(\delta) \cdot \delta$  tende ad un valore  $S_o$  per  $\delta \rightarrow 0$ . Se  $S_o$  è un numero finito,  $S_o$  è la misura dell'insieme.

Facciamo un esempio illustrativo e semplice considerando una curva di lunghezza  $L_o$  (vedi fig. 2.1a). La "misura eseguita con passo d'ap-

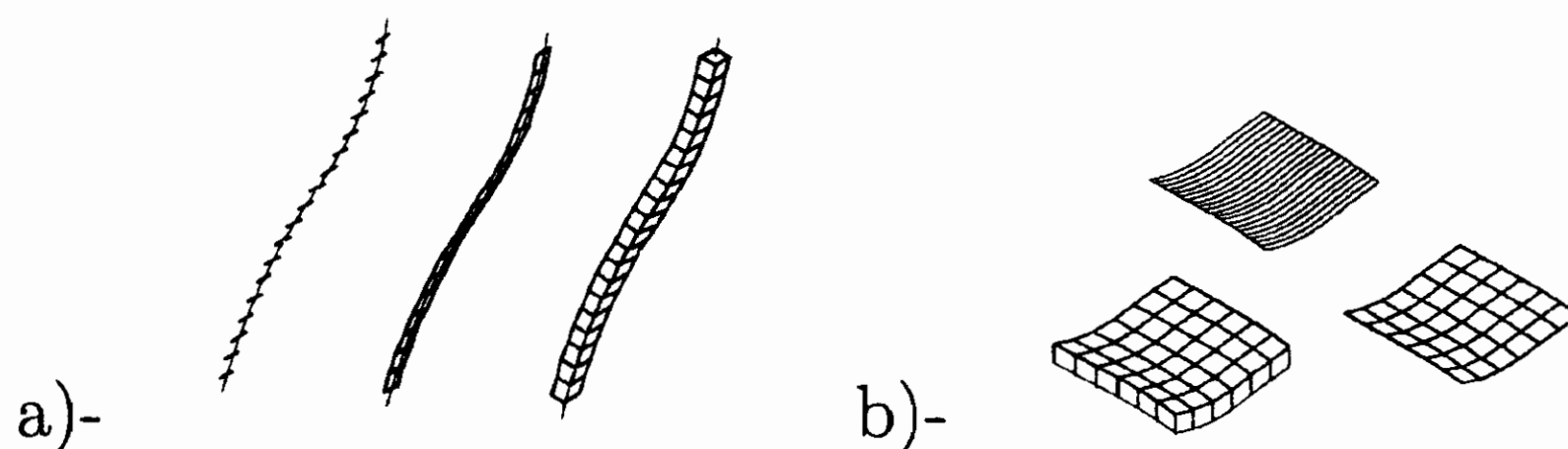


Figura 2.1: Copertura di una linea e un piano con superfici e volumi

prossimazione (o in unità  $\delta$ ) è quindi  $L_\delta = N_l(\delta) \cdot \delta$ . La misura  $L_o$  è quindi:

$$L_o = \lim_{\delta \rightarrow 0} N_l(\delta) \cdot \delta \quad (2.1)$$

Per convenienza chiamiamo  $L$  una misura ottenuta contando  $N_l(\delta)$  boxes ed usando come passo di approssimazione  $\delta$ ;  $A$  una misura ottenuta contando  $N_a(\delta)$  boxes ed usando come passo  $\delta^2$  e  $V$  una misura ottenuta contando  $N_v(\delta)$  boxes ed usando come passo  $\delta^3$ . In linea di principio, nulla vieta di usare quadratini o cubetti per ricoprire una linea. La situazione è schematicamente illustrata in fig. 2.1.

Pertanto, se invece di usare segmenti usassimo quadrati o cubi per eseguire la misura di una linea, invece che la (10.15) otterremmo:

$$\begin{aligned} a_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [N_l(\delta) \cdot \delta] \cdot \delta = 0 \\ V_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [N_l(\delta) \cdot \delta] \cdot \delta^2 = 0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Lo stesso ragionamento si può seguire per ricoprire una superficie di area  $A_o$  (cfr. fig. 2.1b).

Se quindi usiamo: o segmentini di lato  $\delta$ ; o quadratini di area  $\delta^2$ ; ovvero volumetti di volume  $\delta^3$  per misurare un'area, otteniamo:

$$\begin{aligned} A_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [N_a(\delta) \cdot \delta^2] \\ L_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[N_a(\delta) \cdot \delta^2]}{\delta} = \infty \\ V_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} [N_a(\delta) \cdot \delta^2] \cdot \delta = 0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

Infine, per misurare un volume otteniamo:

$$\begin{aligned} V_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} N(\delta) \cdot \delta^3 \\ L_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[N(\delta) \cdot \delta^3]}{\delta^2} = \infty \\ A_o &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{[N(\delta) \cdot \delta^3]}{\delta} = \infty \end{aligned} \quad (2.4)$$

Ancora una volta, applicando rigorosamente la definizione operativa di misura secondo Hausdorff e Besicovitch, nulla vieta di usare segmenti  $\delta$  per ricoprire una superficie. Così facendo otteniamo:

$$L_\delta \rightarrow A_o / \delta^2 \cdot \delta = A_o \cdot \delta^{-1} \quad (2.5)$$

Questa misura diverge quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Secondo Hausdorff e Besicovitch quindi, la dimensione di un insieme è il numero critico "D" per cui la misura:

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) \cdot N(\delta) \cdot \delta^d \quad (2.6)$$

varia tra 0 e  $\infty$ ; avremo cioè  $M_d \rightarrow 0$  per  $d > D$  e  $M_d \rightarrow \infty$  per  $d < D$ . La funzione  $\gamma(d)$  è una funzione numerica che omogeneizza l'unità (il

passo) con l'insieme (per esempio se si usano cerchi per ricoprire una superficie compare un fattore  $\pi$ ; se si usano sfere compare un fattore  $4/3 \pi$  e via dicendo).

Risulta evidente che la sola misura utile per una curva è la lunghezza ( $D = 1$ ), che la sola misura utile per una superficie è l'area ( $D = 2$ ), come del resto la sola misura utile per un insieme tridimensionale è il volume ( $D = 3$ ).

### 2.2.1 La curva di Peano

Questa definizione di Hausdorff e Besicovitch risale al 1918 [10] e non mancano casi molto curiosi. Consideriamo infatti, per esempio, un caso molto particolare: una superficie piana quadrata con all'interno iscritti dei cerchi collegati tra loro (fig. A.1). Il perimetro dell'insieme dei cerchi è la somma delle circonferenze più la somma dei trattini di collegamento. Se facciamo tendere il raggio dei cerchi a zero il perimetro viene a coincidere con l'area. Si ottiene cioè un paradosso (*paradosso di Peano -1890 !*): una curva con dimensione 2.

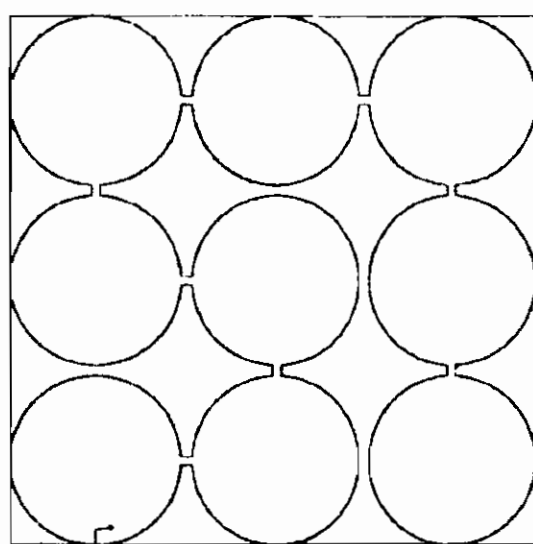


Figura 2.2: Curva di Peano.

Aristotele, riguardo alle dimensioni delle grandezze, scrisse:

*Delle grandezze, quella che ha una dimensione è linea, quella che ne ha due è superficie, quella che ne ha tre è corpo, e al di fuori di queste non si hanno altre grandezze...*<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Si dovrebbe oggi aggiungere: ..... quella che ne ha quattro è lo spazio-tempo di Minkowski.

A questa filosofia si rifece Euclide nel fondare la propria geometria. Facciamo ora alcuni commenti alla definizione di Hausdorff e Besicovitch. Nello spazio euclideo per una linea  $N(\delta) \div \delta^{-1}$ , per una superficie  $N(\delta) \div \delta^{-2}$  e per un volume  $N(\delta) \div \delta^{-3}$ . Questa osservazione, unita alla definizione data da Hausdorff e Besicovitch non implica automaticamente che  $D$  debba essere un numero intero. Possono esistere figure geometriche per le quali  $D$  non è intero? Se questo fosse vero la geometria si arricchirebbe di un numero infinito di spazi non euclidei a dimensioni non intere. La definizione operativa di copertura ci lascia la libertà di scegliere il passo  $\delta$ . Vedremo che ci sono casi molto concreti per i quali  $N(\delta) \div \delta^{-D}$  con  $D \neq 1, 2, 3, \dots$ . Infatti per una curva frattale  $N(\delta) \div \delta^{-D}$  dove  $D$  può essere anche un numero non intero. Pertanto la geometria frattale permette l'esistenza di grandezze caratterizzate da dimensioni  $D$  frattali non intere.

### 2.2.2 Dimensione frattale di box counting

Per come la misura viene operativamente eseguita,  $D$  viene chiamata *box counting fractal dimension* o anche *dimensione frattale secondo Hausdorff e Besicovitch*.

La relazione che possiamo ricavare facilmente dalla (2.6):

$$M_D(\delta) \div N(\delta) \cdot \delta^D \quad (2.7)$$

ci fornisce immediatamente un modo operativo per ricavare la dimensione frattale di un insieme tutte le volte che possiamo (operativamente) eseguire la sua copertura (la sua misura)<sup>2</sup> con diversi passi  $\delta$ . Occorre forzare un poco la (2.7). Per  $\delta$  piccoli, nella regione asintotica  $\delta \rightarrow 0$  scriviamo infatti:

$$D \approx -\frac{\log N(\delta)}{\log \delta} = \frac{\log N(\delta)}{\log \lambda} \quad (2.8)$$

---

<sup>2</sup>Ricordiamo dai corsi di Laboratorio di Fisica e dall'ottica che se  $\delta$  è l'unità usata (rivelabile)  $\lambda = 1/\delta$  è detta risoluzione: minore l'unità misurabile  $\delta$ , maggiore la risoluzione  $\lambda$ .

In un grafico doppio logaritmico si riporta il logaritmo del conteggio (*counting*) dei segmenti (o *box*) necessari per ricoprire l'insieme con passo  $\delta$ , per diverse risoluzioni  $1/\delta$  e ricavare la pendenza della curva risultante. Passo d'approssimazione  $\delta$  grande, pochi conteggi, passo  $\delta$  piccolo, molti conteggi; la sequenza dei punti è decrescente sul grafico, il che è conseguenza del segno negativo nella (2.8).

### 2.2.3 Le coste della Norvegia e di altri Paesi

Per chiarire le idee utilizziamo un esempio classico: la misura delle coste della Norvegia, eseguito con il metodo illustrato (che è poi quello utilizzato in pratica).

La lunghezza delle coste della Norvegia, misurate con un passo  $\delta$ :  $L_{Norv.} = N(\delta) \cdot \delta$  -dove  $\delta$  è il lato degli  $N(\delta)$  quadrati necessari a ricoprire l'intero perimetro costiero (fig. 2.3)- dipende in modo determinante dalla risoluzione  $\lambda = 1/\delta$ .

E' bene ricordare, facendo riferimento anche alla fig. 2.1, che è del tutto indifferente ricoprire le coste con segmentini  $\delta$  o con quadratini  $\delta^2$ , al fine della valutazione di  $N(\delta)$ . Infatti tutti i quadratini che *non contengono* punti del contorno della figura non vengono comunque contati (lo sarebbero invece se si trattasse di ricoprire l'area della figura!). Quando i quadrati sono grandi si possono osservare grosse fluttuazioni, ma quando i quadratini diventano sufficientemente piccoli, il conteggio coincide con quello che si avrebbe ricoprendo con segmentini.

Difficile stabilire un passo  $\delta$  che sia convincente per tutti. Un  $\delta$  troppo grande è insensibile ai piccoli fiordi e alle piccole insenature. D'altra parte un  $\delta$  troppo piccolo è sensibile anche ai piccoli sassi o all'andirivieni della bassa marea sulle spiagge. Se però si costruisce un grafico bilogaritmico con in ordinata la lunghezza e in ascissa la lunghezza del passo si ottiene una retta di pendenza 1.52 (fig. 2.4). Questa pendenza è 1 meno la dimensione frattale  $D$  precedentemente citata [infatti sulle ascisse della figura 2.4 viene riportato  $L = N(\delta)\delta$  e non  $N(\delta)$  che entra nella definizione  $D = -\log N(\delta)/\log \delta$ ].

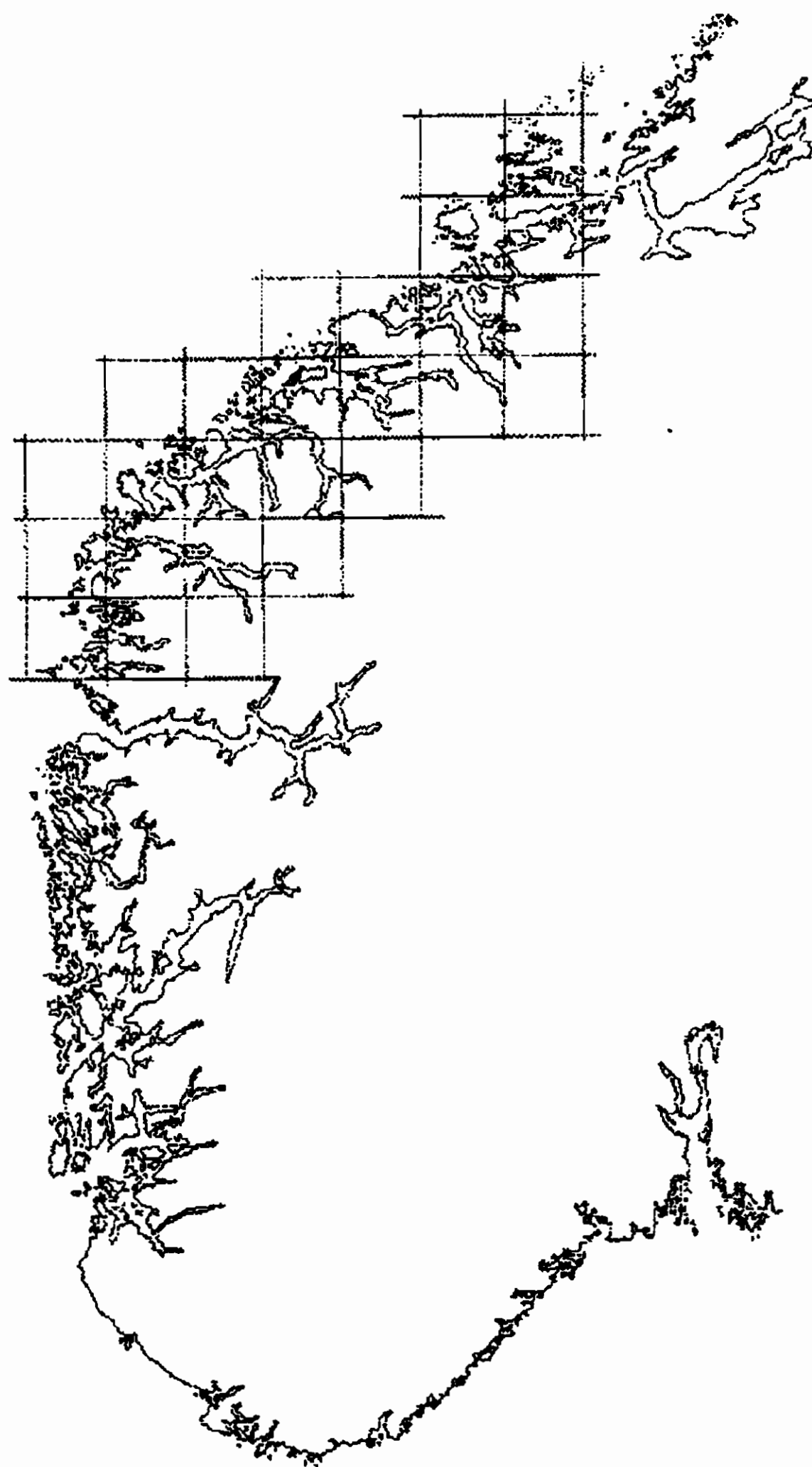


Figura 2.3: Misurazione delle coste della Norvegia: ogni quadrato ha un lato di  $\delta = 50km$

Dai dati riportati nel grafico bilogarithmico (fig. 2.4), possiamo dire che le coste della Norvegia hanno una dimensione frattale pari a 1.52. Questo valore dà una misura quantitativa di quanto le coste siano frastagliate. La relazione tra la lunghezza e la lunghezza del passo è data dalla seguente espressione [si noti che  $L(\delta) = N(\delta) \cdot \delta$ ]:

$$L(\delta) = a \cdot \delta^{1-D} \quad (2.9)$$

Studi simili sono stati fatti sui confini di molti stati (vedi fig. 2.5). Per esempio sappiamo che le coste del Sudafrica hanno una dimensione

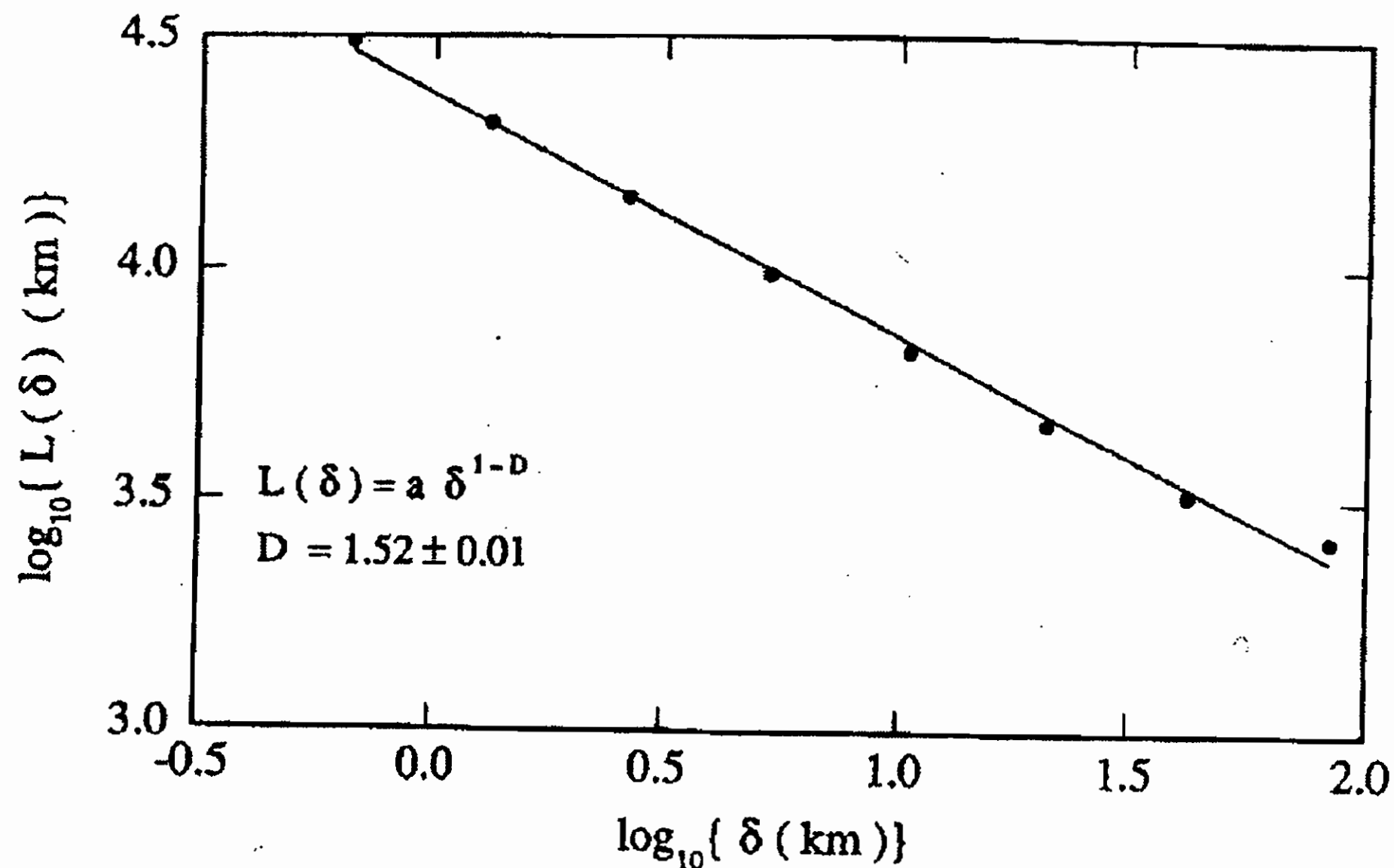


Figura 2.4: Grafico doppio logaritmico per le coste della Norvegia

frattale vicina a 1 e cioè che sono molto meno frastagliate rispetto a quelle della Norvegia. Possiamo dire che la dimensione frattale è *una misura quantitativa della irregolarità (... della frattalità)* di una linea geometrica.

La fig. 2.5 riporta i grafici bilogaritmici per le coste o i confini di diversi Paesi; grafici che risalgono a ben prima della invenzione dei frattali, ma che costituivano curve empiriche usate dai cartografi per stimare la lunghezza delle coste.

In fig. 2.5 è riportato anche il caso di una circonferenza, come confine di un cerchio. Per questa linea euclidea è  $D = 1.0$ , per cui dalla (2.9), la pendenza è nulla (riprenderemo questo discorso più avanti nel par. 2.6). In ultima analisi, la lunghezza di una carta (o di un confine) non ammette misura. Se ne può dare una stima “a risoluzione assegnata”.

#### 2.2.4 La codimensione frattale

Si definisce codimensione frattale di un insieme  $S$  di dimensione frattale  $D$  contenuto in uno spazio di immersione  $S_0$  di dimensione euclidea  $E$  il



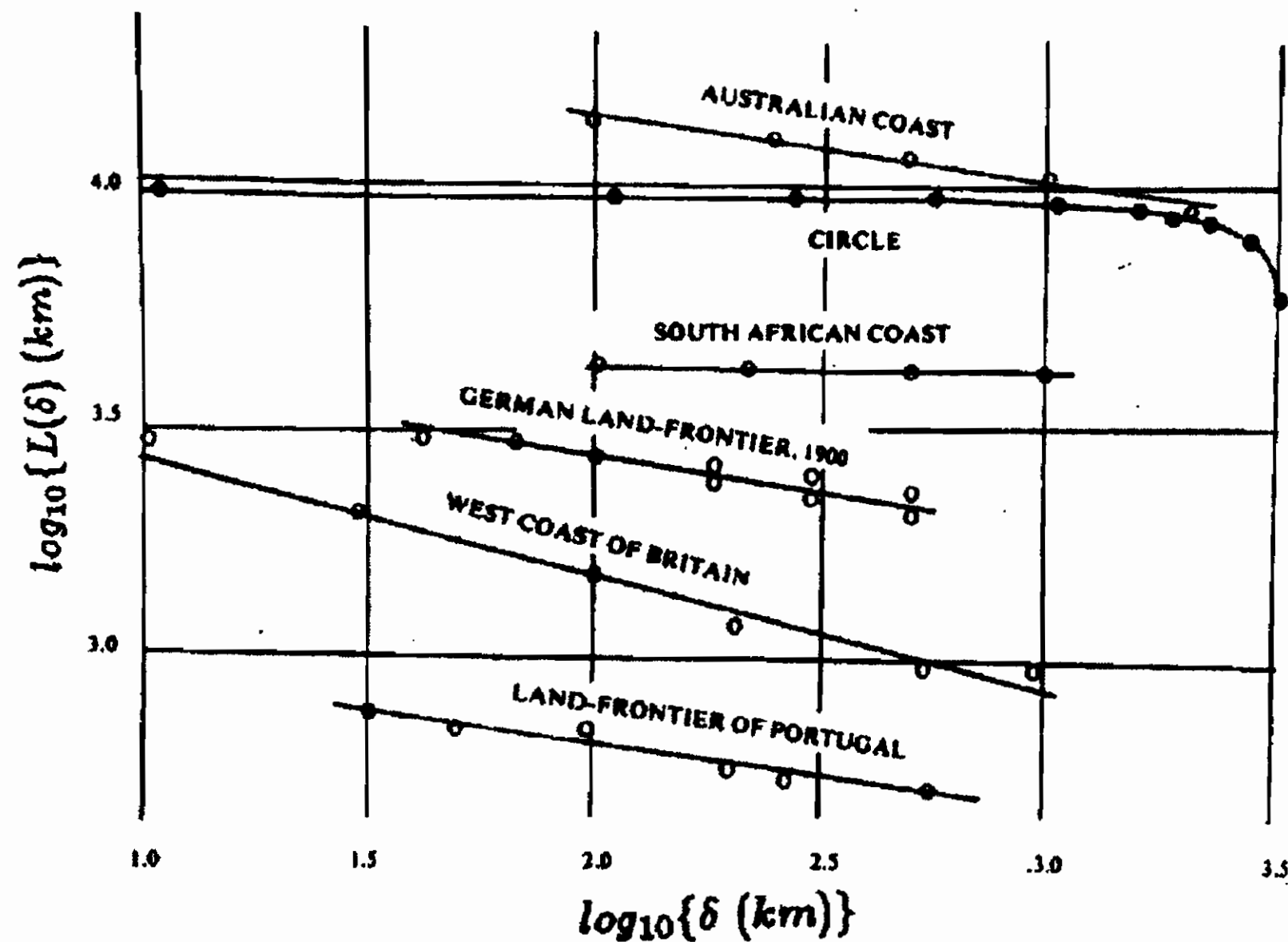


Figura 2.5: La lunghezza delle coste per diverse nazioni in funzione del passo di approssimazione  $\delta$

valore:

$$C = E - D \quad (2.10)$$

Per una spezzata piana, per esempio è  $C = 2 - D$ . Il concetto di codimensione verrà ripreso in maggior dettaglio nel Cap. 7.

La dimensione frattale in molti casi dipende da uno o più parametri. Se consideriamo il contorno di una montagna dobbiamo specificare a quale altitudine vogliamo misurarne il perimetro. In questo caso la dimensione frattale del perimetro di una montagna dipende dalla quota  $h(D(h))$ . La dimensione  $D$  diventa così facilmente una **funzione multifrattale**.

Un altro esempio di multifrattale è la misurazione del perimetro delle nubi. Anche in questo caso la dimensione frattale è una funzione che dipende dalla quota alla quale si esegue idealmente una sezione della nube.

## 2.3 La curva triadica di Koch

La fig. 2.6 mostra la costruzione della curva triadica di Koch, uno dei classici esempi di curva con dimensione  $D > 1$ .

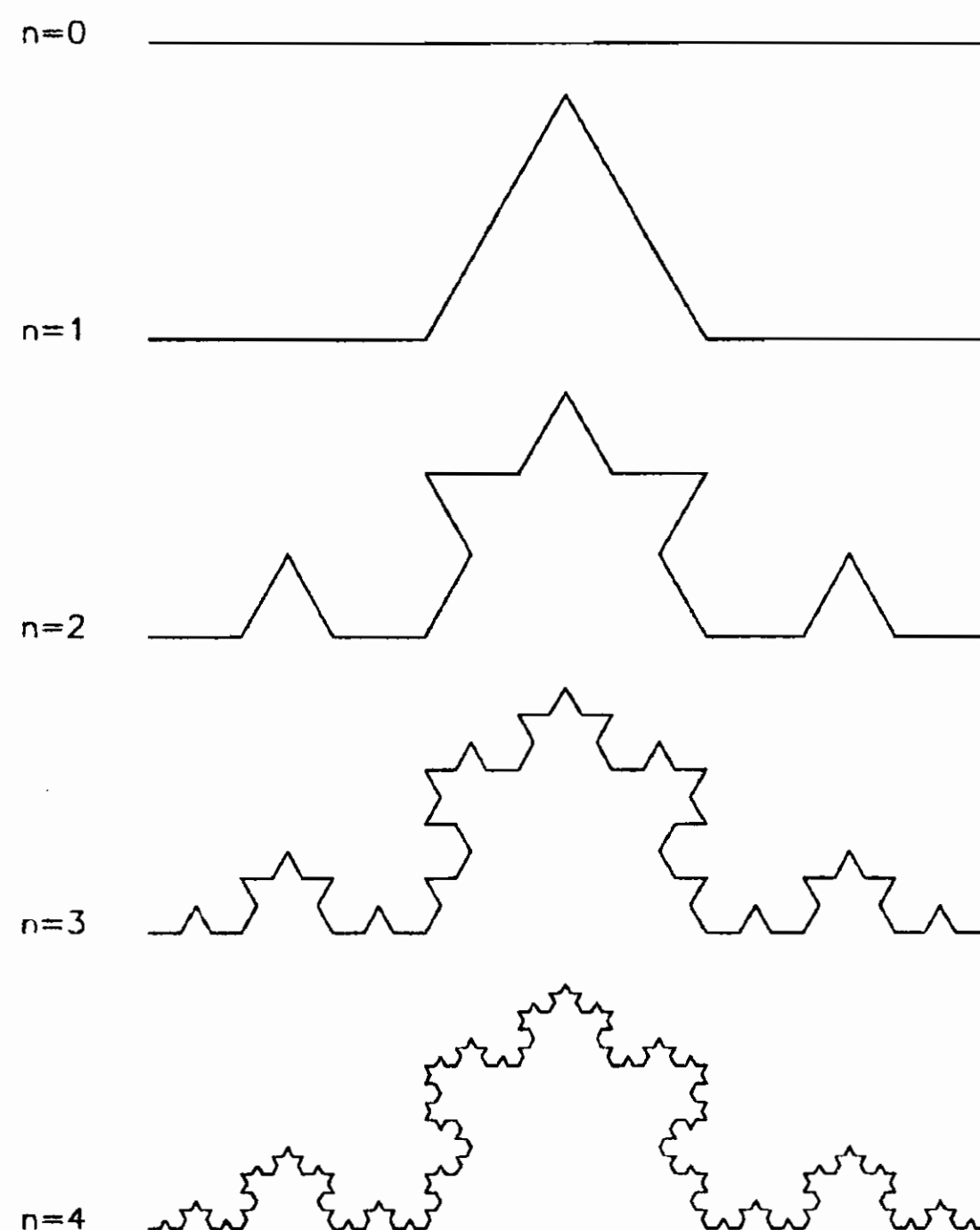


Figura 2.6: Costruzione della curva triadica di Koch.  $n = 0$ : iniziatore;  $n = 1$ : generatore

La costruzione della curva inizia con segmento  $[0, 1]$  di retta di lunghezza  $L(1) = 1$ . Questa forma di partenza (che potrebbe essere anche triangolo equilatero, un quadrato o qualsiasi altro poligono) è chiamata *iniziatore* e coincide anche con la curva di Koch della generazione 0. Si divide l'iniziatore (o seme) in 3 parti uguali: il trattino lungo  $1/3$  è detto copia. La prima generazione si costruisce usando 4 copie per ricoprire l'iniziatore  $[0, 1]$ , ottenendo così il generatore mostrato in fig. 2.6 alla posizione  $n = 1$ , producendo così la curva della prima generazione che è un insieme di 4 segmenti di lunghezza  $1/3$ . La lunghezza della curva è ora  $L(1/3) = 4/3$ . La successiva generazione viene ottenuta sostituendo ogni segmento della curva con il generatore scalato di un terzo. La nuova lunghezza è ora  $L(1/9) = (16/9)$ . Ogni passo successivo viene ottenuto

con la sostituzione di un segmento con il generatore ridotto in maniera appropriata. Dopo  $n$  passi la lunghezza della curva è di  $L(\delta) = (4/3)^n$  mentre la lunghezza di ogni segmento è di  $\delta = 3^{-n}$ , quindi:

$$n = -\log \delta / \log 3 \quad (2.11)$$

Ricaviamo ora la dimensione frattale  $D$  a partire dalla definizione di misura dell'insieme secondo Hausdorff e Besicovitch [cfr. la (2.6)]:

$$M_d = \sum \gamma(d) \delta^d = \gamma(d) \cdot N(\delta) \cdot \delta^d = \sum \delta^d = 4^n \left(\frac{1}{3}\right)^{nd} \quad (2.12)$$

con  $\gamma = 1$ .

Usando la (2.11) la (2.12) diventa:

$$\begin{aligned} M_d &= e^{\log[4^n (\frac{1}{3})^{nd}]} = e^{n \log 4 - nd \log 3} = e^{n(\log 4 - d \log 3)} = \\ &= e^{-\frac{\log \delta}{\log 3} (\log 4 - d \log 3)} = e^{\log \delta (d - \frac{\log 4}{\log 3})} = \delta^{d - \frac{\log 4}{\log 3}} \end{aligned} \quad (2.13)$$

Verifichiamo ora il comportamento del limite per  $\delta \rightarrow 0$  per i diversi valori di  $d$  onde ricavare il valore critico  $D$ .

Se  $d > \frac{\log 4}{\log 3}$  allora  $M_d(\delta) \rightarrow 0$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Se  $d < \frac{\log 4}{\log 3}$  allora  $M_d(\delta) \rightarrow \infty$  quando  $\delta \rightarrow 0$ .

Quando finalmente  $d = \frac{\log 4}{\log 3}$  allora  $M_d(\delta) = 1$  per  $\delta \rightarrow 0$  in quanto  $\delta^0$  vale 1. Questo quindi significa che la lunghezza può essere espressa nel seguente modo:

$$\begin{aligned} L(\delta) &= (4/3)^n = e^{[n(\log 4 - \log 3)]} = \\ &= \delta^{1-D} \end{aligned} \quad (2.14)$$

dove:

$$D = \frac{\log 4}{\log 3} \quad (2.15)$$

Se paragoniamo la (2.14) con la (2.9) ci accorgiamo che la curva di Koch ha una dimensione frattale  $D = \log 4 / \log 3 \sim 1.2628$ .

Le curve di generazione  $n$ , con  $n$  finito, sono chiamate da Mandelbrot curve *prefrattali* e possono essere per così dire stirate per formare una

linea retta. Questo significa che lo spazio di immersione ha dimensione topologica  $D_E = 1$ . Il fatto che la dimensione secondo Hausdorff-Besicovitch sia maggiore della dimensione euclidea dello spazio topologico di immersione è un'altra prova che la curva di Koch è un insieme frattale. Molti sono gli esempi di curve frattali che vengono costruite analogamente alla curva di Koch. In fig. 2.7 vengono mostrati alcuni esempi.

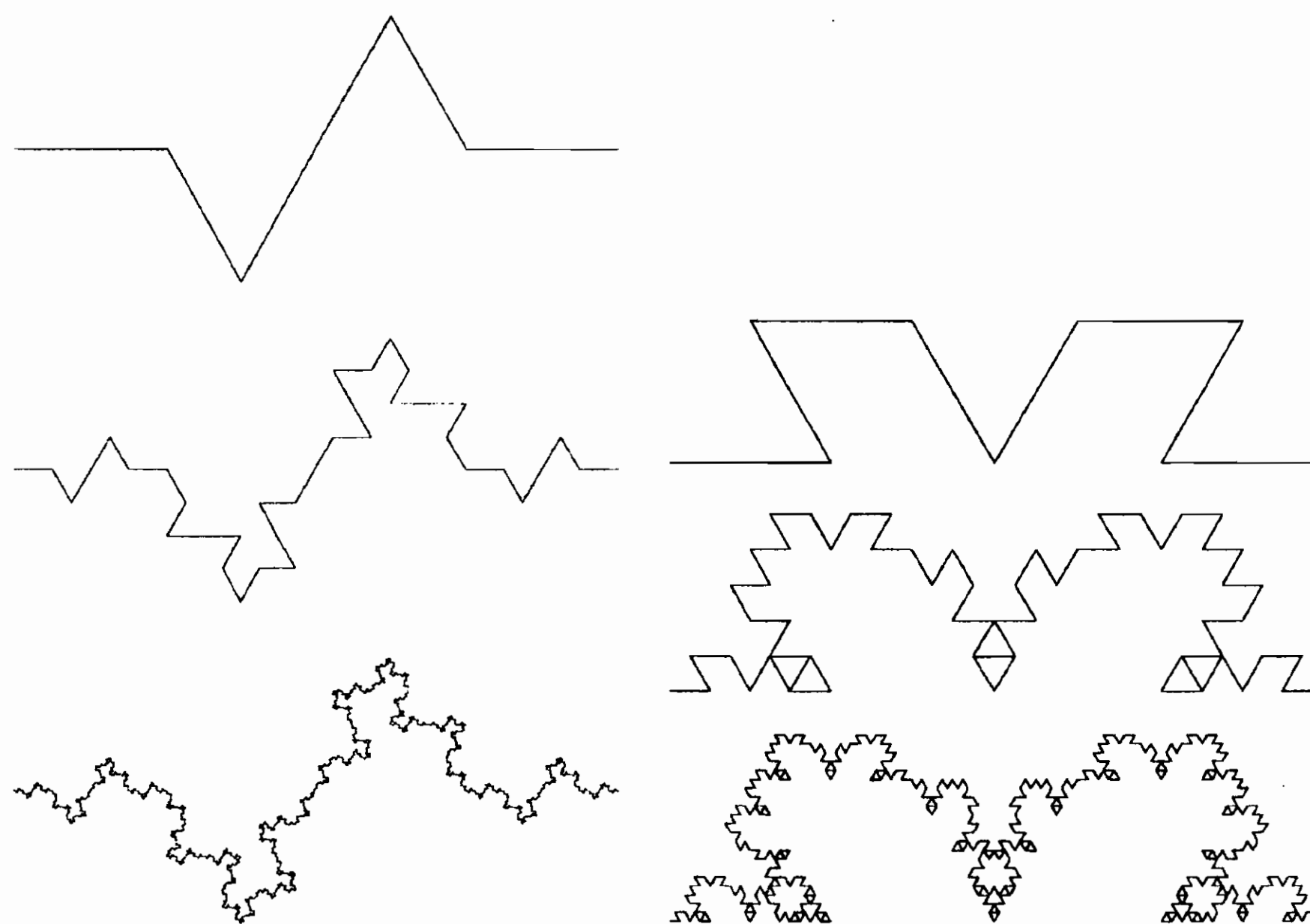


Figura 2.7: Esempi di curve frattali

## 2.4 L'insieme triadico di Cantor

La costruzione di un frattale con dimensione  $D < 1$  è dovuta a Cantor. L'insieme triadico di Cantor  $S$  è, in un certo senso complementare all'insieme (curva) triadico di Koch. L'iniziatore è ancora un segmento di retta  $[0, 1]$  di lunghezza  $L(1) = 1$ . La costruzione dell'insieme consiste ancora nel dividere l'iniziatore  $[0, 1]$  in tre parti uguali di lunghezza  $1/3$ . Il *generatore* ora si ottiene eliminando il terzo centrale del segmento, cosicchè il generatore è costituito da due segmentini di lunghezza  $1/3$  separati da un "vuoto" lungo  $1/3$  (vedi fig. 2.8).

La "misura"  $L(1/3)$  dell'insieme è ora  $L(1/3) = 2/3$ . La seconda

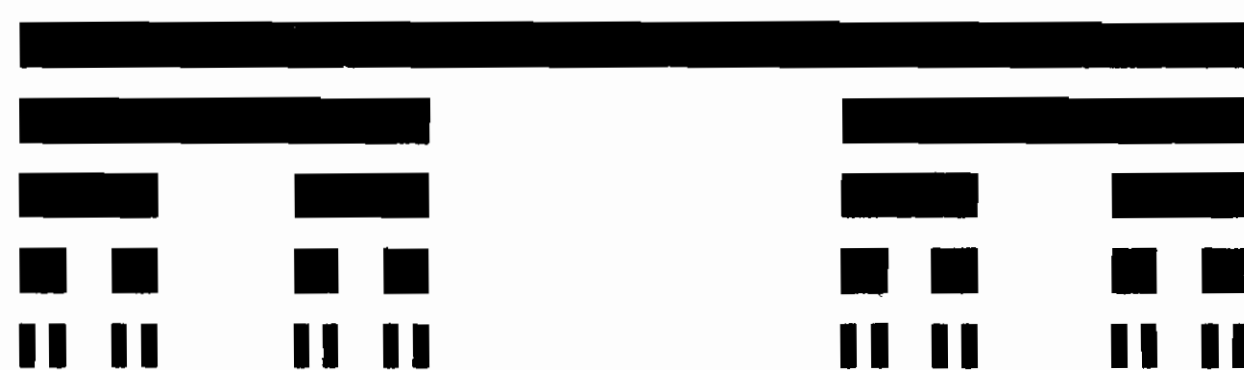


Figura 2.8: Insieme triadico di Cantor

generazione si ottiene sostituendo ogni segmento dell'insieme con il generatore scalato di  $1/3$ . La nuova lunghezza è  $L(1/9) = 4/9$ . Anche in questo caso, ogni passo successivo si ottiene sostituendo i segmenti sopravvissuti con il generatore ridotto in maniera appropriata. Dopo  $n$  passi la misura dell'insieme è  $L(\delta) = (2/3)^n$  mentre la lunghezza di ogni segmento è  $\delta = 3^{-n}$  (da cui  $n = -\log \delta / \log 3$ ). Applichiamo ora la definizione (2.6) di dimensione  $D$  secondo Hausdorff e Besicovitch alla costruzione appena descritta dell'insieme noto con il nome di *insieme triadico di Cantor*:

$$M_d = \sum \delta^d = 2^n \left(\frac{1}{3}\right)^{nd} = \gamma(d) N(\delta) \delta^d \quad (2.16)$$

(infatti ci vogliono  $2^n$  trattini, ciascuno lungo  $\delta = (1/3)^n$  per ottenere la lunghezza totale dei segmentini della  $n$ -esima generazione di fig. 2.8). Qui, trattandosi di segmentini rettilinei,  $\gamma(\delta) = 1$ .

Se  $d = D$ , dalla (2.9) si può scrivere:

$$M_d = \delta^{1-D} \quad (2.17)$$

D'altro canto, sappiamo che la misura dell'insieme  $S$ , a risoluzione  $\lambda = 1/\delta$ , è  $L(\delta) = (2/3)^n$  mentre  $n = -\log \delta / \log 3$ . Possiamo pertanto scrivere:

$$\begin{aligned} L(\delta) &= \left(\frac{2}{3}\right)^n = e^{(\log \frac{2}{3})^n} = e^{[n(\log 2 - \log 3)]} = \\ &= e^{\left[-\frac{\log \delta (\log 2 - \log 3)}{\log 3}\right]} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Confrontando la (2.18) con la (2.9) possiamo scrivere:

$$L(\delta) = \delta^{1-D} = e^{\log \delta (1-D)} = e^{-\log \delta \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3}} \quad (2.19)$$

Da cui:

$$\begin{aligned} (1 - D) &= -\frac{\log 2 - \log 3}{\log 3} \Rightarrow \\ D &= 1 + \frac{\log 2 - \log 3}{\log 3} = \frac{\log 2}{\log 3} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Appare chiaro che l'inziatore può essere segmentato in più di 3 parti uguali e sottrarne più di una nel generatore. Quindi si possono costruire polveri di Cantor con qualsiasi dimensione  $D$  nell'intervallo  $0 < D < 1$ .

## 2.5 Curdling, trema e whey

Le procedure di Koch e di Cantor per generare semplici figure geometriche frattali hanno portato Mandelbrot ad introdurre una nomenclatura specifica che è bene ricordare brevemente.

La procedura di Cantor è *una cascata*, così come è una cascata la procedura di costruzione delle curve di Koch. Il fisico Lewis Richardson, cui Mandelbrot si rifà, usò questo termine nella descrizione dei fenomeni di turbolenza per dire che un vortice di aria è costruito mediante la composizione di moltissimi piccoli vortici che si moltiplicano.

Il *terzo vuoto* del segmento unitario di Cantor si chiama il **trema generatore** dell'insieme. Il neologismo, trovato da Mandelbrot, proviene dal greco *τρῆμα* che significa *buco* e che ha come parente latino la parola **termes**: termiti, gli animaletti che fanno un sacco di buchini...

Il senso è che un *qualcosa* originariamente distribuito uniformemente in una data regione -nella fattispecie, lungo un segmento unitario- è soggetto ad un *vortice centrifugo* che lo deforma e che, nel caso specifico dell'insieme di Cantor, lo spinge nei due *terzi* di segmento adiacenti. E questo processo si ripete indefinitamente: a cascata. Il primo passo della procedura configura così un insieme di (due) segmentini pieni detti *precurd*, mentre l'insieme finale degli intervallini pieni è detto *curd*.

Nel contesto specifico del frattale di Cantor, i trema coincidono con i vuoti dell'insieme. Tuttavia, nel contesto generale, trema sta a significare

non necessariamente un *vuoto* bensì l'elemento generatore essenziale della procedura che porta alla costruzione dell'insieme frattale.

Mandelbrot propone anche di chiamare *whey* l'insieme dei punti che rimangono dal trattino iniziale, dopo la sottrazione dell'insieme di Cantor: cioè lo spazio esterno al *curd*. Nella terminologia di Mandelbrot, *curdling* sta a significare una qualsiasi cascata di instabilità risultante dalle *contrazioni e curd* di un volume entro il quale una caratteristica fisica diventa sempre più concentrata come risultato del processo di *curdling*.

Etimologicamente, il termine proviene dall'inglese antico: *to curdan* significa *premere, spingere forte*. Mandelbrot lo ha adottato mentre lavorava al problema della descrizione delle galassie pensando alle concentrazioni di masse stellari in termini di *curdling* galattico.

## 2.6 Dimensione di somiglianza: affinità

Una retta euclidea è un insieme speciale di punti nello spazio; infatti è invariante rispetto alla traslazione e al cambiamento di scala. Si dice che la retta è *autosomigliante* o *self similar*. Lo stesso vale per un piano e per lo spazio a tre dimensioni. Una circonferenza ha proprietà più deboli; è invariante per rotazione, ma non lo è per traslazione.

Consideriamo ora un tratto finito di retta  $S$ . Possiamo cambiarne la lunghezza scalandolo di un fattore  $r$  e generare un nuovo insieme  $S' = r(S)$  che è un pezzo del segmento iniziale. Con una scelta opportuna di  $r$  possiamo ricoprire il tratto originale con  $N$  segmenti  $S'$  non sovrapposti. Possiamo cioè dire che l'insieme  $S$  è *autosomigliante* per il rapporto di scala  $r$ . E' chiaro che possiamo scegliere  $r(N) = 1/N$  con  $N$  intero per un segmento, oppure  $r(N) = (1/N)^2$  per un rettangolo (fig. 2.9) ed in generale:

$$r(N) = (1/N)^{1/D_s} \quad (2.21)$$

La grandezza  $D_s$  viene detta *dimensione di similarità* e coincide con la

dimensione frattale  $D$ , infatti:

$$\log r(N) = \frac{1}{D_s} \log(1/N) = -\frac{1}{D_s} \log N$$

da cui

$$D_s = -\frac{\log N}{\log r(N)} \quad (2.22)$$

La dimensione secondo Hausdorff-Besicovitch coincide con la dimensione di *self similarity* o viceversa, ed in generale entrambe le due dimensioni vengono quindi indicate con la stessa lettera  $D$ .

E' facile determinare la dimensione frattale di similarità per i frattali costruiti con tutte le varianti degli insiemi di Koch; non solo quelle illustrate in fig. 2.7 ma anche quelle che si possono ottenere partendo da un generatore rappresentato, invece che da un segmento unitario, da due segmenti perpendicolari, da un triangolo equilatero, da un quadrato o, in generale, da una spezzata ovvero da una poligonale qualsivoglia.

Un esempio tipico è la *curva quadrica* di Koch che parte da un prefraattale costruito mediante un segmento unitario diviso in quattro parti uguali mentre per ricoprire l'inziatore se ne utilizzano otto (di lunghezza  $r = 1/4$ ). Applicando  $n$  volte la procedura, si ottiene una curva di dimensione frattale  $D = -\log 8 / \log(1/4) = 3/2$ .

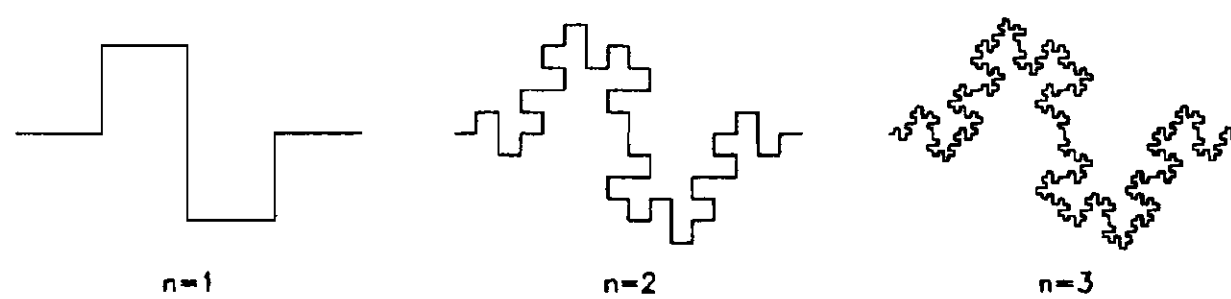


Figura 2.9: Costruzione della curva quadrica di Koch

Ogni pezzo della figura è autosomigliante, se scaliamo l'intera figura di un fattore  $r$ , otteniamo una versione ridotta dell'originale, l'originale *non* può quindi essere coperto usando la versione *globale* ridotta. L'originale è riproducibile mediante le versioni ridotte del *lato* unitario dell'inziatore.

Il problema dello *scaling* verrà affrontato nel par. 2.7. Qui ci limitiamo ad osservare che, in senso stretto, lo *scaling* è una proprietà *locale*.

Agli insiemi di Koch si possono introdurre moltissime variazioni.



- Si prenda un segmento unitario estratto per esempio da un poligono regolare di  $n$  lati (per esempio  $n = 5$ ); lo si riduca di un fattore  $r$  (per esempio  $r = 0.98$ ). Si ricostruisca il poligono accostando (con angolo  $\theta = 2\pi/n + \epsilon$  dove con  $\epsilon$  si intende un valore costante, piccolo ed arbitrario) i segmenti sempre più corti. Si ottiene una spirale frattale come quella illustrata in fig. 2.10.

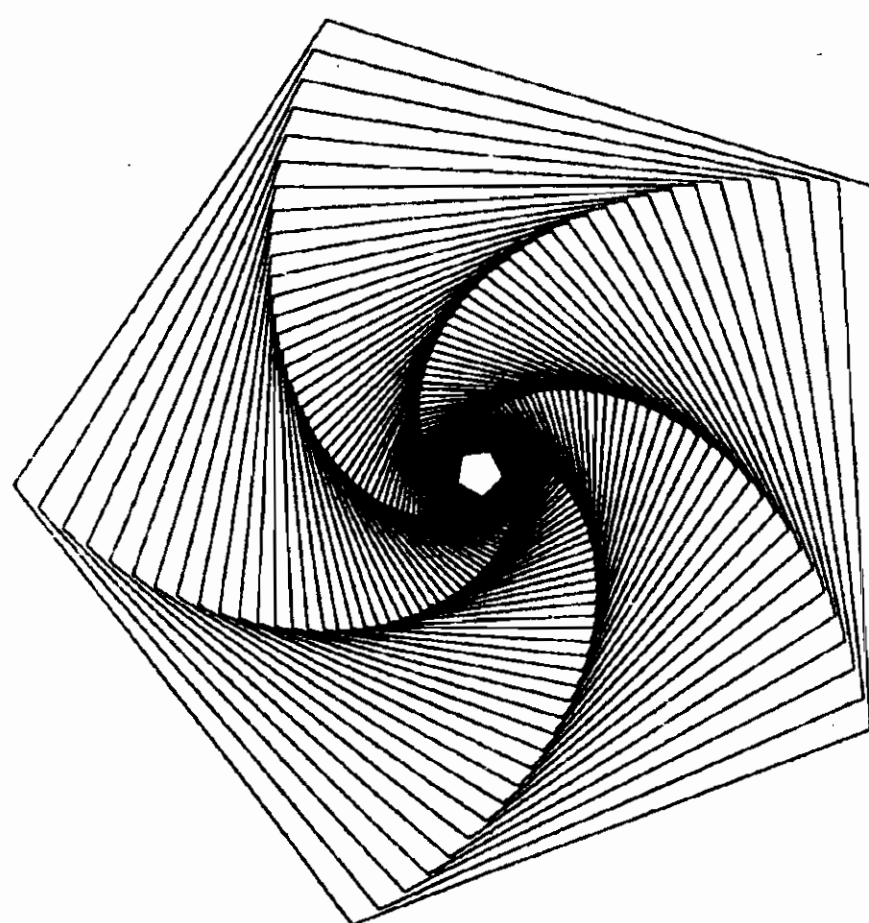


Figura 2.10: Costruzione di una spirale frattale

- E' possibile costruire un insieme di Koch che tende a ricoprire *alla Peano* un intero triangolo rettangolare isoscele.

L'inziatore è il solito segmento unitario. Si usano due segmenti ridotti di un fattore  $r = 1/\sqrt{2}$  (un piccolo errore nell'ultimo passo mostrato nella figura è stato introdotto per evidenziare l'evoluzione della curva e per evitare la sovrapposizione rigorosa dei diversi segmenti). Per ricoprire l'inziatore, si ottiene un *precurd* che è un triangolo rettangolo isoscele cui manca la base (vedi parte in alto a sinistra della fig. 2.11).

Si stabilisca *da che lato* si costruisce il triangolo -parte in alto a sinistra della fig. 2.11. La costruzione si complica molto presto. Il secondo passo porta ad una figura a forma di *uncino rovesciato* ottenuto con 4 segmenti ad angolo retto, risultato della copertura dei due lati del triangolo con le spezzate di 2 segmenti. Si noti che si è assunta una regola specifica per la ricopertura dell'inziatore: percorrendo la figura, i

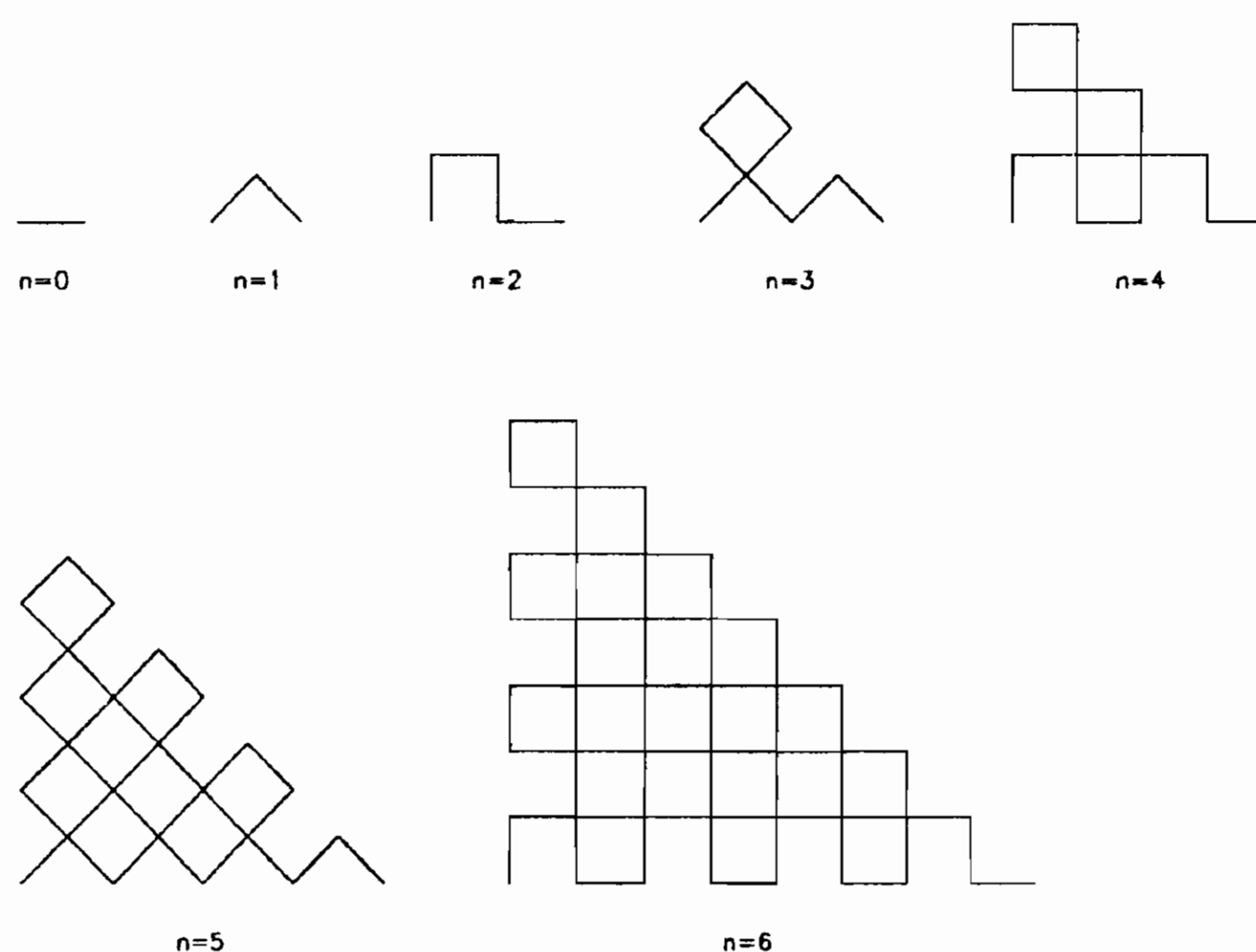


Figura 2.11: Costruzione di un insieme triangolare di Peano

lati del triangolo giacciono alternativamente sulla sinistra o sulla destra. Come si può notare dalla figura, questo alternarsi destra-sinistra avviene sia all'interno del singolo passo  $n$ , sia nell'applicare il generatore al primo segmento del passo  $n - 1$ . In tal modo, già al quinto passo è facile notare che l'insieme tende a ricoprire un triangolo retto isoscele appoggiato su un cateto.

Al fine di seguire meglio la costruzione, in fig. 2.11 la lunghezza dell'iniziatore è mantenuta costante e viene ingrandito il risultato di ogni passo successivo. Grazie al fattore di riduzione introdotto, nella parte bassa della figura non vi dovrebbero essere punti doppi. La curva è continua, costituita da una successione di triangolini. L'insieme frattale finale ha una dimensione  $D = -\log 2 / \log(1/\sqrt{2}) = 2$ : quindi è un insieme di Peano di dimensione  $D = 2$ .

## 2.7 La dimensione frattale di cluster

Nella definizione operativa di dimensione di Hausdorff e Besicovich si fa uso del *passo di approssimazione*  $\delta$  e si deve far tendere  $\delta$  a zero.

Nei sistemi fisici, invece, esiste sempre una lunghezza minima al di sotto della quale non ha senso andare a meno di non entrare in rotta

di collisione con le considerazioni di Jean Perrin che abbiamo segnalato nel par. 1.3. Ci riferiamo tipicamente al raggio  $r_o$  di un atomo o di una molecola.

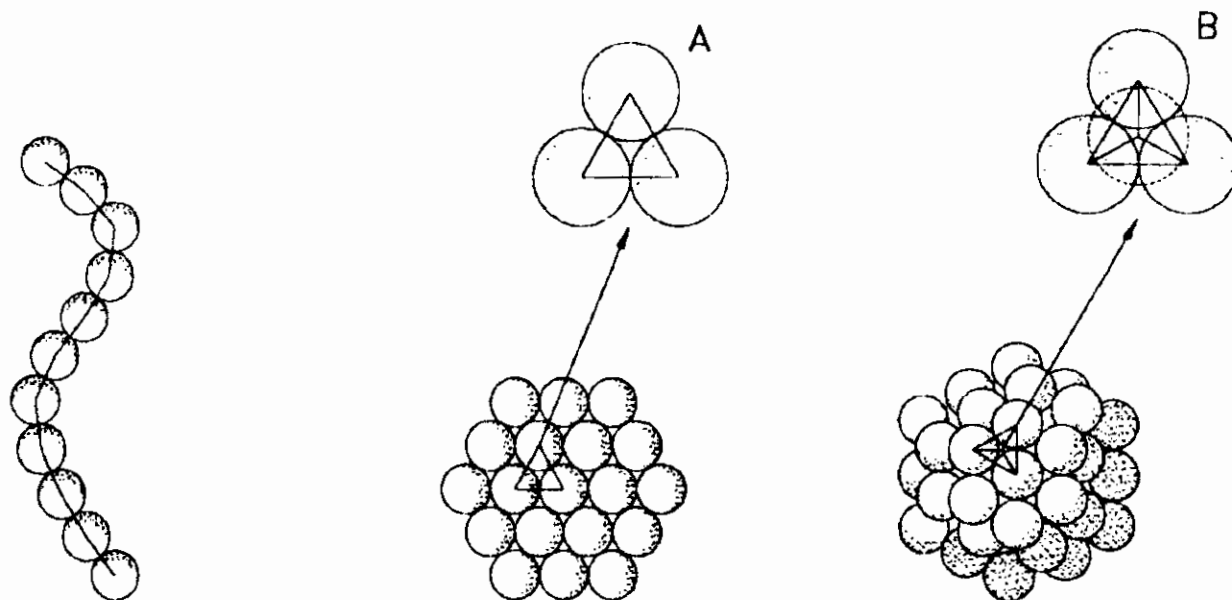


Figura 2.12: Esempi monomeri, aggregati e conglomerati

Le idee frattali elaborate fin qui possono pertanto applicarsi a sistemi fisici usando qualche precauzione. Per esempio, i monomeri, costituiti da una *collana* di atomi adiacenti (fig. 2.12a), possono sostituire una linea geometrica; gli aggregati molecolari possono sostituirsi alle superfici (fig. 2.12b) o i conglomerati di atomi (fig. 2.12c) ai volumi.

Invece di usare come *passo di approssimazione* una lunghezza, possiamo usare come *indice di approssimazione* il numero di atomi -per semplicità sferici- considerati nello specifico caso.

Il numero di sfere di raggio  $r_o$  con cui è costituito il monomero lungo  $L = 2R$  (*Cluster* monodimensionale) è ovviamente:

$$N = \left(\frac{R}{r_o}\right)^1$$

Il numero di sfere di raggio  $r_o$  con cui è costituito un aggregato iscritto in un disco di raggio  $R$  (*Cluster* bidimensionale) è:

$$N = \rho \left(\frac{R}{r_o}\right)^2$$

Il numero di sfere di raggio  $r_o$  con cui è costituito un aggregato iscritto in una sfera di raggio  $R$  (*Cluster* tridimensionale) è:

$$N = \rho \left(\frac{R}{r_o}\right)^3$$

dove  $\rho$  è una funzione adimensionale che ovviamente dipende dalla forma della superficie.

Dalle fig. 2.12a-c, appare evidente che le molecole sferiche, mentre possono coprire una linea, toccandosi alle estremità del loro diametro, non possono coprire completamente una superficie o riempire completamente un volume. In dettaglio:  $\rho = \pi/4$  per un quadrato;  $\rho = \pi/2\sqrt{3}$  per un cerchio e  $\rho = \pi/3\sqrt{2}$  per una sfera.

In queste condizioni, non ha significato fare tendere a zero il *passo di approssimazione* quanto piuttosto fare tendere all'infinito il numero  $N$ . Possiamo allora generalizzare la relazione tra il numero di particelle contenute nel cluster di raggio  $R$  e la estensione del cluster stesso, misurato ricoprendolo con le particelle di raggio  $r_o$  nel modo seguente:

$$N = \rho \left( \frac{R}{r_o} \right)^{D_c} \quad N \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

Il parametro  $D_c$  è detto *dimensione frattale di cluster*.

Poichè in moltissime applicazioni fisiche ogni monomero possiede la stessa massa, nei modelli  $N$  assume il significato di massa del sistema e  $\rho$  quello di densità. Pertanto  $D_c$  definita nel contesto dei clusters assume anche il nome di mass dimension o dimensione di massa.

I valori della densità  $\rho$  elencati in questo paragrafo si ottengono supponendo di riempire il cluster con particelle accatastate casualmente. Chiaramente, se cambia la forma del cluster, cambia il valore di  $\rho$ . Per un elissoide di rotazione di rapporto  $b/a$ , e per un riempimento casuale è  $\rho = b/a\pi3\sqrt{2}$ . Va sottolineato che la dimensione di cluster non dipende peraltro dalla particolare forma del cluster o dalle modalità eventualmente utilizzate per il riempimento del cluster. Inutile ribadire che la dimensione  $D_c$  di un insieme di particelle di un cluster frattale deve essere *non intera*.

Per illustrare questo punto particolare, ritorniamo alla curva triadica di Koch e *costruiamo* la dimensione di cluster di una tale curva: prendiamo cioè un monomero che contenga il generatore della curva di Koch, riempiamo un cerchio e determiniamo  $D_c$ . Abbiamo detto

che  $D_c$  non dipende dalle *modalità* seguite per il riempimento del cluster. La curva triadica di Koch è costruita ricoprendo un trattino unitario mediante 4 trattini lunghi  $1/3$ . Costruiamo allora il monomero racchiudendo il prefrattale usato nel par. 2.7 in un cerchietto di raggio  $r_o$  e sviluppiamo l'insieme di Koch secondo la procedura là illustrata, fino a riempire in cluster di raggio  $R$  come illustrato in fig. 2.13. Invece di *rimpicciolire i trattini*, qui ingrandiamo la figura facendo crescere un aggregato di monomeri.

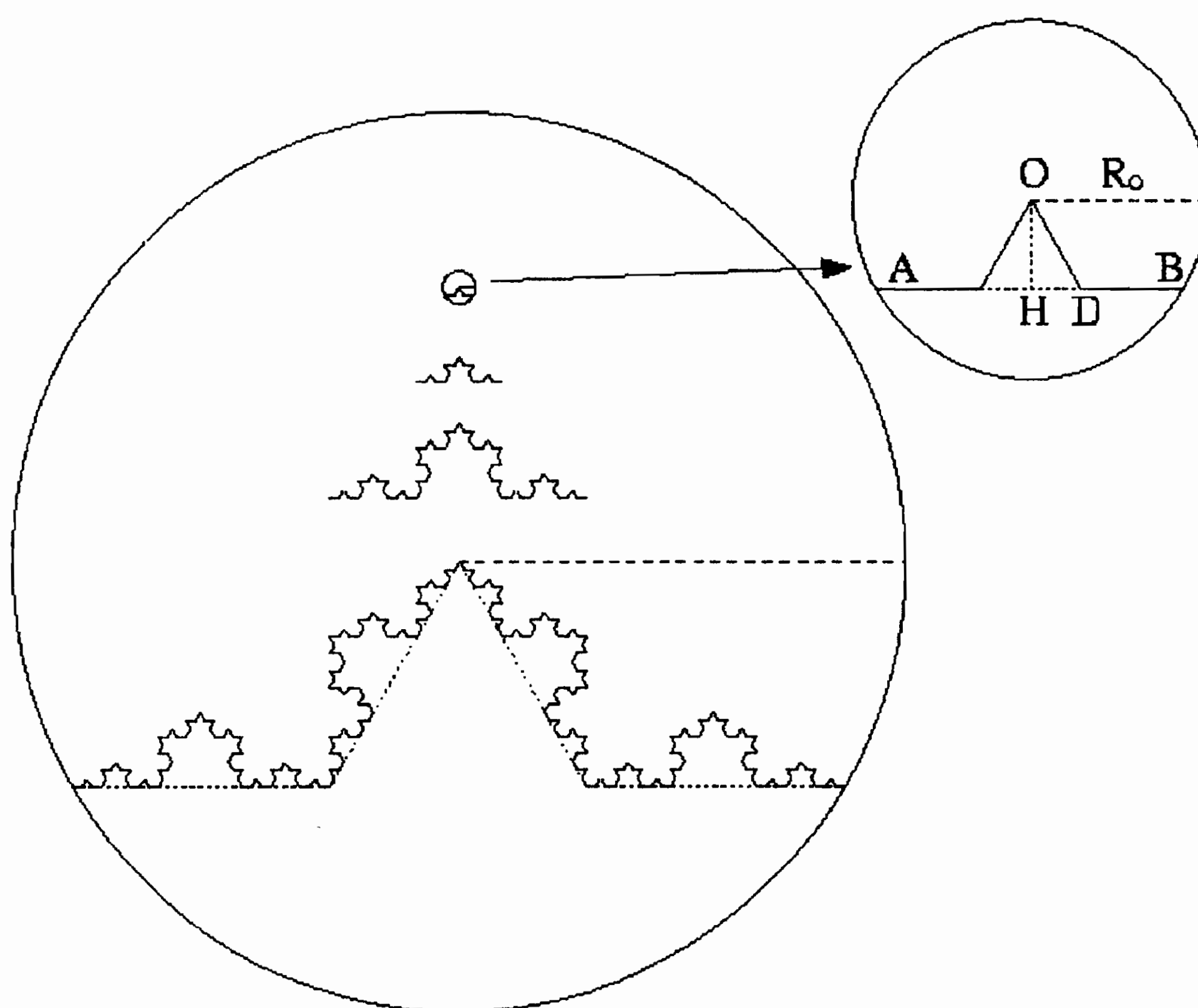


Figura 2.13: Costruzione di un cluster triadico di Koch.

Il raggio del monomero è  $R_o = 1/\sqrt{3}$ <sup>3</sup> contiene 4 trattini lunghi  $1/3$  e costituisce un tutt'uno; il monomero è il *cluster minimo* o, se vogliamo la particella di partenza per far crescere l'aggregato di monomeri fino a

<sup>3</sup>Dal generatore (cerchio ingrandito in figura 2.13) si ricavano due triangoli rettangoli  $OHD$  e  $OHB$ . Ora:  $HD = 1/6$  e  $DB = 1/3$  per cui  $BH = 1/2$ . Dal triangolino  $OHB$ ,  $OH = \sqrt{3}/6$ ; Dal teorema di Pitagora:  $R_o^2 = OB^2 = OH^2 + BH^2 = 3/36 + 1/4 = 12/36$ .

costruire il cluster di raggio generico  $R$ . Il prossimo insieme è racchiuso in un cerchio di raggio  $R = 3R_0$  e contiene 4 *monomeri*; nella generazione successiva vi sono  $N = 4^2$  monomeri in un cluster di raggio  $R = 3^2R_0$ . Nella  $n$ -esima generazione vi sono  $N = 4^n$  monomeri in un cluster di raggio  $R = 3^n r_0$ , da cui segue immediatamente che la cluster dimension  $D_c$  coincide con la dimensione frattale di Hausdorff e Besicovich.

Ancora una volta non si usa il simbolo  $D_c$ , ma si indica semplicemente con  $D$  anche la cluster dimension o dimensione di massa.

La dimensione frattale di massa o di cluster fornisce pertanto una misura di *come* il cluster riempie lo spazio che occupa. E' molto usato nello studio di *processi di aggregazione a diffusione limitata* (in inglese DLA ) nei quali monomeri possono diffondere in modo casuale con processi di random walk. Tipici studi sono stati condotti nel campo della crescita di strati metallici nella elettrodeposizione di zinco all'interfaccia tra soluzione acquose di solfato di zinco e n-butyl acetato[18], nel campo delle soluzioni colloidali di oro e silicio.

Cantor e Koch "generalizzati" Nel par. 2.4 abbiamo visto cos'è e come si può costruire l'insieme triadico di Cantor. Appare chiaro che l'iniziatore può essere segmentato in più di tre parti uguali e sottrarne più di una dal generatore. Quindi si possono costruire polveri di Cantor con qualsiasi dimensione  $D$  nell'intervallo  $0 < D < 1$ . Come esempio vengono mostrate in fig. 2.14 due differenti costruzioni che hanno entrambe  $D = 1/2$ .

I due insiemi "sembrano" differenti nonostante abbiano la stessa dimensione frattale; essi hanno una differente *lacunarità*<sup>4</sup>.

Vediamo ora cosa accade se i due segmenti nel generatore triadico di Cantor non sono più identici. In fig. 2.15 abbiamo disegnato la barra di Cantor che si ottiene quando la prima sezione ha lunghezza  $1/4$  mentre la seconda ha lunghezza  $2/5$ . Valutiamo la dimensione frattale di questo semplice insieme di Cantor  $S$ . L'insieme frattale  $S$  può essere ricoperto da un certo numero  $N$  di segmenti disgiunti  $S_1, S_2, \dots, S_N$ .

---

<sup>4</sup>La definizione è di Mandelbrot (1982)

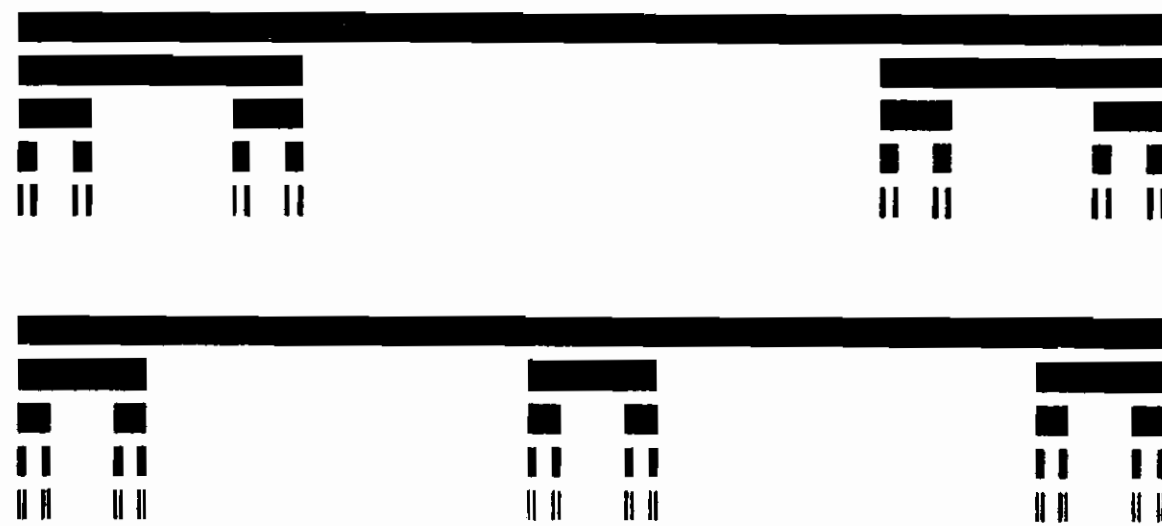


Figura 2.14: Due costruzioni dell'insieme di Cantor con  $D = \frac{1}{2}$ . Nella figura in alto si è usato  $N = 2$  e  $r = 1/4$ , mentre per quella in basso  $N = 3$  ed  $r = 1/9$ .

Sia la lunghezza euclidea (diametro) dell' $i$ -esimo insieme  $l_i$  cosicchè  $S_i$  si inserisca in un (iper)cubo di lato  $l_i$ . Scegliendo una partizione tale che  $l_i \leq \delta$  la dimensione  $D$  secondo Hausdorff e Besicovitch sarà:

$$M_d = \sum_{i=1}^N l_i^d \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & d > D; \\ \infty, & d < D. \end{cases} \quad (2.24)$$

La dimensione critica  $d = D$  ottenuta nel limite in cui  $\delta \rightarrow 0$  rappresenta la dimensione frattale dell'insieme. Notiamo che questa coincide con la dimensione di scaling la cui definizione è stata data da Mandelbrot per le curve di Koch. La dimensione di similarità  $D_s$  per un insieme di questo tipo soddisfa anche:

$$\sum_{i=1}^N r_i^{D_s} = 1. \quad (2.25)$$

A titolo di esempio si consideri l'insieme di Cantor costruito come mostrato in fig 2.15. Nella  $n$ -esima generazione ci sono  $N = 2^n$  segmenti. Il segmento più corto ha una lunghezza  $l_1^n = (1/4)^n$  ed il più lungo ha lunghezza  $l_2^n = (2/5)^n$ . Ci sono in generale  $\binom{n}{k} = n!/k!(n-k)!$  segmenti con una lunghezza  $l_1^k l_2^{n-k}$ , con  $k = 0, 1, \dots, n$ . Nella  $n$ -esima generazione la misura  $M_d$  è data da

$$M_d = \sum_{i=1}^N l_i^d = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} l_1^{kd} l_2^{(n-k)d} = (l_1^d + l_2^d)^n. \quad (2.26)$$



Figura 2.15: Costruzione di un insieme di Cantor generalizzato.

Quindi se  $n$  crescesse all'infinito di modo che  $\delta = l_2^n$  tenda a 0,  $M_d$  rimarrebbe finita se e solo se  $d = D$ , dove  $D$  soddisfa l'equazione  $(l_1^D + l_2^D) = 1$ . Una soluzione necessariamente numerica di questa equazione con i valori di cui sopra è stata calcolata essere  $D = 0.6110$ .

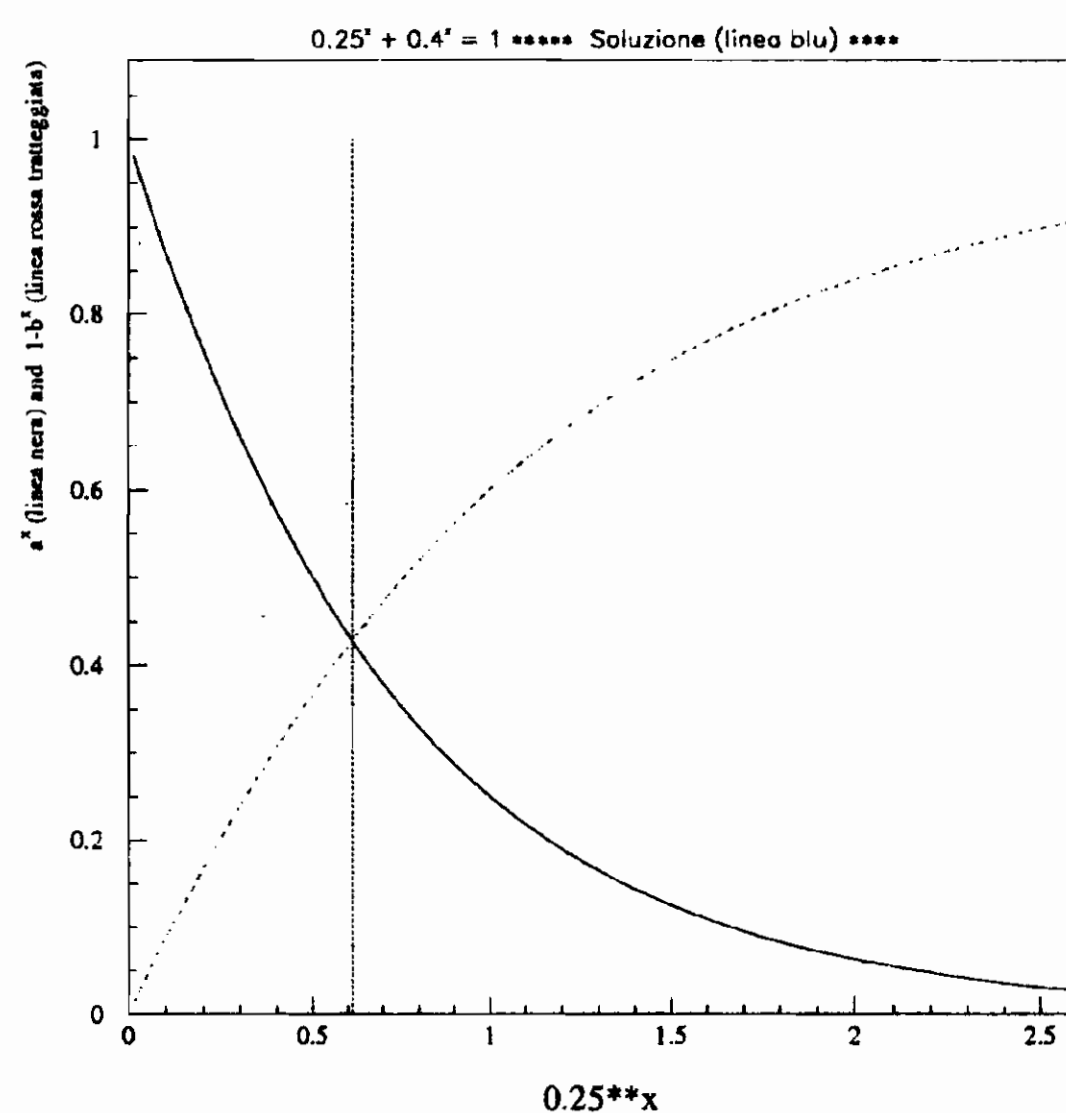


Figura 2.16: Soluzione grafica di  $(l_1^D + l_2^D) = 1$ .

Analogamente è altresì possibile generalizzare le curve di Koch ed ottenere quindi frattali di una qualsiasi dimensione superiore ad 1. Per costruire il generatore ci si dovrà ora avvalere di un numero di segmenti superiore a quello ottenuto frammentando il generatore. Questa procedura è già stata usata per la costruzione della curva quadratica di Koch (cfr. 2.6 e fig. 2.9). È importante notare che, analogamente a quanto detto riguardo alle polveri di Cantor, la dimensione frattale non basta a definire univocamente una curva in quanto gli stessi segmenti



possono essere combinati fra loro fino ad ottenere generatori -e quindi- frattali- molto diversi gli uni dagli altri. A titolo di esempio si confronti fig. 2.9 con fig. 2.17 costruita con gli stessi segmenti ed orientandoli in maniera differente.

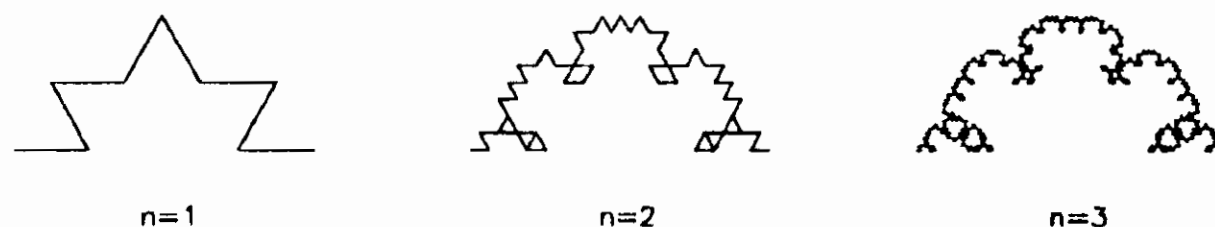


Figura 2.17: Curva di Koch generalizzata di dimensione  $3/2$ .

## 2.8 Insiemi di Minkowsky

All'inizio del secolo, quando ancora non si sapeva come trattare funzioni molto frastagliate, era uso "appiattare" le curve secondo un procedimento suggerito da Minkowsky. La procedura è alquanto semplice, in quanto consta in costruire una copertura della curva in esame utilizzandone i punti come centri di una famiglia di cerchi di raggio arbitrario  $\epsilon$ . La figura risultante (fig. 2.18), detta "contenuto di Minkowsky" o anche "salsiccia di Minkowsky" risulterà approssimativamente seguire l'andamento della curva sotto studio, senza però mantenerne le discontinuità. L'ovvio

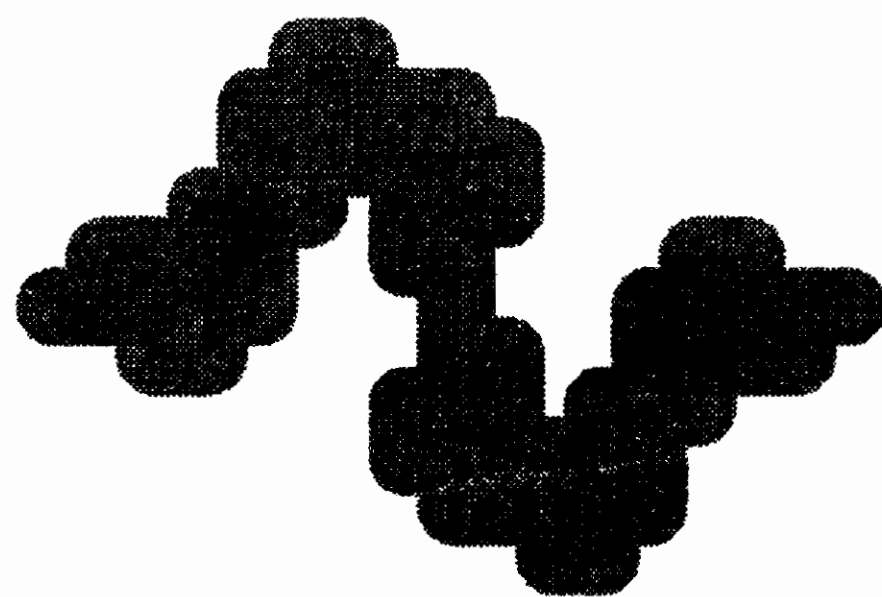


Figura 2.18: Insieme di Minkowsky.

limite di questa procedura sta nella scelta del raggio  $\epsilon$ , in quanto questa rappresenta la massima precisione della salsiccia nel seguire l'andamento della curva; eventuali strutture di dimensione caratteristica inferiore a  $\epsilon$

andrebbero sicuramente perse. Gli insiemi di Minkowsky sembrano offrire quindi soltanto una soluzione semplicistica e inaccurata alla trattazione di strutture complesse quali quelle dei frattali; questo, grazie al lavoro di Bouligand, non è corretto. Utilizzando la procedura di copertura e definendo l'area ad essa associata come  $F(\epsilon)$ , nel limite di  $\epsilon \rightarrow 0$  si avranno delle sorprese. Per una curva "liscia" il limite della funzione  $F(\epsilon)/2\epsilon$  sarà la lunghezza della curva, mentre per una curva frattale la funzione può anche divergere. La caratteristica veramente interessante è che la funzione  $F(\epsilon)/2\epsilon$  risulta essere proporzionale a  $\epsilon^{1-D_m}$  e quindi diverge per  $D_m > 1$ . Il valore di  $D_m$  che regola questa esplosione viene definito come dimensione di Mikowsky-Bouligand, questa viene definita da:

$$D_m = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log F(\epsilon)}{\log 1/\epsilon} + 2 ; \quad (2.27)$$

a patto che il limite esista. Per una curva liscia  $F(\epsilon)$  risulta proporzionale a  $\epsilon$  e quindi  $D_m = 1$ . Si pensa che per funzioni strettamente autosimili la dimensione di Minkowsky-Bouligand coincida con la dimensione di Hausdorff e che qualora questa uguaglianza non valga  $D_m$  sia maggiore di  $D$ . Questa definizione di dimensione risulta particolarmente utile in una interessante estensione della formula di Weyl per calcolare i modi normali di vibrazioni di cavità risonanti, estensione che permette di abbandonare la richiesta di avere cavità lisce.

## 2.9 Frattali autoinversi

Le considerazioni riguardanti i frattali più semplici possono far pensare a due limitazioni concettuali:

- che il frattali debbano ridursi ad obbedire rigidamente sia alle proprietà di autosomiglianza che alle proprietà di scaling;
- che i frattali debbano tendere ad occupare tutto il volume a disposizione.

Invece non è così. I frattali hanno ben più ampie possibilità; il fatto è che per comprenderne compiutamente il concetto occorre -in un certo senso- contrastare decisamente il concetto di linea retta e giungere a proporre, come contraltare, il concetto di *frattale lineare*. Inoltre, si possono immaginare moltissimi modi per inventare un insieme frattale.

Facendo mente locale, le trasformazioni lineari lasciano invariati i frattali che godono della proprietà dello scaling; tuttavia, per generarli occorre non solo specificare il trema generatore ma anche diverse altre regole (il lettore veda la costruzione delle curve di Koch, par. 2.7). Per contro, il fatto che un frattale sia generabile da una trasformazione non lineare può a volte essere sufficiente a specificare, e quindi a generare, la forma di una figura. In aggiunta, come vedremo, molti insiemi frattali non lineari risultano limitati geometricamente in una area -o iperarea-  $\Omega < \infty$ .

Si possono, per esempio, inventare frattali che siano invarianti, non per similitudine, bensì per inversione geometrica e per quadratura.

I primi frattali autoinversi furono introdotti da Henri Poincaré e Felix Klein[19] attorno al 1880 poco dopo la scoperta fatta da Weierstrass della funzione dovunque continua ma mai differenziabile (di cui tratteremo ampiamente nel par. 3.5), quasi contemporaneamente alla scoperta dell'insieme di Cantor e ben prima delle scoperte di Peano e di Koch. Per ironia della sorte -dice Mandelbrot- gli *scaling fractals* furono sempre considerati come stranezze e mostri matematici, mentre i frattali autoinversi godettero, per un certo periodo di tempo nell'Ottocento, della attenzione dei matematici nell'ambito delle teorie delle funzioni automorfe.

La forma più semplice della geometria euclidea, dopo la linea è indubbiamente il cerchio e tra le sue proprietà sono conservate non soltanto sotto una trasformazione di similitudine, ma anche sotto una trasformazione di inversione.

Richiamiamo pertanto la definizione di un'inversione geometrica:

**DEF:** dato un cerchio  $C$  di origine  $O$  e raggio  $R$ , l'inversione rispetto a  $C$  trasforma ogni punto  $P$  in un punto  $P'$  tale che:

- i due punti  $P$  e  $P'$  giacciono sulla medesima semiretta uscente da  $O$ ;
- le distanze  $|OP|$  ed  $|OP'|$  soddisfano alla relazione:

$$|OP||OP'| = R^2$$

(da cui l'idea della inversione  $|OP'| = R^2/|OP|$ ).

Data questa definizione, un secondo cerchio  $Q$  la cui circonferenza di bordo contiene  $O$  viene *invertito* in una retta che *non* contiene  $O$  (vedi fig. 2.19). Cerchi interni a  $C$  ma non contenenti  $O$  vengono mappati in altri cerchi disgiunti da  $C$  e viceversa (fig. 2.19b) mentre cerchi interni a  $C$  e contenenti  $O$  vengono invertiti in cerchi che contengono  $C$  e viceversa (fig. 2.19c). Analogamente cerchi intersecanti la circonferenza di bordo di  $C$  verranno invertiti in altri cerchi intersecanti (fig. 2.19d). Infine cerchi *ortogonali* (cioè con tangente nei punti di intersezione perpendicolare alla tangente del cerchio di inversione  $C$ ) e rette passanti per  $O$  risultano invarianti per inversioni rispetto a  $C$  (fig. 2.19e-f).

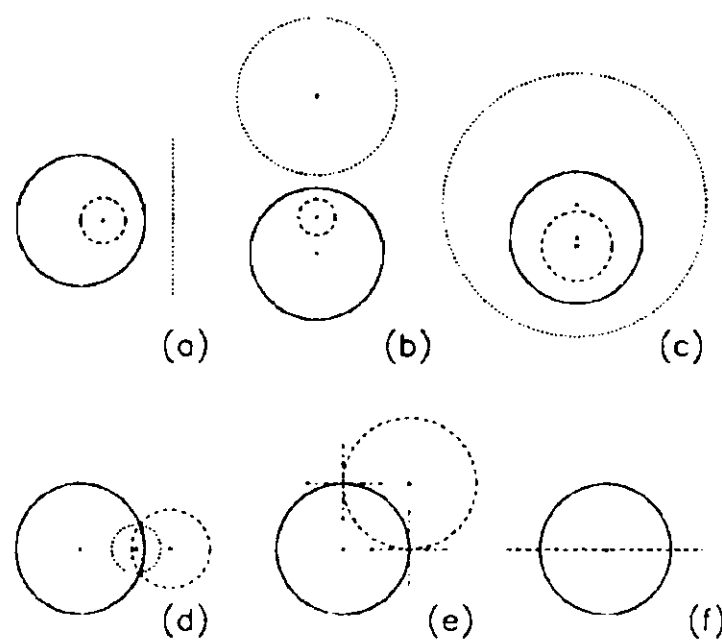


Figura 2.19: Esempi di autoinversioni di cerchi

## 2.10 Insiemi di Mandelbrot-Given e di Sierpinski

Il concetto di autosomiglianza o autosimilarità non può applicarsi in modo rigoroso ad un solo tratto. Infatti, se il segmento  $S'$  ottenuto da quello originale  $S$  viene traslato, esso non coincide più con il segmento originale. A rigore si dovrebbe parlare di “autoaffinità”. Tuttavia questa è una questione semantica. Qui autosomiglianza sta a significare che una curva costruita con i segmentini  $S'$  è “sostanzialmente identica” all’insieme  $S$  ed il concetto si mostra molto utile.

Anche per l’insieme di Cantor occorre estrapolare la procedura seguita estendendo l’insieme e coprire l’insieme  $[0, 3]$  di un generatore mediante 2 insiemi di Cantor che coprano gli intervalli  $[0, 1]$  e  $[2, 3]$ . Ripetendo la procedura si può generare un insieme autosomigliante sulla semiretta  $[0, \infty]$ . Il fattore di scala è anche in questo caso  $p = 1/3$  e ci servono  $N = 2$  segmenti per coprire l’insieme originale. Questa dimensione di similarità è facile da determinare per diversi frattali ottenuti come varianti della costruzione di Koch. Consideriamo per esempio la curva di fig. 2.20, detta curva di Mandelbrot-Given. Il generatore per questa curva divide il segmento iniziatore in 3 pezzi di lunghezza  $r = 1/3$  e aggiunge un *loop* fatto di tre pezzi, a cui vengono aggiunti due rami (si noti che, per chiarezza di figura, i segmenti componenti il generatore di fig. 2.20 non sono tutti di lunghezza uguale).

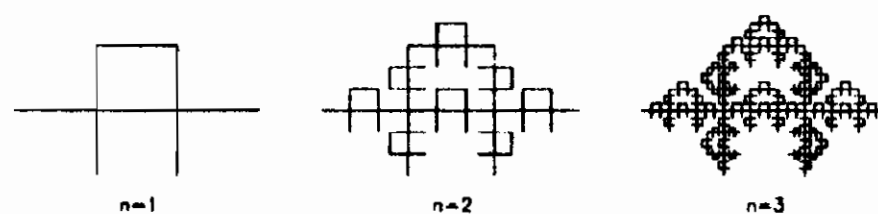


Figura 2.20: La curva di Mandelbrot-Given.

Quello in fig. 2.20 è solo un esempio di base, poichè è possibile considerare *loops* e rami di qualsiasi dimensione e tipo. Gli stessi possono essere corredati di ulteriori *loops* e rami. Nel nostro caso ad ogni generazione ogni segmento viene sostituito con  $N = 8$  segmenti scalati di un rapporto  $r = 1/3$  rispetto alla generazione precedente.

Usando l'espressione (2.22) per la dimensione di similarità possiamo concludere che la dimensione della curva di Mandelbrot-Given è di  $D = \log(8)/\log(3) = 1.89$ .

Supponiamo ora che la curva sia fatta di un materiale elettricamente conduttore in modo che la corrente possa fluire da un capo all'altro da sinistra a destra. Chiaramente non ci sarebbe nessun passaggio di corrente nelle ramificazioni ottenute dai due rami del generatore. La dimensione frattale di questa curva è  $D_B = \log(6)/\log(3) = 1.63$  dal momento che il generatore rimpiazza ogni segmento con  $N = 6$  segmenti scalati di un fattore  $r = 1/3$ .

La curva di Mandelbrot-Given contiene molte caratteristiche geometriche interessanti che non si colgono dalla sua dimensione frattale. Infatti da essa possono essere derivati molti sottoinsiemi altrettanto frattali. Il concetto di sottoinsieme frattale verrà affrontato più esaurientemente più avanti.

Un'altra costruzione che crea curve con *loops* di tutte le dimensioni è il cosiddetto *triangolo di Sierpinski* mostrato in fig. 2.21 ([11] e [12]).

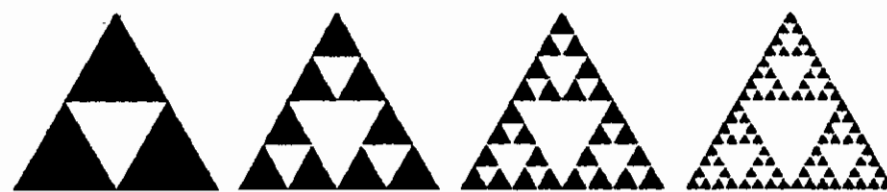


Figura 2.21: Triangolo di Sierpinski.

Ad ogni applicazione del generatore un triangolo viene riempito con 3 triangoli scalati di un fattore  $r = 1/2$  e quindi la (2.22) ci dice che la dimensione frattale della curva è  $D = \log 3/\log 2 = 1.58$ . Una curva simile, per costruzione, alla precedente è il tappeto di Sierpinski mostrato in fig. 2.22.

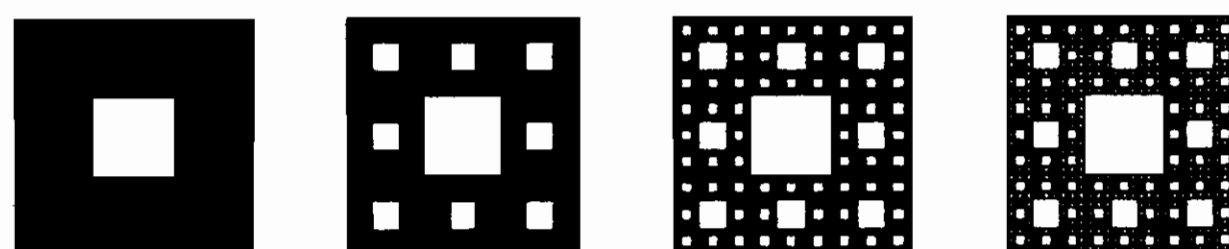


Figura 2.22: Tappeto di Sierpinski.

Le curve di Sierpinski sono state usate come modello per molti fenomeni fisici. Nel 1980 Gefen e altri ([13]) hanno eseguito il primo studio sistematico dei fenomeni critici che avvengono in prossimità della transizione di fase nei sistemi di spin con reticoli di frattali autosimilari. In un interessante esperimento Gordon et al. ([14]) hanno misurato la temperatura  $T_c(H)$  della transizione di fase superconduttività-normalità in funzione del campo magnetico  $H$  applicato su di un film di alluminio con la struttura di 10<sup>a</sup> generazione della curva di Sierpinski. La temperatura  $T_c(H)$  limite è una curva frattale autosimile e l'accordo con le previsioni teoriche è ottimo.

## 2.11 Frattali veri: automobili ad idrogeno

Da quanto esposto fino ad ora, il frattale potrebbe sembrare, ancora, come un concetto astratto e sfuggente, frutto più della esuberanza intellettuale di Mandelbrot che della necessità di rapportarsi alle richieste della vita quotidiana. Invece, i frattali presentano applicazioni altrimenti impensabili; un esempio concreto risulta particolarmente illuminante in quanto mostra come i frattali potrebbero, in un futuro non molto lontano, contribuire a risolvere il problema delle emissioni inquinanti da parte degli autoveicoli.

Teniamo conto, infatti che nel mondo circolano circa 750 milioni di automezzi i quali rilasciano nell'aria, ogni anno, 4 miliardi di tonnellate di anidride carbonica, pari al 15% di tutta quella prodotta annualmente dall'uomo sulla Terra. Spinti, oltre che dalla crescente coscienza ecologica, pure da altri fattori quali la necessità di abbattere le emissioni di sostanze direttamente nocive per inalazione (ossidi di azoto e speciali particolati), la diminuzione delle riserve di petrolio e la loro localizzazione in regioni sempre più instabili a livello politico, alcuni costruttori mondiali hanno dato il via negli ultimi anni a numerosi progetti finalizzati alla produzione di veicoli non inquinanti (Zero Emission Cars).

Una delle soluzioni più promettenti del momento è costituita dalle

macchine ad idrogeno. Alcuni ostacoli ne stanno però rallentando la diffusione: in particolare gli elevati costi di esercizio, il peso ed il volume eccessivi delle celle ad idrogeno, la mancanza di una capillare rete di distribuzione di questo combustibile e i problemi di sicurezza legati al suo uso.

Un modo per superare tali impedimenti potrebbe essere quello di costruire macchine leggere e compatte che richiedano al più 20 kilowatt di potenza. Tuttavia, una vettura di questo tipo, dal peso ipotetico di una tonnellata, pur potendo raggiungere comodamente una velocità massima di  $120 \text{ Km/h}$ , impiegherebbe almeno 30 secondi per passare da 0 a  $100 \text{ Km/h}$ , cosa chiaramente inaccettabile nel traffico extraurbano.

Le prestazioni dei veicoli ad idrogeno possono, teoricamente, essere migliorate, sempre rispettando l'ambiente, mediante l'uso di supercondensatori (electrochemical double layer capacitors, ELDC) in grado di agire come riserva di potenza da sfruttare alla bisogna. Così facendo, per esempio, invece di dover costruire un motore ad idrogeno costretto ad erogare una potenza massima di  $73 \text{ Kw}$  ( $100 \text{ CV}$ ), valore adeguato per velocità ed accelerazioni soddisfacenti, ci si potrebbe limitare ad una potenza media di  $20 \text{ Kw}$  con i supercondensatori che contribuiscono, per periodi limitati di tempo, a fornire i rimanenti  $53 \text{ Kw}$ . Si noti che una ipotetica fornitura di  $53 \text{ Kw}$  per  $15 \text{ s}$  comporterebbe un assorbimento di energia in fase di ricarica (dei supercondensatori) di soli  $220 \text{ Wh}$  per un costo non superiore ad alcuni centesimi di Euro. Ci si può chiedere se le batterie al piombo potrebbero essere usate al posto dei supercondensatori. Da un punto di vista puramente teorico la risposta sarebbe affermativa, tuttavia due notevoli limitazioni ne impediscono l'uso pratico. In primo luogo, sebbene una normale batteria da  $12 \text{ V}$  e  $60 \text{ A}$  sia in grado di immagazzinare un'energia di  $720 \text{ Wh}$ , la corrente non supererebbe mai i  $150 \text{ A}$  limitando la potenza disponibile a soli  $1.8 \text{ Kw}$ , molto minori dei  $53 \text{ Kw}$  richiesti. In secondo luogo, pur essendo le reazioni chimiche nella batteria idealmente reversibili, si assiste dopo alcune centinaia di cicli di carica-scarica ad una diminuzione delle



prestazioni dell'accumulatore a seguito del progressivo degradamento dell'elettrodo di  $PbSO_4$ .

Nei condensatori normali l'energia è immagazzinata mediante un processo puramente fisico che non coinvolge trasformazioni chimiche, per cui il numero dei cicli di carica-scarica non influisce sulla durata della loro vita. Il valore della loro capacità è però troppo basso; si va dai  $10^{-12}$   $\mathcal{F}$  dei condensatori per tecnologie di alta frequenza (TV, Radio, PC) ai  $10^{-9}/10^{-6}$   $\mathcal{F}$  dei condensatori per applicazioni di bassa frequenza ai  $10^{-3}/1$   $\mathcal{F}$  di quelli usati negli alimentatori in tensione continua. Ricordando ora che, per un generico condensatore, la capacità  $C$  ( $\mathcal{F}$ ) e l'energia immagazzinata  $E$  ( $Ws$ ) sono fornite dalle note relazioni<sup>5</sup>:

$$C = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{A}{d}$$

$$E = \frac{1}{2} C \Delta V^2$$

nel caso di un condensatore elettrolitico da  $2\mathcal{F}$  la massima energia immagazzinabile è di circa  $4 Ws$  ( $0.001 Wh$ ). Pesando ogni elemento di questo tipo circa  $20$  g, sarebbero necessarie ben  $4$  tonnellate di condensatori per ottenere  $220 Wh$ .

### 2.11.1 Un'audace proposta

Nel 2001, al Paul Scherrer Institute di Villigen (Zurigo), Rudiger Kotz ed il suo gruppo di ricerca[20] hanno sviluppato, analizzandone le proprietà frattali, un nuovo tipo di elettrodo il cui uso ha permesso la costruzione di supercondensatori da  $1600 \mathcal{F}$  con tensioni massime applicate pari a  $2.5$  Volts. Tali elementi, pur pesando solo  $320$  g e presentando una lunghezza ed un diametro di soli  $14$  cm e  $5$  cm, rispettivamente, possono immagazzinare ben  $5000$  J cioè  $1.4 Wh$ . Per assorbire  $220 Wh$  sono necessari  $160$  elementi per un peso complessivo di soli  $50$  Kg, pari a

---

<sup>5</sup> $A$  = superficie degli elettrodi ( $m^2$ ),  $d$  = distanza tra gli elettrodi,  $\Delta V$  = tensione applicata,  $\epsilon_0$  = costante dielettrica del vuoto =  $8.85 \times 10^{-12} \frac{\mathcal{F}}{m}$ ,  $\epsilon_r$  = costante dielettrica relativa

due normali valigie. In realtà, a causa delle elevate correnti alle basse tensioni, il supercondensatore viene fatto operare a tensioni comprese tra il 50% ed il 100% della tensione massima applicabile. Ciò comporta una diminuzione dell'energia immagazzinabile a circa il 75% del valore massimo e la necessità di usare non più solo 160 ma 250 elementi. Conseguentemente il peso aumenta da 50 Kg a 100 Kg, valore tuttavia ancora ampiamente accettabile.

Come è noto dall'elettrostatica, la capacità di un condensatore è determinata dalle sue dimensioni geometriche e dalla costante dielettrica del materiale posto tra gli elettrodi. Per aumentare la componente geometrica si può accrescere l'area della superficie degli elettrodi arrotolando, su se stesse, lunghe lamine di materiale conduttivo e diminuendo, il più possibile, lo spessore del materiale isolante (ad alto  $\epsilon_r$ ) posto tra di essi. I condensatori cilindrici di questo tipo presentano capacità di circa  $1 \mu\mathcal{F}$  che consentono, in presenza di una tensione di  $1000 V$ , di assorbire al più  $0.05 Ws$  di energia.

Un'altra possibilità per aumentare la capacità è quella di rimpiazzare uno dei due elettrodi con un elettrolita liquido (pasta conduttiva) al fine di ottenere un contatto diretto (su scala atomica) con la superficie dell'altro. Un sottilissimo strato di ossido sulla superficie di questo ultimo funge da isolatore ingenerando una separazione tra elettrodo metallico e gel conduttivo dell'ordine del *micron*. Caratterizzati da una capacità di circa  $1 m\mathcal{F}$ , questi condensatori, detti elettrolitici, possono immagazzinare alcuni *Wattsec* per tensioni variabili tra i  $20 V$  e i  $40 V$ .

### 2.11.2 I supercondensatori frattali

L'ulteriore impossibilità ad aumentare l'area degli elettrodi e diminuire la separazione tra essi sembrò, nei primi anni '90, porre un limite invalicabile alla costruzione di condensatori compatti con capacità superiori ai  $10/20 \mathcal{F}$ . La geometria frattale ha invece aperto, in questi ultimi anni, scenari del tutto inaspettati. Sfruttando la possibilità, da essa fornita, di incrementare le superfici elettrodiche di oltre 100000 volte, sono stati

costruiti condensatori elettrolitici compatti e relativamente maneggevoli con capacità di 1000  $\mathcal{F}$  e più.

La spinta a tale successo è venuta dalla misura della dimensione frattale della superficie degli elettrodi usati, fino a quel momento, nei condensatori tradizionali. Qui vogliamo illustrare brevemente il metodo ed i risultati. La superficie degli elettrodi viene messa in rilievo ponendo minuscole particelle di fuliggine (carbone) a contatto diretto con la loro sottile lamina metallica. Effettuando una microfotografia di una sezione trasversale dell'elettrodo, come quella riportata in fig.2.23, si nota che le particelle di carbone generano, da entrambi i lati della lamina metallica una complessa figura frattale. La figura frattale ottenuta

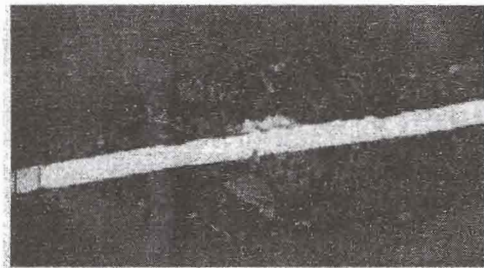


Figura 2.23: microfotografia della sezione trasversale dell'elettrodo di un supercondensatore dopo trattamento con particelle di carbone. La regione di colore bianco è solamente una parte della sezione della sottile lamina metallica elettrodica spessa 30 *micron*, larga 0.1 *m* e lunga 2 *m*. Le regioni al di sopra e al di sotto della lamina, non interessate dalle particelle di carbone e normalmente riservate all'elettrolita, sono invece in questa fase riempite con una speciale resina al fine di mantenere fissa la struttura di carbonio durante il taglio della sezione e migliorare il contrasto in fase di fotografia.

viene analizzata mediante box-counting. In fig.2.24 è illustrata una ricopertura dell'area mediante 128 quadrati. Per ricoprire il bordo della figura sono necessari  $M=58$  quadrati la lunghezza del lato di ciascuno dei quali risulta  $N=11.3$  (radice quadrata di 128) volte minore della scala di lunghezza dell'intera figura. Ripetendo a computer la

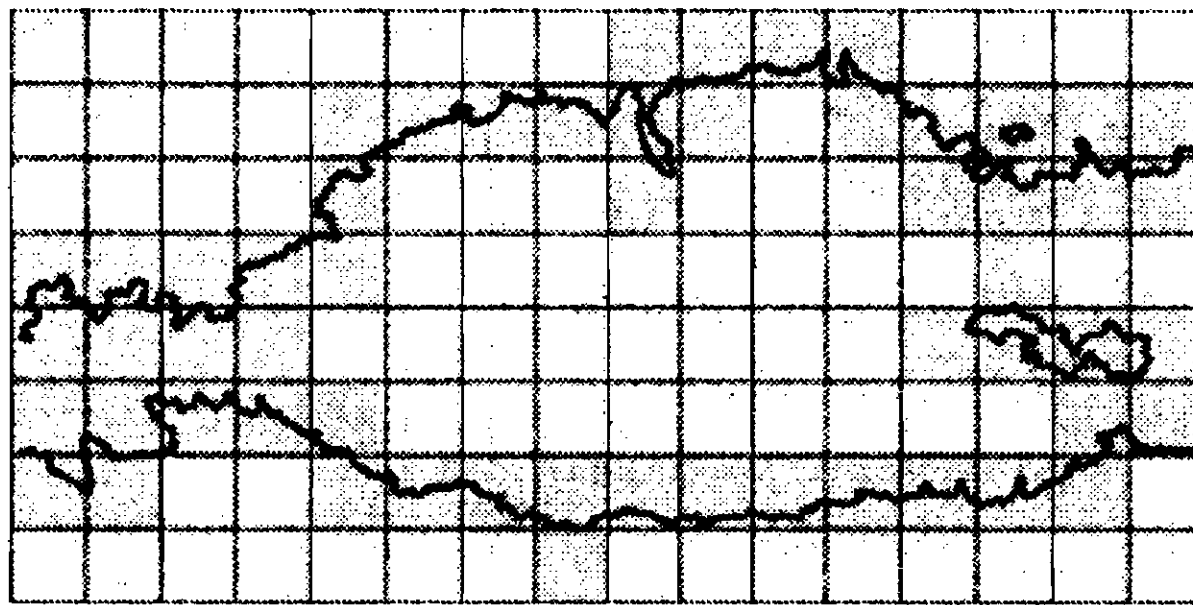


Figura 2.24: Box-counting della figura frattale: ricopertura della figura con 128 quadratini.

procedura di box-counting per differenti valori di  $N$  si ottiene la retta presentata in fig.2.25, il cui coefficiente angolare è pari alla dimensione frattale  $D$  del bordo della figura frattale precedentemente ottenuta. L'utilizzo di una formula topologica più generale porta ad un valore della dimensione frattale complessiva della superficie elettrodica pari a  $D \approx 2.6$ . Ricordando ora che l'autosomiglianza di un oggetto fisico è

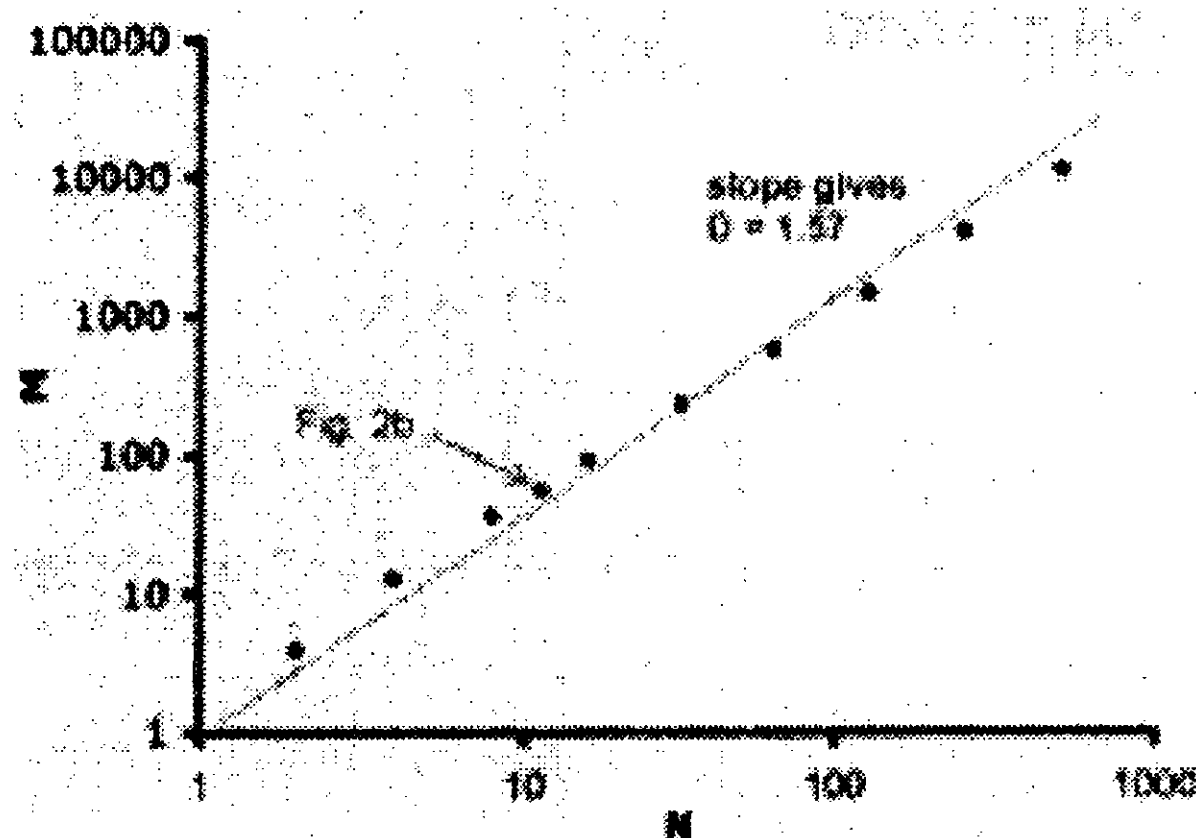


Figura 2.25: Valutazione della dimensione frattale  $D$  del bordo della figura ottenuta mediante sezione trasversale dell'elettrodo di un supercondensatore. Approssimando i punti sperimentali tramite una retta si ricava  $D \approx 1.6$

valida solamente per un intervallo limitato di ordini di grandezza tra scala macroscopica ( $m$ ) e microscopica ( $nm$ ), e assumendo che ciò valga pure

per l'elettrodo in questione, la superficie di questo risulta moltiplicata per  $10^{8 \times (2.6 - 2)} = 60000$  volte<sup>6</sup> rispetto alla normale superficie di  $0.2 \text{ m}^2$  in due dimensioni. Combinando questo valore di superficie con un doppio strato elettrochimico di  $1 \text{ nm}$  tra gli elettrodi si possono ottenere capacità superiori a  $1500 \text{ F}$ .

### 2.11.3 I supercondensatori nelle auto ad idrogeno

Nell'ambito di una collaborazione tra il Paul Scherrer Institute e la ditta Montena SA (Rossens, Svizzera) sono stati costruiti, nel 2000, due moduli composti, rispettivamente, da 140 e 142 supercondensatori. I 282 elementi sono stati collegati, a due a due, in parallelo e le varie coppie risultanti in serie generando una tensione complessiva tra i  $175 \text{ V}$  e i  $350 \text{ V}$  con ogni elemento operante tra i  $1,25 \text{ V}$  e i  $2,5 \text{ V}$ .

Partendo con i supercondensatori completamente carichi, la corrente è risultata pari a  $150 \text{ A}$  con una potenza fornita di  $50 \text{ Kw}$ . A causa della connessione in parallelo tra i supercondensatori di ogni coppia fluisce, attraverso ciascun suo elemento, solo metà della corrente disponibile. La tensione compresa tra i  $175 \text{ V}$  e i  $350 \text{ V}$  ha permesso l'utilizzo di un trasformatore DC/DC sviluppato dall'ETH<sup>7</sup> di Zurigo in grado di convertire la tensione variabile precedente ad un valore costante.

La connessione in serie di un elevato numero di coppie di condensatori comporta un serio problema: differenze, seppur minime, nelle caratteristiche dei vari singoli elementi potrebbero portare a differenti velocità di autoscarica degli stessi con una sempre crescente asimmetria tra le tensioni delle varie coppie di supercondensatori. Non dovendosi superare i  $2,5 \text{ V}$  per ogni elemento, la carica in eccesso su ogni condensatore deve essere redistribuita tra le varie coppie vicine. Questo inconveniente è stato risolto dall'ETH di Losanna mediante una scheda elettronica appositamente studiata.

---

<sup>6</sup>8 = numero di ordini di grandezza per cui vale l'autosomiglianza; 2.6 = dimensione frattale complessiva per la superficie elettrodica; 2 = dimensione tradizionale della superficie elettrodica

<sup>7</sup>Swiss Federal Institute of Technology

Il tassello ancora mancante al completamento del progetto è la realizzazione di un sistema atto a gestire il flusso di potenza dal motore alle ruote sia in fase di accelerazione che di frenata. La soluzione è venuta da Paul Rodatz (ETH di Zurigo) in termini di un regolatore di potenza in grado di tramutare la richiesta della medesima (sulla base della posizione reciproca di acceleratore e freno) in un flusso di energia diretto al comparto di trazione e proveniente o dalle celle a combustibile o dai supercondensatori o da entrambi i sistemi contemporaneamente. Il regolatore è predisposto anche per indurre la ricarica dei supercondensatori mediante energia proveniente dal motore operante come generatore durante i periodi frenamento.

La tensione di ciascun supercondensatore veniva regolata in base alla strategia adottata nelle varie situazioni di guida. A basse velocità i supercondensatori sono pressochè totalmente ricarichi e pronti a fornire energia per l'accelerazione mentre a velocità elevate la loro tensione viene mantenuta bassa al fine di offrire una capacità sufficiente a recuperare energia durante la frenata.

#### 2.11.4 Il test su strada

La traduzione in pratica del progetto è avvenuta nell'estate del 2001 quando è stato realizzato il primo prototipo di vettura, chiamata **HyPower**, utilizzando la scocca di una Volkswagen Bora. Dei 48 *KW* di potenza massima erogabili da un modulo contenente 6 celle a combustibile di tipo *Pem* (Polymer Electrolyte Membrane), circa il 20% veniva utilizzato per i vari apparati ausiliari il più importante dei quali era un compressore d'aria in grado di garantire un adeguato flusso di ossigeno alla superficie di uno dei due elettrodi di ciascuna cella. All'altro veniva convogliato l'idrogeno precedentemente immagazzinato alla pressione di 350 *bar* in due serbatoi, da 26 litri ciascuno, riposti nel baule della vettura. La reazione di cella era:



con vapore acqueo quale unica emissione.

Da simulazioni teoriche si riteneva che con 1.1 *Kg* di idrogeno la **HyPower** avrebbe percorso circa 50/100 *Km* a seconda della difficoltà del percorso. La mattina del 16 Gennaio 2002 la **HyPower** ha raggiunto i 2005 metri sul livello del mare del Passo del Sempione in presenza di una temperatura esterna  $t = -9^{\circ}C$ .

## 2.12 Un volo ardito nell'evoluzione

In questo paragrafo vogliamo illustrare un altro esempio di frattali che potrebbe portarci ancor più lontano. Richard Dawkins [21] affronta il problema dell'evoluzione con una simulazione frattale sostanzialmente semplice. Sebbene quella di Dawkins non pretenda di essere una spiegazione frattale dell'origine della specie, vale la pena di soffermarsi su questo approccio per considerare l'ampio spettro di applicabilità dei concetti frattali.

I naturalisti sostengono come, osservando gli organismi viventi, essi siano troppo improbabili e progettati con troppa eleganza per poter avere avuto origine dal caso. Si chiedono, pertanto, come possano essere stati generati. La risposta di Darwin è stata: attraverso trasformazioni graduali, purchè ciò avvenga a partire da elementi iniziali semplici, entità promordiali abbastanza elementari, possono originarsi per caso. Ogni mutamento successivo nel processo graduale dell'evoluzione può così essere abbastanza semplice, rispetto a quello immediatamente precedente, da potersi verificare per caso. L'intera sequenza dei passi cumulativi costituisce, però, qualcosa di molto diverso da un evento rigorosamente casuale; il processo cumulativo è diretto dalla sopravvivenza, un fatto tutt'altro che casuale. L'organizzazione vivente è il prodotto di una selezione cumulativa.

Esiste, inoltre, una differenza tra la selezione a passi singoli e la selezione cumulativa: nella selezione a passi singoli le "entità selezionate" lo sono una volta per tutte; nella selezione cumulativa, invece, esse "si

riproducono" o, in qualche altro modo, i risultati di un processo di cernita vengono sottoposti a successivi processi di selezione e così via, inesorabilmente. Nell'ambito della selezione cumulativa è naturale usare vocaboli come "riproduzione" e "generazione", che hanno associazioni con organismi viventi, in quanto gli organismi viventi sono i più noti esempi di selezione cumulativa.

A volte le nubi, quotidiano esempio di frattali, attraverso il rimescolamento casuale per opera dei venti, vengono ad assomigliare ad oggetti familiari; queste somiglianze sono il frutto della selezione a passi singoli, in altre parole sono prodotte da una singola coincidenza.

A proposito di nuvole, persino due personaggi di Shakespeare, Amleto e Polonio, si dilettaano nell'identificare svariati animali nelle nuvole ("Methinks it is like a weasel"). Proprio quest'ultima frase si presta ad un simpatico esperimento: immaginiamo di mettere una scimmia davanti a una tastiera del computer; quanto tempo impiegherà la malcapitata a riprodurre la frase "Methinks it is like a weasel"? Il "padrone" della scimmia può scegliere di far procedere il curioso esperimento in due modi distinti: può lasciare completa libertà all'animale, che ogni volta riparte da una combinazione qualunque di lettere; oppure egli può, ad ogni passo, selezionare le lettere che più rendono la frase simile all'obiettivo e far ripartire la scimmia da quella combinazione. Certo che disporre di una scimmia così paziente e intelligente non è da tutti, pertanto risulta più conveniente ricorrere a un computer per simulare le due situazioni. Nella selezione a passi singoli, ovvero nel primo caso, il computer ogni volta genera una "frase" di 28 caratteri, incorrelata totalmente alla precedente. Nella selezione cumulativa, ovvero nel secondo caso, il computer esamina le frasi mutanti *nonsense*, la progenie della frase originaria, e sceglie quella che assomiglia di più alla frase obiettivo. Non è importante quanto tempo il computer impiega a riprodurre la frase obiettivo, bensì è importante la differenza tra il tempo richiesto dalla selezione cumulativa e quello richiesto dalla selezione a passi singoli: sperimentalmente è stato verificato che quest'ultima impiegherebbe  $10^{30}$  anni(!!!), contro la



mezz'ora impiegata dalla selezione cumulativa.

Proprio la selezione cumulativa, essenzialmente non casuale, è l'ingrediente principale della ricetta utilizzata da Charles Darwin, nel XIX secolo, nella formulazione della sua teoria sull'evoluzione della specie.

Sebbene il modello della scimmia che riscrive tutte le opere di Shakespeare, battendo a caso sulla tastiera, sia utile per spiegare la distinzione tra selezione a passi singoli e selezione cumulativa, esso è fuorviante sotto alcuni aspetti. Uno di questi è che, in ogni generazione di riproduzione controllata selettiva, le frasi della progenie mutante sono giudicate secondo il criterio della somiglianza a un lontano obiettivo ideale. La vita è, però, diversa da questo esempio. Contrariamente alle apparenze, l'evoluzione non ha un prefissato obiettivo a lungo termine, nessuna soluzione finale funge da criterio per la selezione; "quell'orologio" che è la selezione cumulativa è cieco e non può vedere il futuro. Per tener conto di questo punto, possiamo apportare delle modifiche al modello computerizzato. Occorre programmare il computer perché disegni delle figure e addirittura si potrebbe vedere l'evolversi nel computer di figure simili ad animali, per mezzo della selezione cumulativa di forme mutanti. Non è certo questo un modello di evolucionismo, bensì un semplice esercizio intellettuale, certamente istruttivo.

Nella realtà la forma di ciascun animale viene prodotta per mezzo dello sviluppo dell'embrione; l'evoluzione si verifica a causa delle lievi differenze che, in generazioni successive, si presentano nello sviluppo embrionale. Queste differenze sono la conseguenza di mutazioni nei geni che controllano lo sviluppo. Nel modello che qui si intende elaborare va introdotto, pertanto, un qualcosa di equivalente ai geni, che possa mutare.

Lo sviluppo embrionale è un processo troppo elaborato per poter essere simulato realisticamente su un computer. Occorre, dunque, rappresentarlo con uno sviluppo analogo semplificato, trovando una regola semplice che possa essere fatta variare sotto l'influenza di "geni".

In informatica si può sfruttare la programmazione "ricorsiva", per realizzare un modello di crescita ad albero, come fatto nei paragrafi precedenti. Il computer comincia disegnando una semplice linea verticale, poi la linea si ramifica in due, come una Y; successivamente ognuno dei rami si scompone, a sua volta, in due sotto-rami, e ogni sotto-ramo in sotto-sotto-rami, e così via. Il procedimento è ricorsivo, perché la stessa regola (la ramificazione) viene applicata localmente all'intero albero in crescita. Questo è un processo di creazione di una figura frattale: occorre stabilirne le regole.

La fig.2.26 mostra cosa accade quando si chiede al computer di obbedire esattamente alla stessa regola di disegno e lasciando procedere la ricorrenza<sup>8</sup> per  $n$  passi successivi abbastanza numerosi.

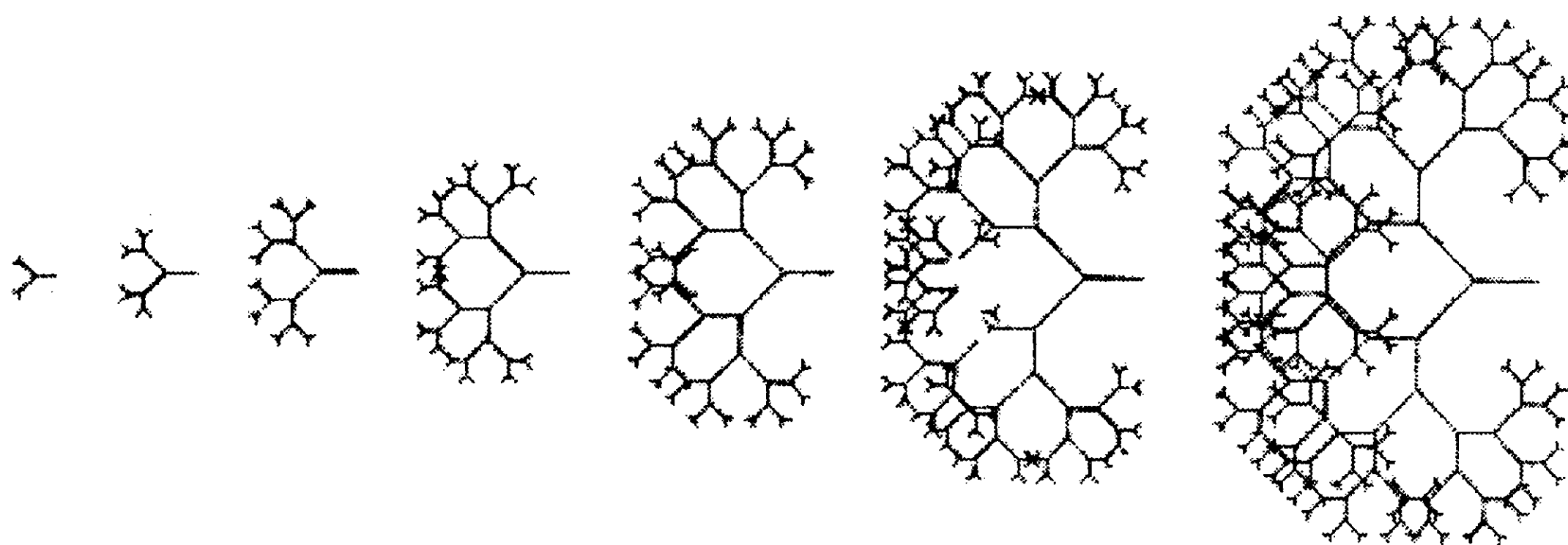


Figura 2.26: Sette passi di sviluppo della figura iniziale a forma di Y ruotata verso o sinistra.

Anche per un lettore "neofita" questa figura è un bell'esempio di frattale, che richiama alla memoria il fiocco di neve e la curva triadica di Koch, dei paragrafi precedenti. La ramificazione ricorsiva può anche essere considerata come una buona metafora per lo sviluppo embrionale di piante e animali in generale.

<sup>8</sup>In questo paragrafo viene utilizzato il termine *ricorrenza*, più consono a un genetista, al posto del termine *generazione*, tipico del linguaggio dei frattali, utilizzato negli altri paragrafi di questo testo.

La semplice regola di ramificazione per il disegno di alberi appare, quindi, un analogo promettente per lo sviluppo embrionale. Perciò essa può essere inserita in una piccola procedura per il computer (la si chiami *Sviluppo*) e può essere integrata in un programma ulteriore (che può essere chiamato *Evoluzione*). Come primo passo nello scrivere questo programma più vasto, occorre porre attenzione ai "geni". Questi ultimi, nella vita reale, fanno due cose: influiscono sullo sviluppo e vengono trasmessi alle generazioni future.

In animali e piante reali ci sono decine di migliaia di geni, ma qui non è possibile lavorare su così ampia scala, per cui il modello viene limitato a nove geni. Ognuno di questi è rappresentato nel computer semplicemente da un numero, il suo *valore*. L'idea fondamentale è che questi debbano esercitare una qualche influenza quantitativa, seppur limitata, sulla regola di disegno (lo *Sviluppo* precedentemente citato). Per esempio, un gene potrebbe influire sull'angolo di ramificazione; un altro sulla lunghezza di qualche ramo particolare. Un'altra caratteristica ovvia attribuibile a un gene è quella di influire sul numero di passi della ricorrenza. Questo effetto è assegnato al gene 9. Dunque la fig. 2.26 può essere considerata come un'immagine di sette organismi affini, identici tra loro, generati senza ricorrere al gene 9.

Se nella fig. 2.26 si introduce un gene 9 che limita la configurazione a 5 passi (per esempio), le ultime due configurazioni non sarebbero più generate.

E' facile costruire geni diversi:

- fattore di scala verticale maggiore del fattore di scala orizzontale
- fattore di scala orizzontale maggiore del fattore di scala verticale
- variazione dell'angolo tra i due rami della Y
- diversa lunghezza dei due rami

La fig. 2.27 dà un'idea dei tipi di funzioni svolte dai geni. Al centro della figura 2.27 prendiamo un albero base, che coincide con il quarto

passo della figura 2.26. Tutt'intorno all'albero centrale ci sono altri otto alberi; essi sono uguali all'albero centrale, con l'unica differenza che un gene (uno diverso in ogni caso) ha subito una mutazione. Per esempio, l'immagine a destra dell'albero centrale mostra ciò che accade quando il gene, chiamato dall'autore 5, muta per mezzo dell'aggiunta di +1 al suo valore (convenzionale!). Si vede che il gene 5+ fa diventare l'angolo tra i due rami della Y piatto, diminuendone la lunghezza rispetto al ramo principale. Il gene 5-, invece, provoca un allungamento dei due rami della Y, rispetto al ramo principale, e una diminuzione dell'angolo fra di essi compreso. Il gene 7- elimina i rami discendenti della Y, mentre il gene 7+ ne provoca un ulteriore allungamento verso il basso. Ognuno di questi alberi ha una propria "formula genetica" unica, formata dai valori numerici dei suoi nove geni.

Conviene notare come tutte le forme siano simmetriche intorno a un asse destra-sinistra. Questa è una costrizione imposta (per ragioni estetiche e per economizzare sul numero di geni necessari) dal programmatore alla procedura *Sviluppo*. Inoltre esisteva negli autori la speranza che questa costrizione portasse allo sviluppo di forme simili ad animali, in quanto la maggior parte degli animali presenta una simmetria bilaterale. D'ora in poi le creature "alberi" verranno chiamate "biomorfi".

Tornando ai biomorfi del computer, è facile vedere ogni esempio separato dal biomorfo centrale come figlio del genitore centrale. Ed ecco l'analogo della *Riproduzione* che è pronto per essere incluso nel grande programma *Evoluzione*. In questo modello un figlio differisce dal genitore in uno solo dei suoi nove geni; ogni mutazione si verifica solo attraverso l'aggiunta di +1 o -1 al valore del corrispondente gene parentale; essendo i geni 9, ci sono pertanto 18 possibili mutanti, di cui solo otto esempi rappresentativi sono mostrati nella figura 2.27. Ogni figlio riceve dal genitore i suoi nove geni, che vengono o no trasmessi alla generazione successiva. La natura dei geni non viene modificata dalla loro partecipazione allo sviluppo corporeo, ma sulla loro probabilità

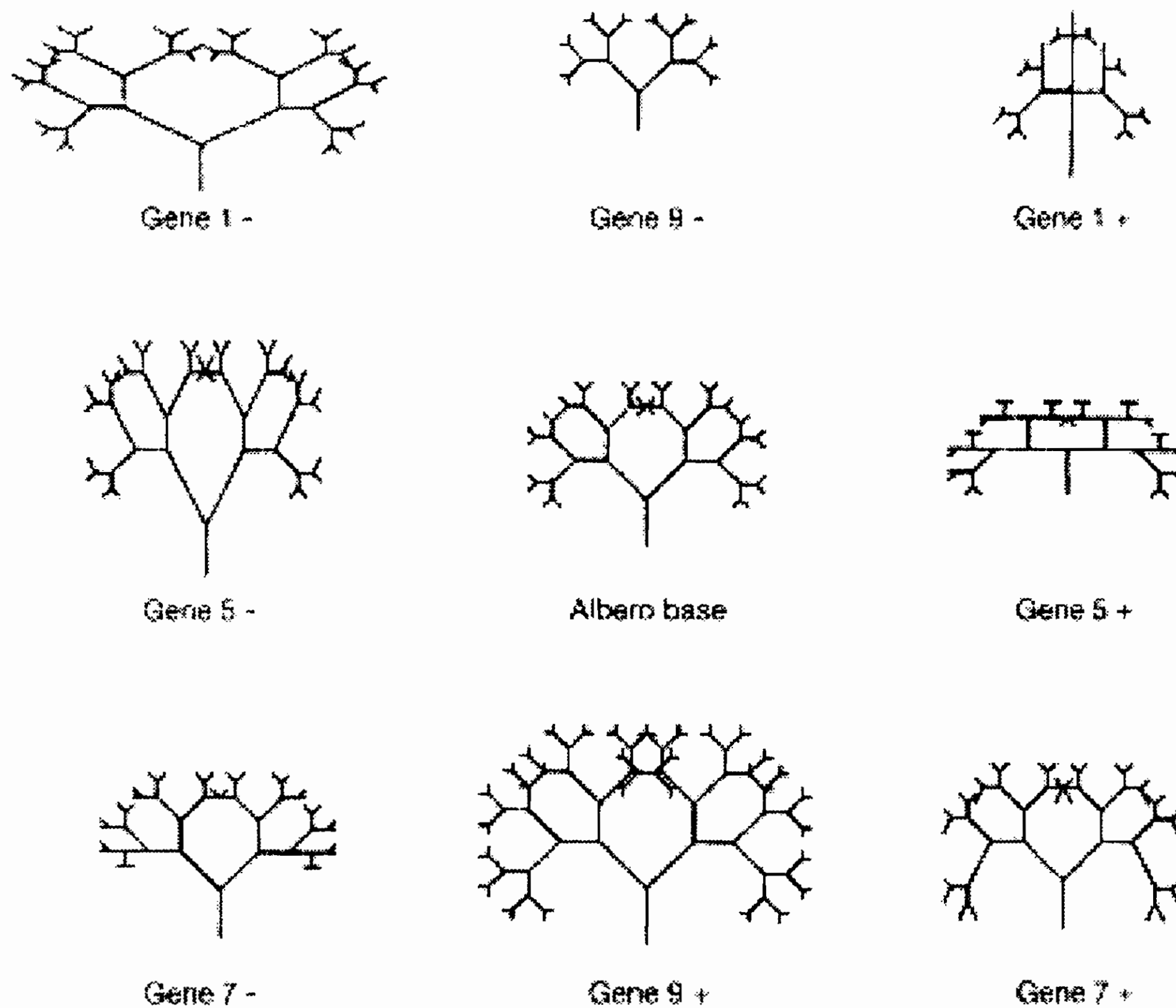


Figura 2.27: Illustrazione di 8 geni generati dall'albero base (riprodotto nella posizione centrale della figura, in posizione n. 5). Sono ottenuti variando parametri quali lunghezza o angoli oppure introducendo differenze tra lunghezze o angoli in dipendenza della orientazione.

di essere trasmessi alla generazione successiva può incidere il successo del "corpo" che essi aiutano a creare. Per esempio, il gene 9 potrebbe interrompere la trasmissione. Ecco perché in questo modello è importante che i due "codici" chiamati *Sviluppo* e *Riproduzione* siano scritti come compartimenti rigorosamente separati. Al passare delle generazioni, la qualità totale di differenza genetica dal progenitore originario può diventare, cumulativamente, molto grande. Benché le mutazioni siano casuali, il mutamento cumulativo nel corso delle generazioni non è affatto casuale. Non è casuale quale individuo di quella progenie venga

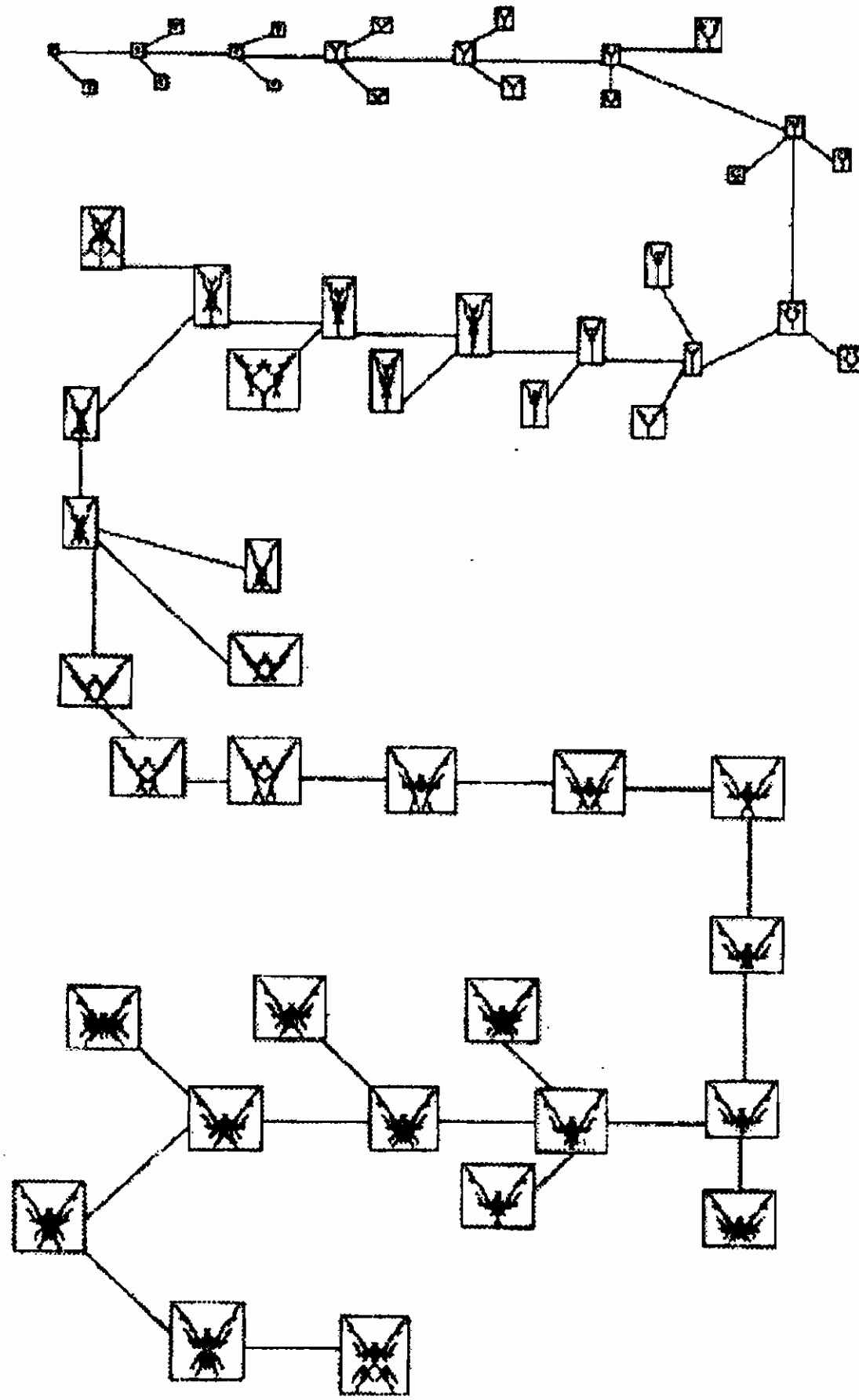


Figura 2.28: Ventinove mutazioni partendo da un punto, che diventa una Y nella prima mutazione. La serie prosegue con scelte a caso tra gli 8 geni oppure di interrompere lo sviluppo tramite il "gene 9".

selezionato per trasmettere i propri geni alla generazione seguente. E' a questo punto che entra in scena la selezione darwiniana.

Sullo schermo del computer ogni volta viene visualizzata un'intera figliata. L'occhio umano ha un ruolo attivo: funge da agente della selezione; è l'occhio dello sperimentatore a passare in rassegna l'insieme dei figli prodotti in ogni generazione e a sceglierne uno per la riproduzione controllata. Nei modelli elaborati dal computer il criterio selettivo non è la sopravvivenza, come nella vera selezione naturale, bensì la capacità di colpire il gusto estetico dello sperimentatore. I geni dell'individuo

prescelto dall'occhio umano vengono trasmessi alla *Riproduzione*, e da qui prende avvio la generazione successiva. Questo processo può essere fatto proseguire indefinitamente. La cosa più sorprendente è il fatto che i biomorfi possono cessare molto presto di assomigliare ad alberi. La figura 2.28 illustra una particolare storia evolutiva, formata da non più di 29 generazioni. Il progenitore è una minuscola creatura, un singolo punto. Al suo interno è racchiuso il potenziale per ramificarsi esattamente secondo lo schema dell'albero centrale della figura 2.27 (solo che il suo gene 9 gli dice di ramificarsi zero volte). Tutti gli esseri raffigurati nella figura 2.28 sono discesi dal punto; sono rappresentati solo i discendenti "di successo". Consideriamo ora brevemente le primissime generazioni della linea principale dell'evoluzione della fig. 2.28. Nella generazione 2 il punto diventa una Y, nelle due generazioni seguenti la Y diventa più grande, poi i rami cominciano a incurvarsi lievemente e l'organismo assomiglia a una fionda. Nella generazione 7 la curva si accentua, così che i due rami finiscono quasi per incontrarsi; i rami incurvati diventano sempre più grandi e nella generazione 8 ognuno di essi acquista un paio di piccole appendici. Nella generazione 9 queste appendici sono andate di nuovo perdute e il fusto della fionda diventa più lungo. La generazione 10 assomiglia alla sezione di un fiore, e i rami laterali ricurvi sembrano petali che racchiudono un'appendice centrale o "stigma". E così via. Vagabondando nelle regioni più remote del *Paese dei Biomorfi* ci si imbatte in gamberi fatati, templi aztechi, vetrate di cattedrali gotiche, disegni primitivi di canguri e chi più ne ha più ne metta.

La fig. 2.29 è un'altra piccola collezione, le cui forme non sono state ritoccate, ma sono esattamente come le disegna il computer. Qui è bene concludere il nostro *volo ardito* nel mistero dell'evoluzione, in compagnia dei biomorfi emersi dallo schermo del più comune computer.

Ci accontentiamo di aver mostrato come, con regole relativamente semplici e relativamente limitate in numero, da strutture fondamentali molto elementari, si possano generare figure e strutture molto complesse. Il modello sviluppato non è certamente giusto, ma è sicuramente ben

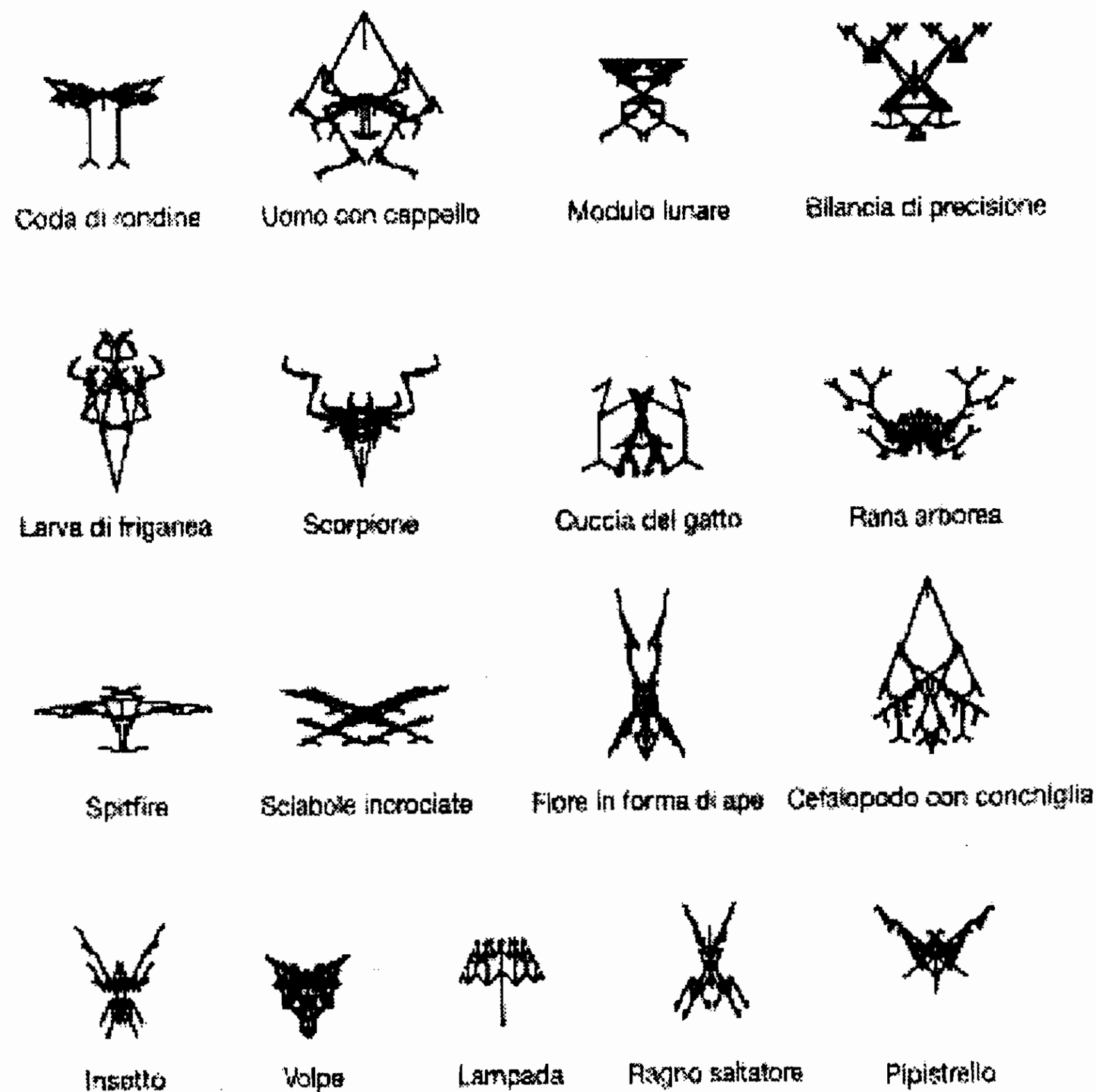


Figura 2.29: Scelta ragionata di alcuni tra i biomorfi che si sono generati applicando il semplice programma "Riproduzione" che giungono a configurare le forme più disparate che potrebbero rappresentare anche forme simili ad animali semplici.

pensato. Che l'evoluzione segua (o abbia seguito) un percorso uguale a quello illustrato non è certo dimostrabile. Ma qualcosa di simile avrebbe potuto portare a strutture del tipo di quelle illustrate in fig. 2.28 e 2.29.

Lasciando all'evoluzionismo qualcosa come qualche decina di miliardi di anni per far procedere il suo programma *Riproduzione...*



# Capitolo 3

## Le funzioni frattali

### 3.1 Introduzione

Come è noto vi è uno strettissimo legame tra figure geometriche e funzioni di una o più variabili. I matematici ci hanno insegnato, almeno per molte figure euclidee, come sia possibile fornirne una descrizione analitica.

Rette, circonferenze, cerchi, parabole sono ben descritte nel campo della geometria analitica.

E' facile quindi intuire che anche gli insiemi geometrici frattali possano dare vita a delle funzioni frattali e che alcuni concetti tipicamente della geometria frattale sono di grande utilità quando applicati a funzioni matematiche.

Particolarmente importante è il nuovo atteggiamento che si può assumere di fronte a funzioni non differenziabili e non integrabili.

Mentre per la matematica classica, di fronte ad una funzione non integrabile, uno si sente totalmente disarmato, mediante concetti frattali è possibile trovare una risposta approssimata del tipo: *dammi la risoluzione con cui vuoi eseguire l'integrale ed io ti fornirò il valore corrispondente.*

Se una funzione rappresenta una figura (linea, superficie o quant'altro) frattale di data dimensione  $D$ , è possibile fornire il valore

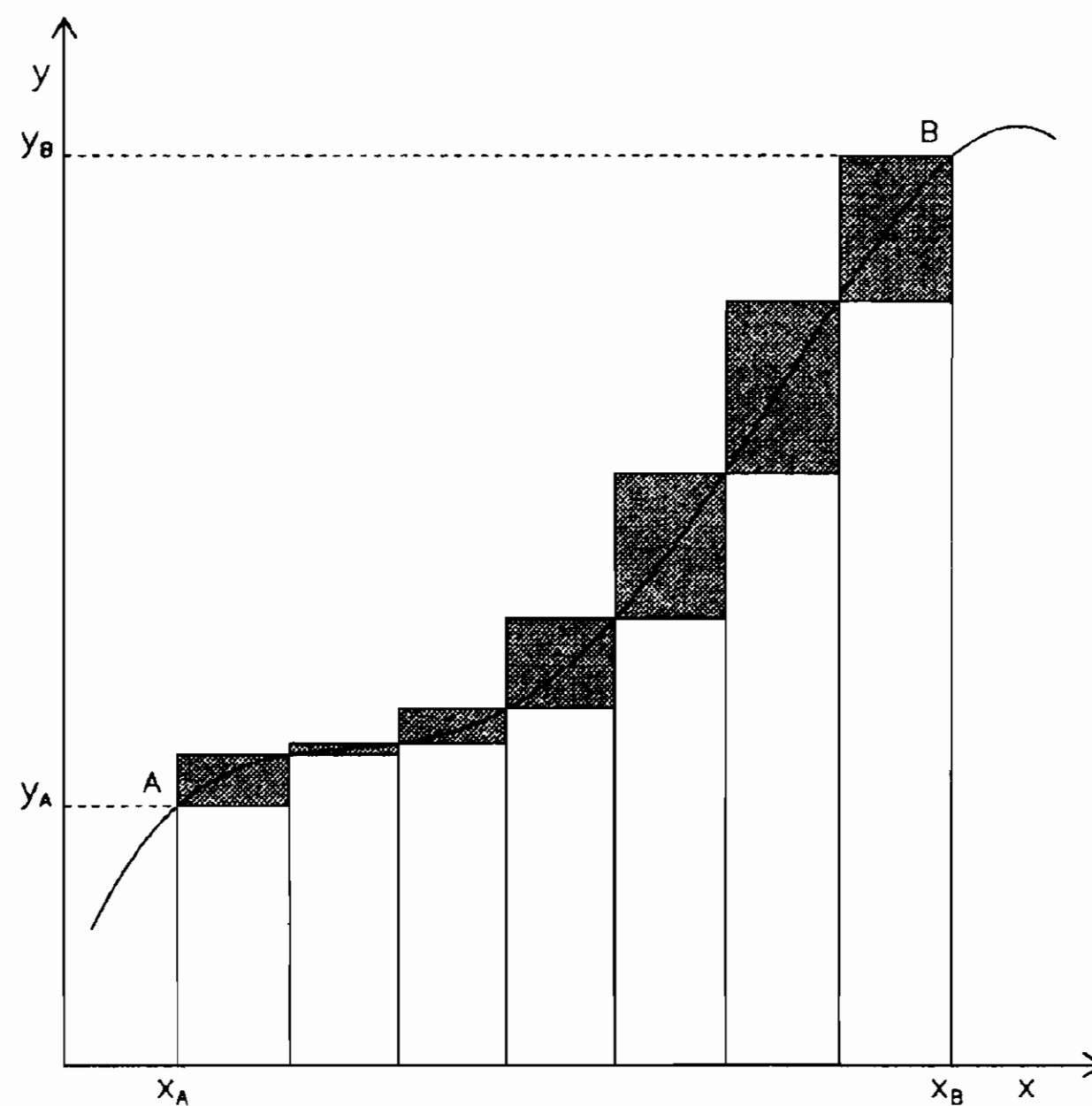


Figura 3.1: Approssimazione da sopra e da sotto dell'integrale della curva

numerico della sua *misura* nota che sia la risoluzione. Infatti adottando una procedura che porti alla misura della dimensione frattale, per esempio di box counting, è immediato fornire la dipendenza della misura dal passo di approssimazione [cfr. 2.2]. In questo capitolo ci occupiamo di funzioni non derivabili in alcun punto e di alcuni usi operativi di concetti frattali nella manipolazione di funzioni di una variabile.

## 3.2 Linee e funzioni, aree ed integrali

E' necessario qui sottolineare l'importanza che assumono le due definizioni operative di dimensione frattale di box counting (2.8) e di similarità (2.22).

Alle definizioni citate si è arrivati comunque nel tentativo di ricoprire l'insieme iniziale mediante dei tratti  $\delta$  ottenuti o spezzando in parti il tratto originario di linea  $L$  ovvero riducendolo di un fattore  $r(N)$  simile a  $L$ .

Ora, sappiamo che una linea -per ora euclidea- è descrivibile da una funzione  $f(x)$  come illustrato in fig. 3.1. Riflettiamo quindi per un

momento sul significato operativo di integrale secondo Weierstrass (ma chi si ricorda poi *secondo chi* è stata definita la operazione di integrazione nel momento in cui la si applica e la si esegue?), per ottenere l'area contenuta dalla curva  $\widehat{AB}$  di fig. 3.1 e dai segmenti  $\overline{Ax_A}$ ,  $\overline{x_ax_B}$ ,  $\overline{x_BB}$ . L'area  $S$  della superficie racchiusa è data da:

$$S = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \quad (3.1)$$

Ci hanno insegnato che  $f(x)$  è il valore della funzione in un punto *qualsivoglia* del trattino  $\Delta x$  e che il simbolo di integrale traduce quello di sommatoria dei rettangoli  $f(x_i)\Delta x_i$  *quando*  $\Delta x_i$  *tende a zero*. Noi, pertanto, -come indicato in fig. 3.1- sappiamo calcolare sia una *approssimazione dal basso*  $S_{bottom}$  prendendo per  $f(x_i)$  il valore minimo di  $f(x)$  nell'intervallo  $\Delta x_i$ , sia una *approssimazione dall'alto*  $S_{top}$  prendendo il valore massimo di  $f(x)$  nell'intervallo  $\Delta x_i$ . La teoria degli integrali ci garantisce che, per funzioni regolari ed integrabili:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_{bottom} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} S_{top} = S = \int_{x_a}^{x_b} f(x)dx \quad (3.2)$$

E' bene osservare che la linea  $\widehat{AB}$  (cioè la funzione  $f(x)$  per  $x_a < x < x_b$ ) risulta *ricoperta* (tipo box counting) da un numero  $N$  di rettangoli, ovvero racchiusa in una area definita dall'approssimazione dall'alto meno quella definita dall'approssimazione dal basso.

Operativamente quindi possiamo chiederci come poter procedere in presenza di un tratto di curva  $L_F$  fratta, frattale. Nella fig. 3.2 è rappresentata per necessità e per semplicità una curva integrabile a tratti invece che un frattale completamente sviluppato. Ciò è sufficiente per i nostri scopi.

Vale la pena ricordare in primo luogo che non è necessario *ricoprire* un insieme  $S$  mediante quadratini. E' del tutto lecito per esempio ricoprire l'insieme con dei dischi di raggio  $R_i$  nel modo seguente (illustrato in fig. 3.2). Fissato un dato raggio  $R_1$ :

- Approssimiamo *dal basso* la linea  $L_F$  con  $N_{b,1}$  dischi tra loro

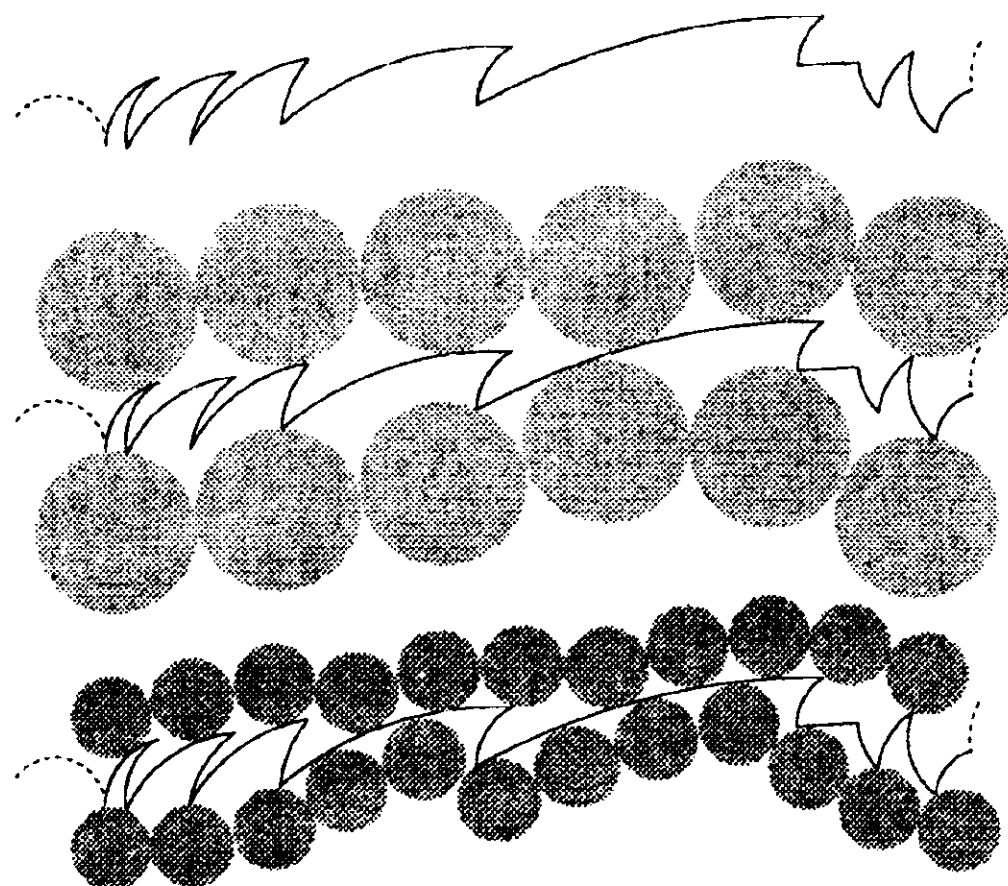


Figura 3.2: Approssimazione di una curva integrabile a tratti mediante dischi

tangenti. Ottengo una spezzata -congiungente i centri dei dischi- che approssima *dal basso* la linea  $L_F$ ;

- Approssimiamo il tratto di linea  $L_F$  con  $N_{t,1}$  dischi tra loro tangenti. Ottengo una spezzata -congiungente i centri dei dischi- che approssima dall'alto la linea  $L_F$ . In generale  $N_{b,1} \neq N_{t,1}$ .
- la linea  $L_F$  risulta racchiusa nell'area indicata in fig. 3.2.

Fissato un altro valore del raggio  $R_2 < R_1$  ripetiamo le stesse operazioni. Otteniamo una situazione delineata in fig. 3.2 con due numeri diversi tra loro  $N_{b,2} \neq N_{t,2}$ .

Il rapporto  $K_i = N_{b,i}/N_{t,i}$  detto insieme di misura è un rapporto di scala in quanto, in modo diverso, approssima la medesima curva.  $N_t$  e  $N_b$  individuano l'area che *copre* l'insieme  $L_F$  da misurare ed è ovvio che per una curva euclidea regolare  $k \rightarrow 1$  quando  $R \rightarrow 0$ .

Il rapporto di scala può pertanto essere scelto in modo analogo alla (2.21):

$$K = A_0 R^{-D} \quad (3.3)$$

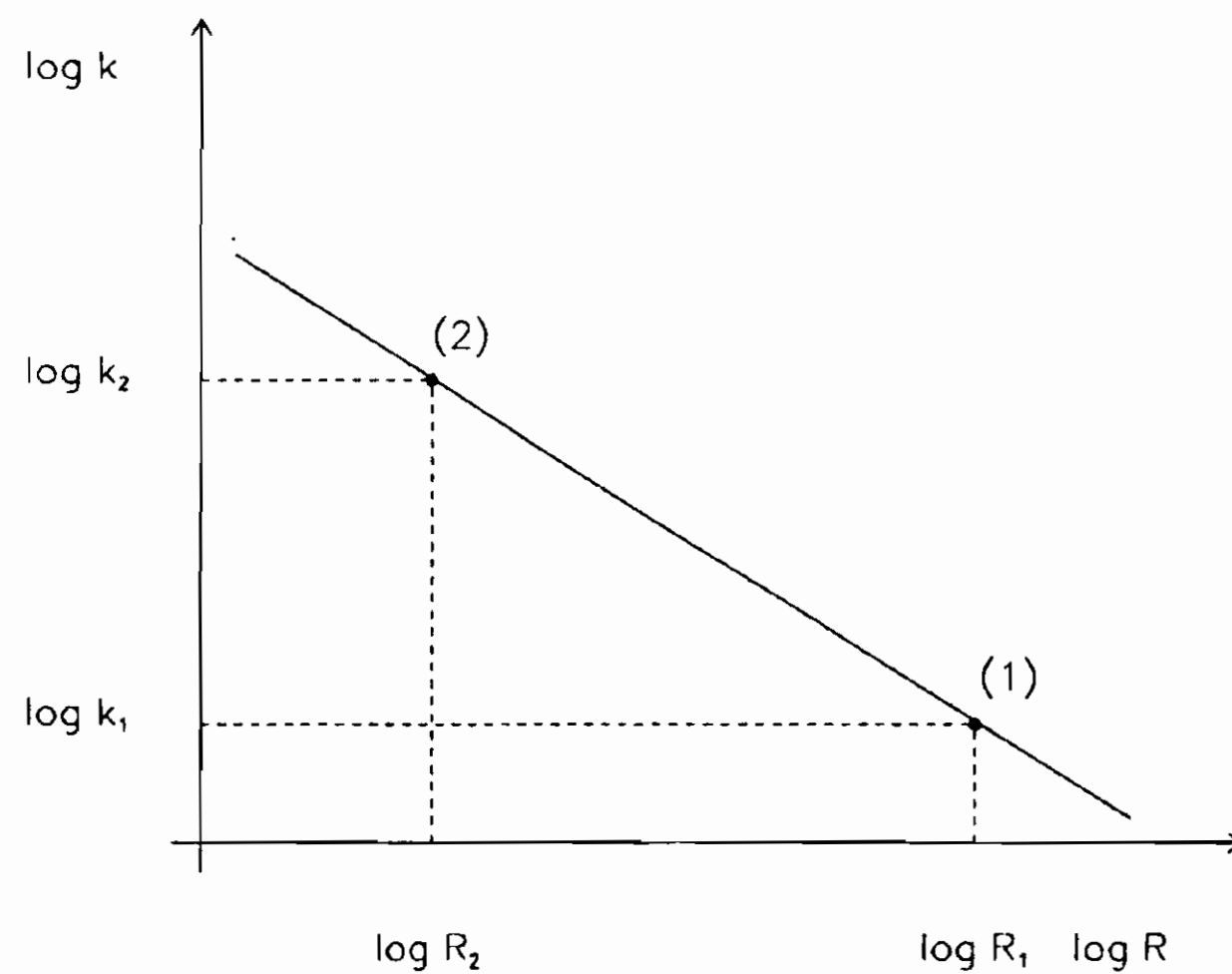


Figura 3.3: Grafico atto a valutare la dimensione frattale della curva

Pertanto, come per la (2.9), la lunghezza del segmento di linea  $L_F$  soddisfa alla relazione:

$$L_F = RK = A_o R^{1-D} \quad (3.4)$$

Dal che segue immediatamente che la dimensione frattale  $D$  del segmento di linea  $L_F$  si ottiene costruendo il grafico di fig. 3.3, per diversi valori  $R_i$  del raggio  $R$ , raggio di misura:

$$\log L_F = (1 - D) \log R + \log A_o \quad (3.5)$$

Detti  $y = \log L_F$  e  $x = \log R$ , la (3.5) si scrive nella forma più generale come:

$$y = (E - D)x + cost \quad (3.6)$$

dove  $E$  è la dimensione euclidea dello spazio di immersione.

La fig. 3.4 riassume qualitativamente i concetti esposti in questo paragrafo. In essa è rappresentato un insieme regolare euclideo da misurare. Esso può rappresentare sia una circonferenza, sia un cerchio, sia infine una sfera, tutte di raggio  $R_o$ .

Per  $x \ll \log R_o$ , le analoghe della curva di fig. 3.3 sono tali che tendono ad un comportamento parallelo all'asse  $x$  per  $x \rightarrow -\infty$ .

Il comportamento della curva diventa piatto [pendenza  $(E - D) = 0$ ] in tutti e tre i casi. I valori numerici degli asintoti orizzontali per

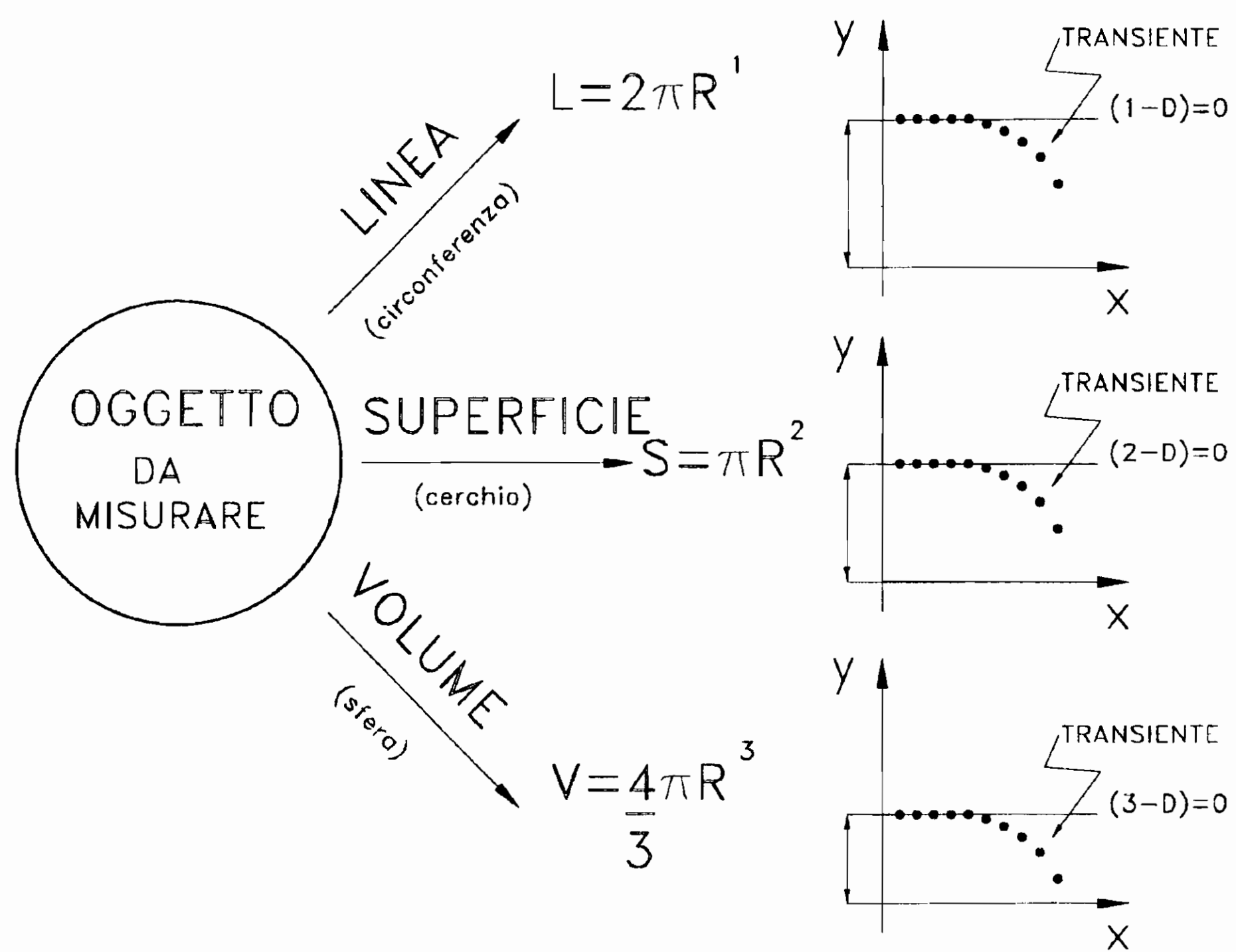


Figura 3.4: Misura della dimensione di un insieme euclideo.

$x \rightarrow -\infty$  sono irrilevanti al fine dei nostri scopi e, nel caso specifico, sono:  $y(-\infty) = \log(2\pi R_o)$  per la circonferenza;  $y(-\infty) = \log(\pi R_o^2)$  per il cerchio e  $y(-\infty) = \log(\frac{4}{3}\pi R_o^3)$  per la sfera.

Il lettore può riprendere la fig. 2.5 che riporta il comportamento del grafico di fig. 3.3 nel caso del metodo di box counting e nel caso della circonferenza.

### 3.3 Il paradosso di Schwarz

I pregiudizi dei matematici spesso condizionano il modo di pensare e possono indurre a semplificare problemi che semplici non sono. Anche con figure semplici e lisce potremmo trovarci in un grosso imbarazzo.

Confessiamo candidamente che, a livello operativo ed applicativo non interessa molto se la definizione di integrale è stata data da Lebesgue o da Riemann; quello che interessa è come applicare la macchinetta che, data una funzione, estragga il valore del suo integrale definito o, meglio ancora, la forma del suo integrale indefinito. L'introduzione del pacchetto software *Mathematica* facilita il compito ma tende inesorabilmente a fare abbassare il livello di guardia dal punto di vista concettuale.

A proposito di superfici esiste un celebre paradosso dovuto a Schwarz che, apparentemente era innamorato dei triangoli e doveva odiare i rettangoli.

Come accade per la misura di una lunghezza, anche con la misura di un'area possiamo trovarci in grande imbarazzo. Consideriamo infatti la superficie di un cilindro di raggio  $R$  e altezza  $H$  e di area  $A = 2\pi RH$ .

Se proviamo a misurare la superficie con un righello chiaramente il compito non è facile o, per lo meno non è facile giungere ad un risultato. Il nostro condizionamento matematico ci suggerisce di prendere *base per altezza*. Ma se siamo un po' capoccioni, possiamo porci il problema di *triangolare* la superficie in qualche modo, come mostrato in fig. 3.5a. Triangolarla letteralmente: usando triangoli e non rettangoli. Dividiamo per esempio la superficie in  $m$  strisce e  $n$  settori e calcoliamo l'area  $A_\Delta$

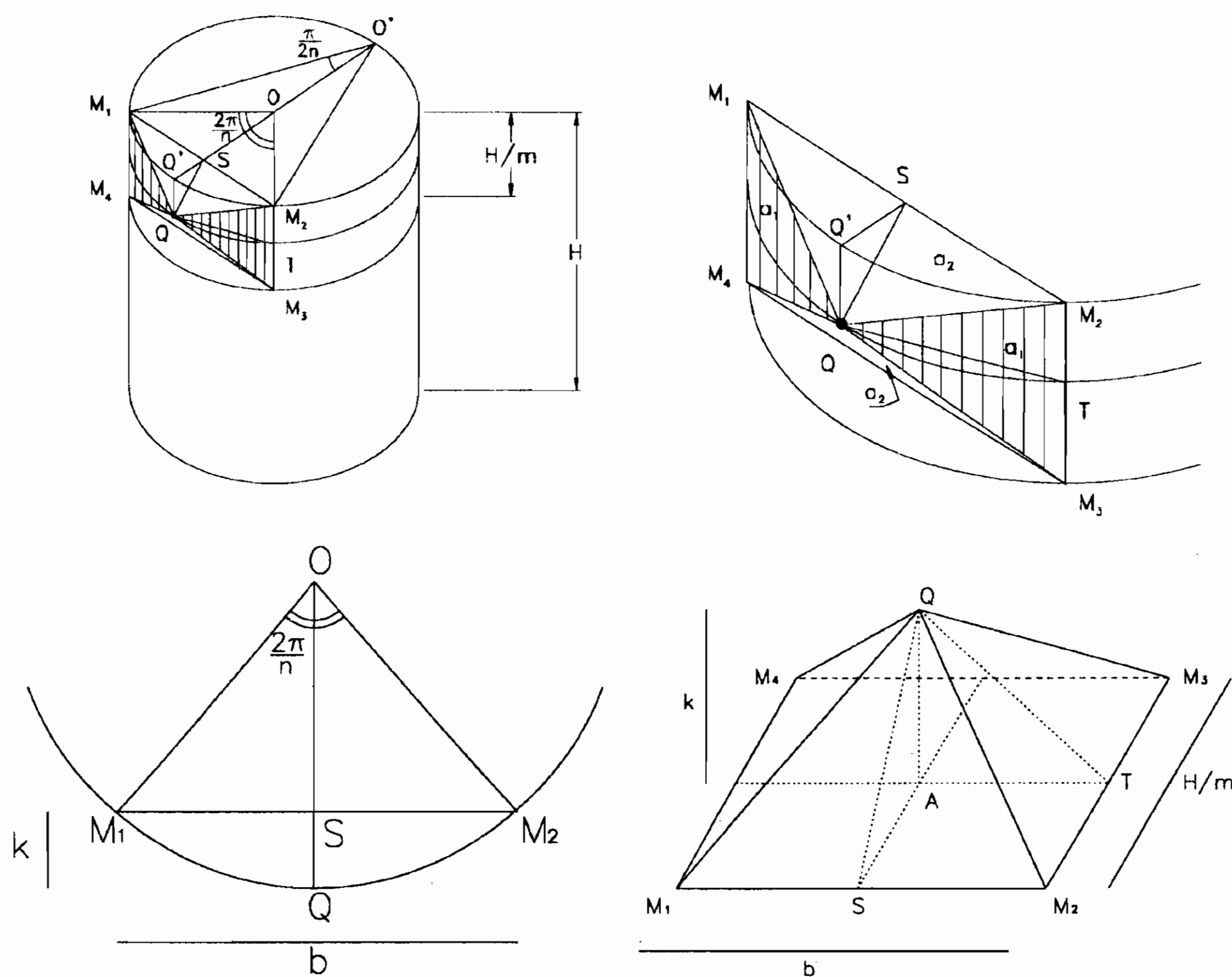


Figura 3.5: Il paradosso di Schwarz: a-Triangolazione della superficie di un cilindro; b-definizione della piramide di base; c-proiezione dall'alto; d-piramide di base.

sommando le aree di tutti i piccoli triangoli.

Rendendo la divisione sempre più fine, cioè facendo in modo che  $m \rightarrow \infty$  e  $n \rightarrow \infty$  ci aspettiamo che  $A_{\Delta} \rightarrow A$ . Ma usando i triangoli troveremo delle sorprese.

Vi sono due tipi di triangoli, in fig. 3.5b: quelli, indicati come  $a_1$ , che hanno un lato in comune con la superficie cilindrica; quelli, indicati come  $a_2$ , che posseggono soltanto i tre vertici in comune con la superficie.

Per ricoprire la superficie laterale del cilindro occorre quindi partire da una piccola *piramide di base* ( $QM_1M_2M_3M_4$ ), riprodotta ingrandita in fig. 3.5d costruita con una coppia di triangoli di tipo  $a_1$  ed una coppia di triangoli del tipo  $a_2$ . Occorre notare che, per costruzione, tutte le *piramidi di base* risultano all'interno della superficie cilindrica per



cui *approssimiamo dall'interno*. In fig. 3.5c è disegnata una proiezione dall'alto del cilindro in modo da evidenziare il raggio  $R$ , il diametro  $2R$ , la sagitta  $k$ , la corda  $b$  e l'angolo di apertura che sottende la piramide che vale  $2\pi/n$ . In aggiunta, vale ricordare che l'altezza  $H$  del cilindro è stata suddivisa in  $m$  parti.

Dalla fig. 3.5c si ricava immediatamente che la sagitta vale  $k = [R(1 - \cos(\pi/n))]$ .

Se ricordiamo le formule trigonometriche:

$$\begin{aligned} 1 - \cos(\pi/n) &= 2\sin^2(\pi/2n) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{2n} \cos\frac{\pi}{2n} \end{aligned}$$

si deriva facilmente, guardando il triangolo  $OSM_1$  in fig. 3.5c, che:

$$k = 2R\sin^2\frac{\pi}{2n}; \quad (3.7)$$

ed inoltre che:

$$\frac{b}{2} = R\sin\frac{\pi}{n} = 2R\sin\frac{\pi}{2n} \cos\frac{\pi}{2n}. \quad (3.8)$$

Con questi elementi possiamo ora calcolare le altezze  $\overline{QT}$  e  $\overline{QS}$  necessarie a calcolare l'area della superficie laterale della piramide di base (vedi fig. 3.5d).

L'altezza  $\overline{QT}$  si ricava immediatamente dal triangolo  $QTA$  (dove  $A$  è la proiezione di  $Q$  sul piano  $M_1M_2M_3$ , cioè la base della piramide):

$$\begin{aligned} \overline{QT} &= \sqrt{k^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2} = \\ &= 2R\sqrt{\sin^4\frac{\pi}{2n} + \sin^2\frac{\pi}{2n} \cos^2\frac{\pi}{2n}} \end{aligned} \quad (3.9)$$

L'altezza  $\overline{QS}$  si ricava partendo dal triangolo  $QSA$  nel quale si individuano le distanze  $\overline{AS} = H/2m$  e  $\overline{QA} = k$ , per cui:

$$\overline{QS} = \sqrt{\frac{H^2}{4m^2} + 4R^2\sin^4\frac{\pi}{2n}} = \frac{H}{2m} \sqrt{1 + \left(\frac{R}{H}\right)^2 16m^2\sin^4\frac{\pi}{2n}}. \quad (3.10)$$

E' utile qui esplicitare una forma del tipo  $\sin x/x$  per i limiti e le approssimazioni che faremo più avanti e riscrivere l'altezza  $\overline{QS}$  come:

$$\overline{QS} = \frac{H}{2m} \sqrt{1 + \left(\frac{R\pi^2}{H}\right)^2 \frac{m^2}{n^4} \left[\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right]^4}. \quad (3.11)$$

Utilizzando questi risultati si può ricavare la superficie laterale della piramide di base composta da due triangoli  $a_1$  e due triangoli  $a_2$ :

$$\begin{aligned} S_{pir} &= 2A_1 + 2A_2 = 2\frac{1}{2}\overline{QT}\frac{H}{m} + 2\frac{1}{2}\overline{QS}b = \\ &= \frac{RH}{m} \sqrt{\sin^4 \frac{\pi}{2n} + \sin^2 \frac{\pi}{2n} \cos^2 \frac{\pi}{2n}} + \\ &\quad \frac{2RH}{m} \sin \frac{\pi}{2n} \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + 16 \left(\frac{R}{H}\right)^2 \sin^4 \frac{\pi}{2n}} \end{aligned} \quad (3.12)$$

La somma delle aree delle piramidine che approssimano la figura può essere scritta nel seguente modo:

$$\begin{aligned} A_{\Delta} &= nmS_{pir} = \\ &= \pi RH \left\{ \sqrt{\left(\frac{\pi}{2n}\right)^2 \left[\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right]^4 + \left[\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right]^2 \cos^2 \frac{\pi}{2n}} + \right. \\ &\quad \left. \left[\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right]^2 \cos \frac{\pi}{2n} \sqrt{1 + 16m^2 R^2 \left(\frac{\pi}{2n}\right)^4 \left[\frac{2n}{\pi} \sin \frac{\pi}{2n}\right]^4} \right\} = \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi RH \left\{ 1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\pi^2 R}{H}\right)^2 \left[\frac{m}{n^2}\right]^2} \right\} \end{aligned} \quad (3.13)$$

Si nota che se  $m/n^2 \rightarrow 0$  al crescere di  $m$  e  $n$  allora l'area  $A_{\Delta}$  tende al valore desiderato. Tuttavia se scegliessimo  $m = \lambda n^2$  troveremmo  $A_{\Delta} > A$  e potremmo quindi ottenere valori di  $A_{\Delta}$  arbitrariamente elevati. Se invece scegliessimo  $m = n^{\beta}$  troveremmo  $A_{\Delta} \sim n^{\beta-2}$  per  $\beta > 2$ . L'area in questione diverge al diminuire della dimensione dei triangoli con cui cerchiamo di ricoprire l'area del cilindro di partenza. Invece di ottenere una migliore approssimazione riducendo la dimensione dei triangoli si ottiene il risultato opposto. Questo problema è conosciuto con il nome di **paradosso di Schwarz**.

Diminuendo le dimensioni dei triangoli accade che l'area  $A_\Delta$  diventa sempre più corrugata al crescere del rapporto  $m/n^2$ . Qualcuno potrebbe obiettare che ci si mette nei guai solo nel caso di una cattiva scelta di triangolazione. Tuttavia come è possibile scegliere una buona triangolazione nel caso di una superficie complessa e rugosa? Il concetto di frattale ci viene in aiuto perché è applicabile sia ai casi semplici che a quelli complicati di curve, superfici o volumi corrugati e difficili.

### 3.4 Lo scaling delle funzioni frattali

Consideriamo la curva di Koch di fig. 2.6 di Cap.2 come il grafico di una funzione  $f(t)$ . Il grafico è un insieme di punti  $(x_1, x_2)$  del piano dati dalla relazione  $(x_1, x_2) = (t, f(t))$ . Se usiamo un rapporto di scala  $\lambda = r = (1/3)^n$  con  $n = 0, 1, 2, \dots$  è chiaro che la curva triadica di Koch ha la proprietà:

$$f(\lambda t) = \lambda^\alpha f(t) \quad (3.14)$$

con l'esponente di scala  $\alpha = 1$ . La relazione di scala espressa dalla (3.14) è valida per tutti i punti dell'insieme. Lo stesso tipo di costruzione può essere usata definita su tutti i numeri reali positivi. Per esempio la funzione della legge di potenza  $f(t) = bt^\alpha$  soddisfa la relazione di omogeneità espressa dalla (3.14) per tutti i valori positivi del fattore di scala  $\lambda$ . Le funzioni che soddisfano ad una relazione di questo tipo godono della proprietà di *scaling*. Le funzioni omogenee sono molto importanti nella descrizione delle transizioni di fase in termodinamica. Molti dei progressi effettuati negli ultimi anni nella comprensione dei fenomeni critici vicini alle transizioni di fase del secondo ordine possono essere riassunti dicendo che parte della energia libera  $F$  di questi fenomeni soddisfa alla relazione:

$$F_c(\lambda t) = \lambda^{2-\alpha} F_c(t) \quad (3.15)$$

dove  $t = |T_c - T|/T_c$  è la temperatura relativa misurata dalla temperatura della transizione di fase  $T_c$  e  $\alpha$  è l'esponente critico del calore specifico.

Se scegliamo  $\lambda$  in modo che  $\lambda t = 1$  otteniamo  $F_c(\lambda t)t^{2-\alpha} = F_c(t)$  e pertanto  $F_c(t) = t^{2-\alpha}F_c(1)$ . Usando la definizione termodinamica del calore specifico

$$C = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} \quad (3.16)$$

si ottiene che per  $t \rightarrow 0$  il calore specifico si comporta come  $C \sim t^{-\alpha}$ , il che è consistente con i risultati sperimentali. La moderna teoria dei gruppi di rinormalizzazione dei fenomeni critici spiega perché l'energia gode della proprietà di scaling ed è possibile calcolare gli esponenti critici.

Le funzioni che soddisfano la (3.14) - cioè che scalano - non sono curve necessariamente frattali. Tutte le dipendenze iperboliche e/o di potenza della forma  $y = x^a$  godono della proprietà di scaling. Tuttavia i frattali che scalano (*scaling fractals*) hanno utili proprietà di simmetria e molti dei frattali discussi da Mandelbrot scalano in qualche modo.

### 3.5 La funzione di Weierstrass

La funzione di Weierstrass è stata per la prima volta proposta nel 1872 come esempio di funzione continua ma non differenziabile in alcun punto. Una forma della funzione[22] è:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta^n \cos(\alpha^n t) \quad (3.17)$$

con le condizioni:

$$\alpha > 1 \quad 0 < \beta < 1. \quad (3.18)$$

Si dimostra che la (3.17) possiede la proprietà di essere ovunque continua, essendo una serie uniformemente convergente di funzioni continue, ma non è derivabile in alcun punto se vale la condizione ulteriore:

$$\alpha\beta > 1. \quad (3.19)$$

Se chiamiamo  $\alpha = b$  e  $\beta = b^{D-2}$  la funzione di Weierstrass può anche essere riscritta nel seguente modo:

$$w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (b^{D-2})^n \cos(b^n t) \quad \text{WEIERSTRASS} \quad (3.20)$$

e le condizioni da imporre diventano:

$$\begin{aligned} \alpha > 1 &\longrightarrow b > 1 \\ 0 < \beta < 1 &\longrightarrow D < 2 \\ \alpha\beta > 1 &\longrightarrow D > 1. \end{aligned} \quad (3.21)$$

La funzione di Weierstrass si rivela utile come punto di partenza per la costruzione di un prototipo di funzione frattale autoaffine: essa infatti è la somma di cosinusoidi di periodo sempre più piccolo che generano una linea fatta di un'infinità di increspature infinitesime. Il grafico della funzione ha dimensione di Hausdorff-Besicovitch che supera l'unità. La situazione è radicalmente diversa da una funzione derivabile: per il teorema di Taylor quest'ultima tende a diventare una linea retta quando viene ingrandita.

Tuttavia la funzione di Weierstrass presenta l'inconveniente di avere uno spettro di frequenze che pur essendo non limitato superiormente, è limitato inferiormente. Questo impedisce senz'altro che la funzione sia autoaffine. Se pensiamo di partire da una piccola zona del grafico della funzione si osserverebbero variazioni a scala più piccola (dovute ai cosinusoidi di alta frequenza) e a scala più grande (dovuti ai cosinusoidi di bassa frequenza). Ampliando la scala di osservazione, ad un certo punto si raggiungerebbe un limite in cui non si apprezzano più variazioni a grande scala: la funzione non ha la capacità di variare in periodi maggiori di  $2\pi/b$ . Occorrerebbe estendere la sommatoria anche a valori negativi di  $n$ , affinché entrino in gioco anche frequenze basse, al limite nulle.

### 3.6 La funzione di Weierstrass-Mandelbrot

Mandelbrot[11] nel 1977 ha proposto una generalizzazione della funzione di Weierstrass<sup>1</sup> in cui comparissero dei contributi anche a frequenze basse e tendenti a zero. Per far questo è necessario aggiungere alla (3.20) una serie di questo tipo:

$$\begin{aligned}
 w'(t) &= \sum_{n=-\infty}^0 (b^{D-2})^n [1 - \cos(b^n t)] = \\
 &= \sum_{n=-\infty}^0 (b^{-(D-2)})^{-n} [1 - \cos(b^n t)] = \\
 &= \sum_{n'=0}^{\infty} (b^{-D+2})^{n'} [1 - \cos(b^{-n'} t)] \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

dove, per dominare la convergenza della serie, si è scelto di inserire un termine costante.

Affinchè le serie (3.20) e (3.22) siano sommabili in un'unica formula, è necessario aggiungere un analogo termine unitario anche alla (3.20). La funzione che risulta dalla somma di queste due serie è la parte reale di una particolare funzione di Weierstrass - Mandelbrot:

$$C(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{(b^{2-D})^n} \quad (3.23)$$

Essa esibisce uno spettro di frequenze che si estende da zero ad infinito in progressione geometrica, cioè il cosiddetto "spettro di Weierstrass".

La funzione di Weierstrass-Mandelbrot vera e propria è un'estensione al campo complesso di quest'ultima:

$$W(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^n t})e^{i\phi_n}}{(b^{2-D})^n} \quad \text{WEIERSTRASS-MANDELBROT} \quad (3.24)$$

con le condizioni (3.21). L'insieme dei numeri  $\{\phi_n\}$  può essere scelto secondo una regola deterministica, cioè come funzione lineare di  $n$ , oppure può essere semplicemente un insieme di numeri casuali.

<sup>1</sup>Per irreperibilità dell'edizione francese del volume [11], quanto segue non è stato confrontato con il lavoro originale di Mandelbrot.

La funzione di Weierstrass-Mandelbrot può essere utilizzata come modello per il moto browniano nel caso in cui  $D = 1.5$ , per il “rumore  $1/f$ ” per il caso  $D = 2$  (caso in cui il grafico della funzione ricopre quasi interamente il piano) e per altre modellizzazioni.<sup>2</sup>

Non esiste tuttora una dimostrazione che la dimensione della funzione di Weierstrass-Mandelbrot<sup>3</sup> abbia dimensione  $D$ .

### 3.7 Funzioni di W-M deterministiche

Vengono denominate funzioni di Weierstrass-Mandelbrot deterministiche le funzioni ottenute dall'espressione generale della (3.24) ponendo come fattori di fase dei numeri che rispettano la legge lineare:

$$\phi_n = \mu n. \quad (3.25)$$

In questo caso, la  $W(t)$  rispetta la legge di scaling:

$$W(bt) = e^{-i\mu b^{2-D}} W(t) \quad (3.26)$$

infatti:

$$\begin{aligned} W(bt) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^{(n+1)}t}) e^{i\mu n}}{(b^{2-D})^n} \\ &= e^{-i\mu(b^{2-D})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(1 - e^{ib^{(n+1)}t}) e^{i\mu(n+1)}}{(b^{2-D})^{(n+1)}} \\ &= e^{-i\mu(b^{2-D})} W(t). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Per avere un'idea di come venga a formarsi la funzione, pensiamola come una relazione che determina la posizione di un vettore sul piano

<sup>2</sup>Cfr. Mandelbrot[11]. Il rumore  $1/f$  è un rumore presente nei circuiti elettronici con elementi a semiconduttori in cui le componenti a bassa frequenza danno un contributo molto elevato. E' dovuto alle impurezze presenti nel silicio.

<sup>3</sup>Per ora si sa che questa dimensione deve soddisfare la disuguaglianza:

$$D - (B/b) \leq D(W_b) \leq D$$

con  $B$  sufficientemente grande in relazione a  $b$  [Cfr. Feder, *Fractals*, Plenum Press, p. 27-30].

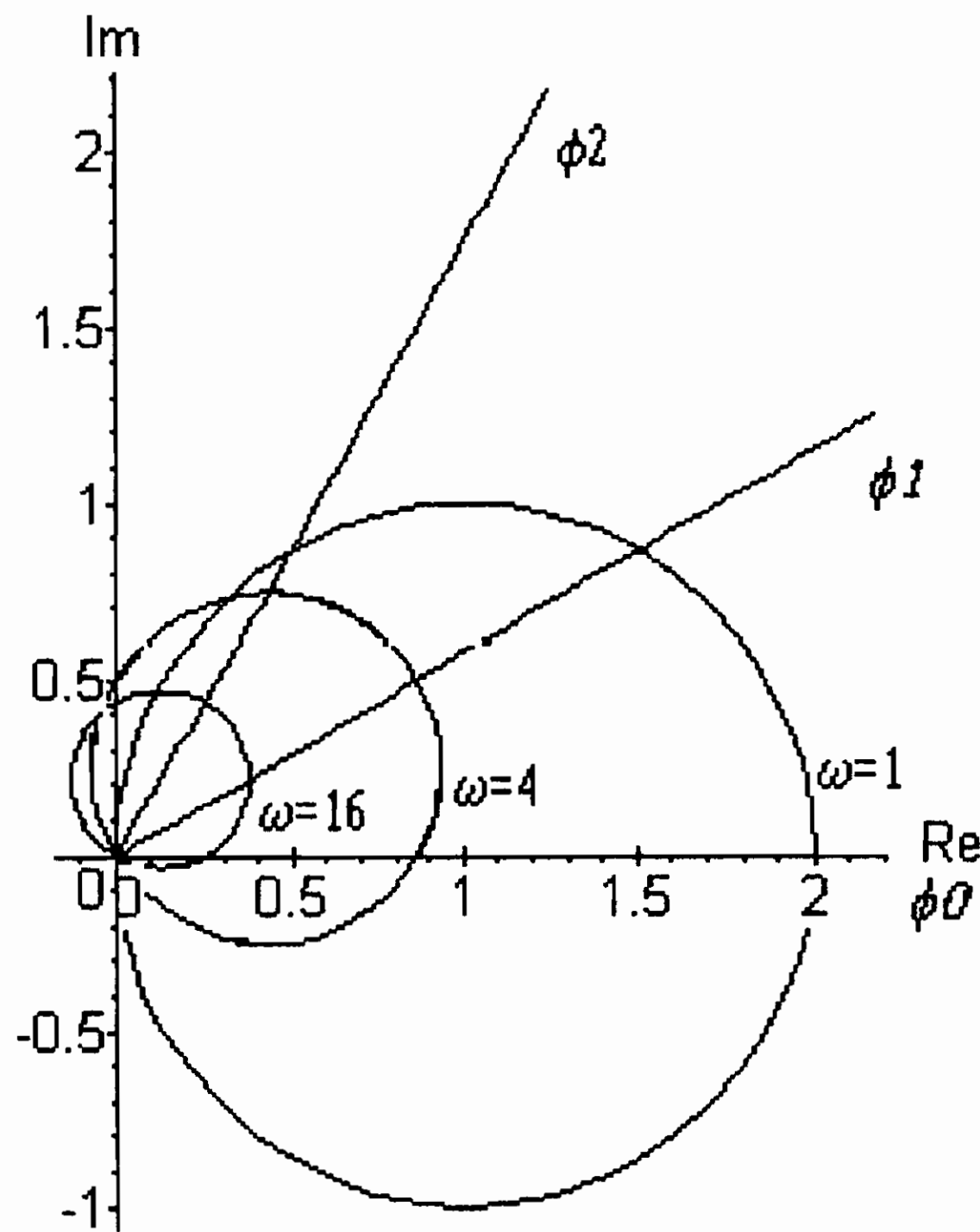


Figura 3.6: Primi tre termini distinti ( $n = 0, 1, 2$ ) della funzione  $W(t)$  deterministica con parametri  $b = 4$ ,  $D = 1.5$ ,  $\mu = \frac{\pi}{6}$ . Sono in evidenza gli angoli di fase.

complesso espressa in funzione del tempo. Una rapida analisi conduce a concludere che un singolo termine della sommatoria corrisponde ad un vettore di raggio  $(b^{2-D})^{-n}$  (progressione geometrica negativa) rotante in senso antiorario con pulsazione  $b^n$  (progressione geometrica) intorno ad un centro che varia di posizione (vedi fig. 3.6). Dalla somma dei soli primi tre termini risulta un grafico piuttosto complicato (fig. 3.7). La dipendenza dal tempo si può apprezzare meglio facendo un grafico della parte reale della funzione (fig. 3.8).

Due particolari esempi della  $W(t)$  si ottengono ponendo nella legge di assegnazione delle fasi  $\mu = 0$  (come se la funzione dovesse essere moltiplicata per uno), oppure  $\mu = \pi$  (che equivale a moltiplicare la funzione alternatamente per  $+1$  e  $-1$ ). Selezionando nel primo caso la parte reale  $\Re(W(t))$  della funzione e nel secondo caso la parte immaginaria  $\Im(W(t))$ , otteniamo due funzioni reali di variabile reale, di



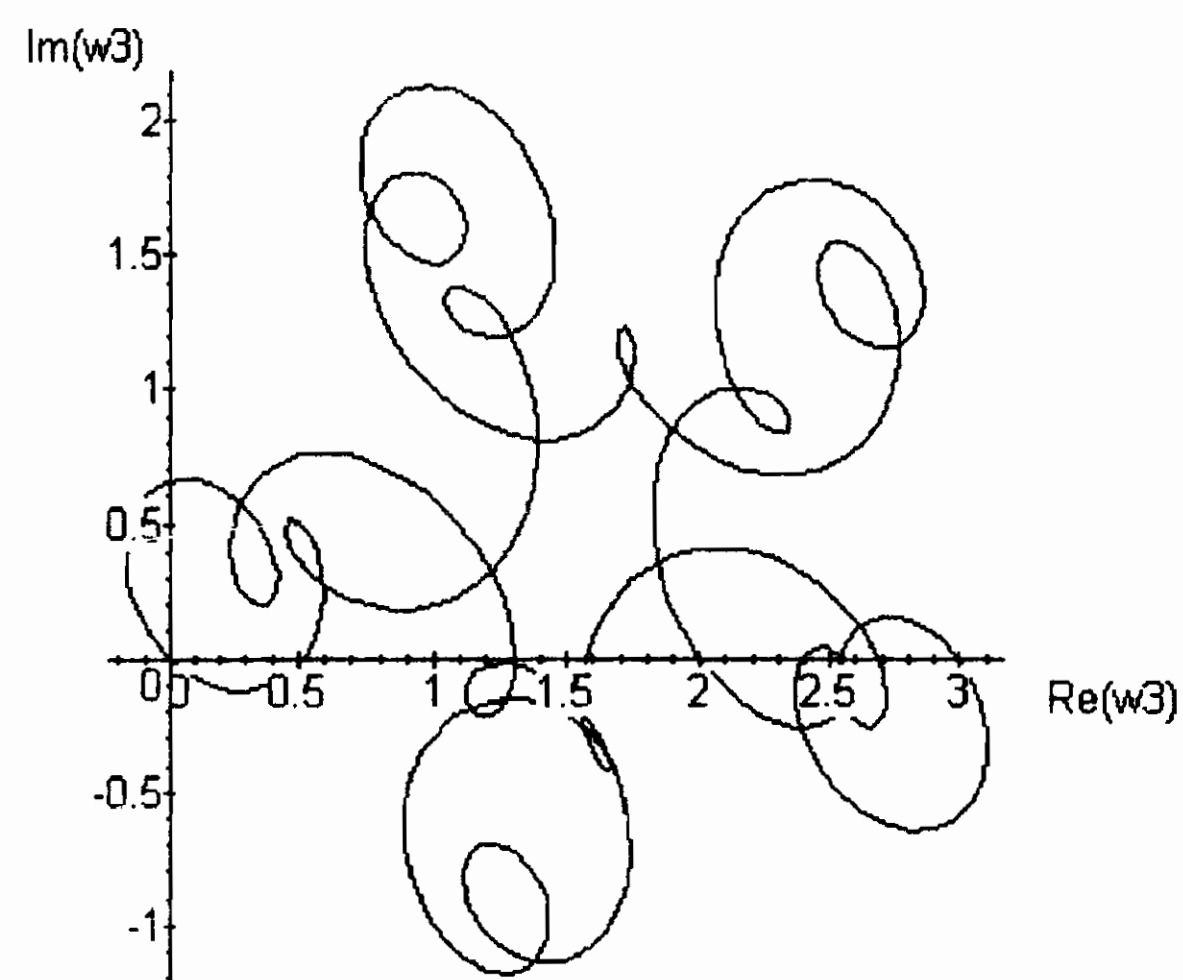


Figura 3.7: Somma dei primi tre termini della funzione  $W(t)$

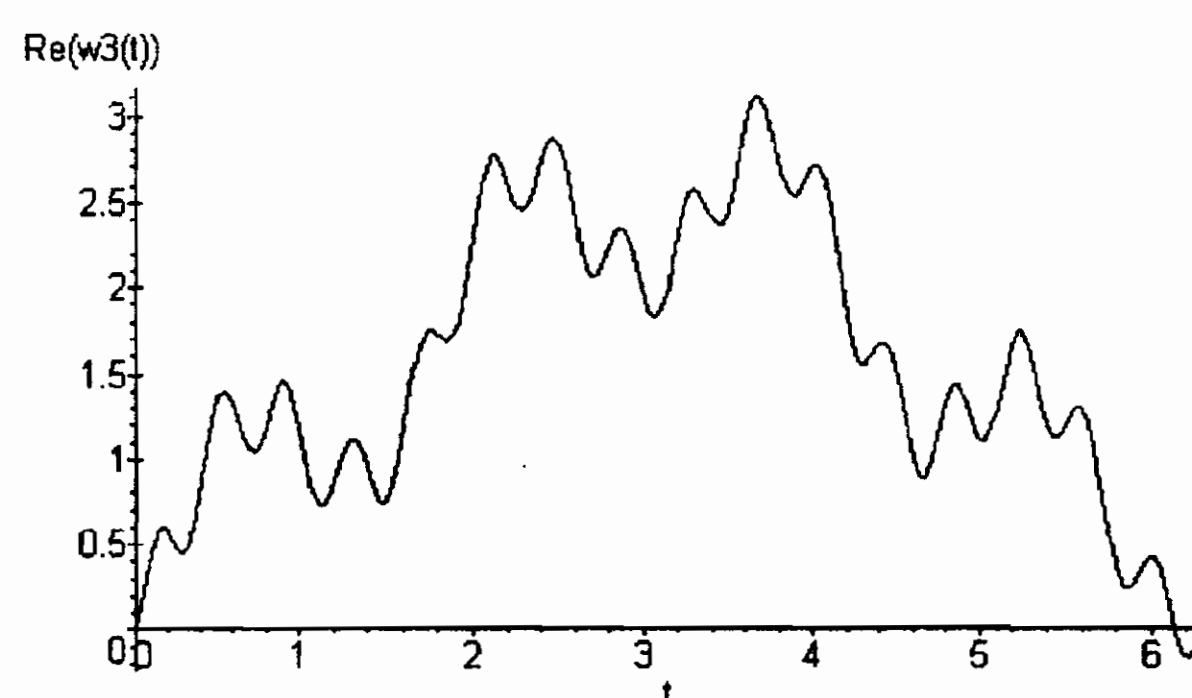


Figura 3.8: Parte reale della somma dei primi tre termini della funzione  $W(t)$

cui è possibile fare un grafico, allo scopo di comprendere meglio alcune loro caratteristiche.

$$C(t) = \Re W(t)|_{\mu=0} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos(b^n t)}{(b^{2-D})^n} \quad (3.28)$$

$$A(t) = \Im W(t)|_{\mu=\pi} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(b^n t)}{(b^{2-D})^n}. \quad (3.29)$$

Concentriamo la nostra attenzione sulla funzione  $C(t)$  e vediamo dei grafici che illustrano la funzione per un valore del parametro  $b = 1.5$  e per diversi valori di  $D$  (vedi fig. 3.9 - 3.11).

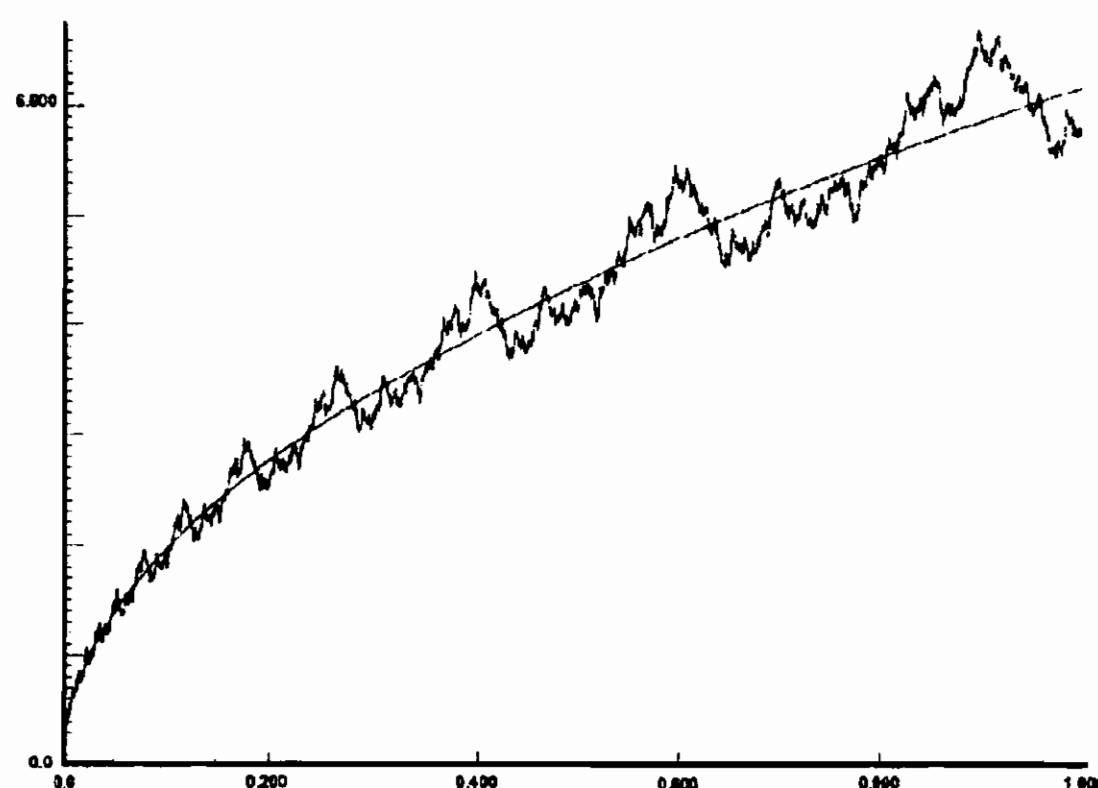


Figura 3.9: Funzione  $C(t)$  con parametri  $b = 1.2$  e  $D = 1.5$

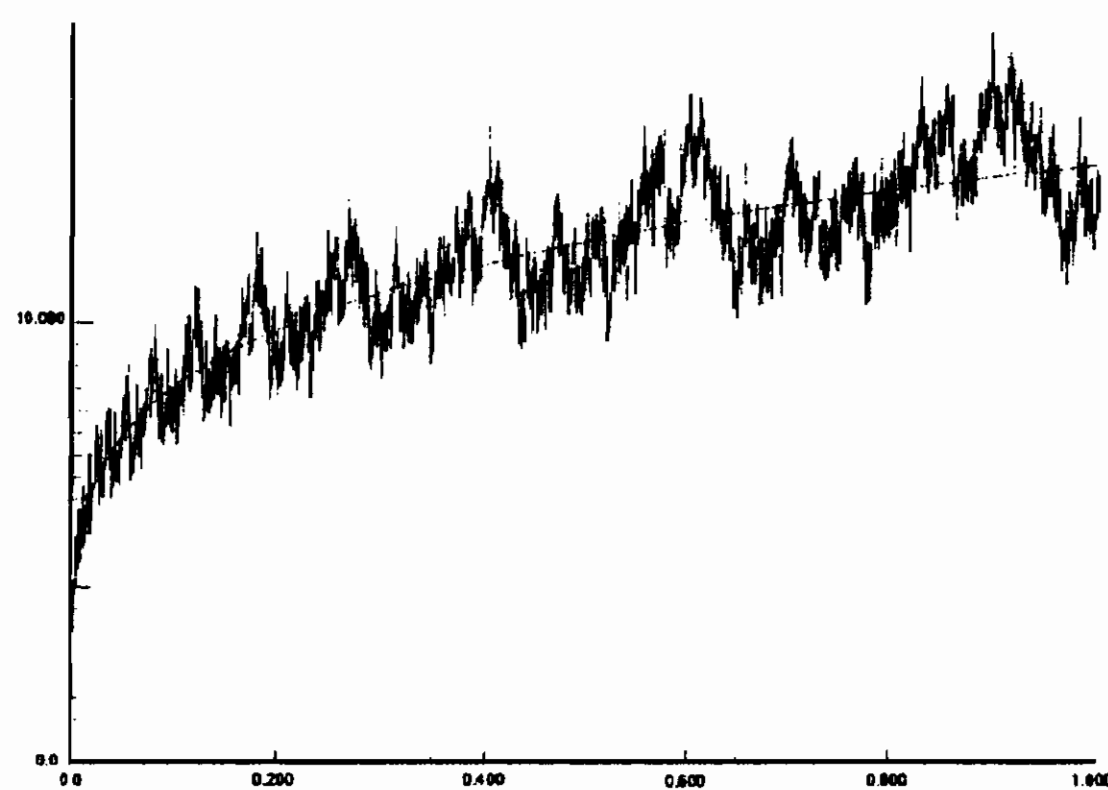
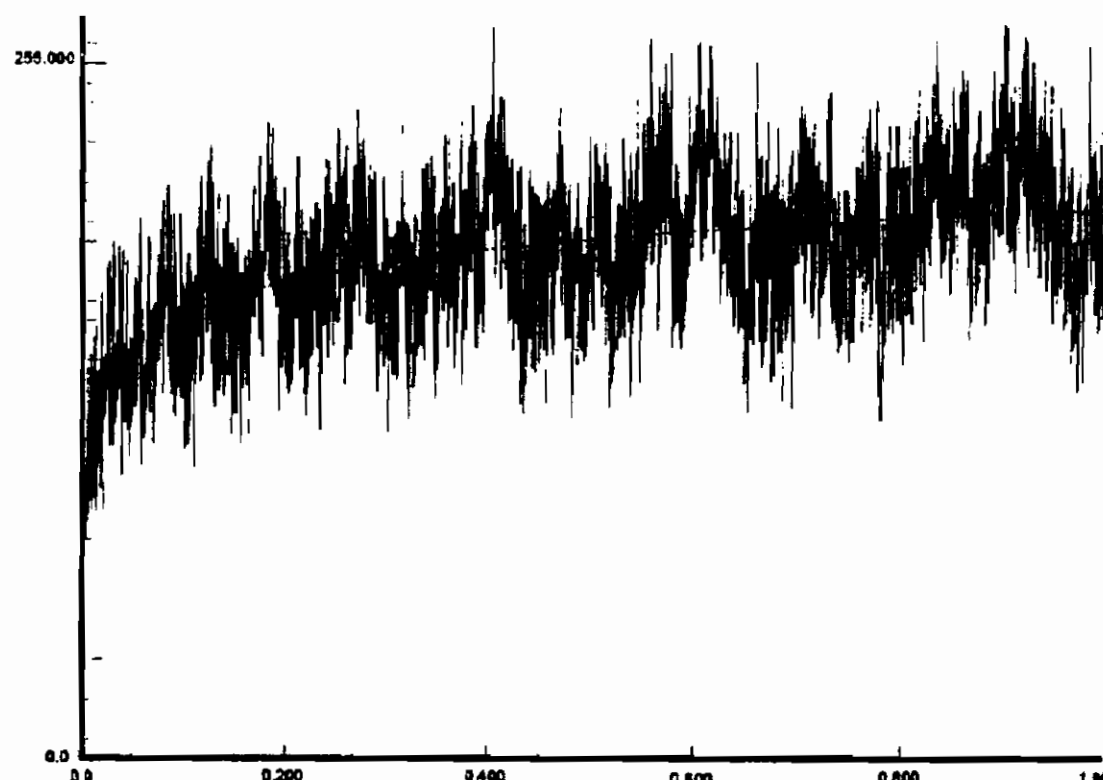


Figura 3.10:  $D = 1.8$

Figura 3.11:  $D = 1.99$ 

Si nota molto bene dai grafici che il parametro  $D$  influisce nettamente sulla tortuosità della linea, indicando visivamente come questo sia ragionevolmente qualificabile come la dimensione frattale della funzione.

La funzione  $C(t)$  gode delle seguenti proprietà:

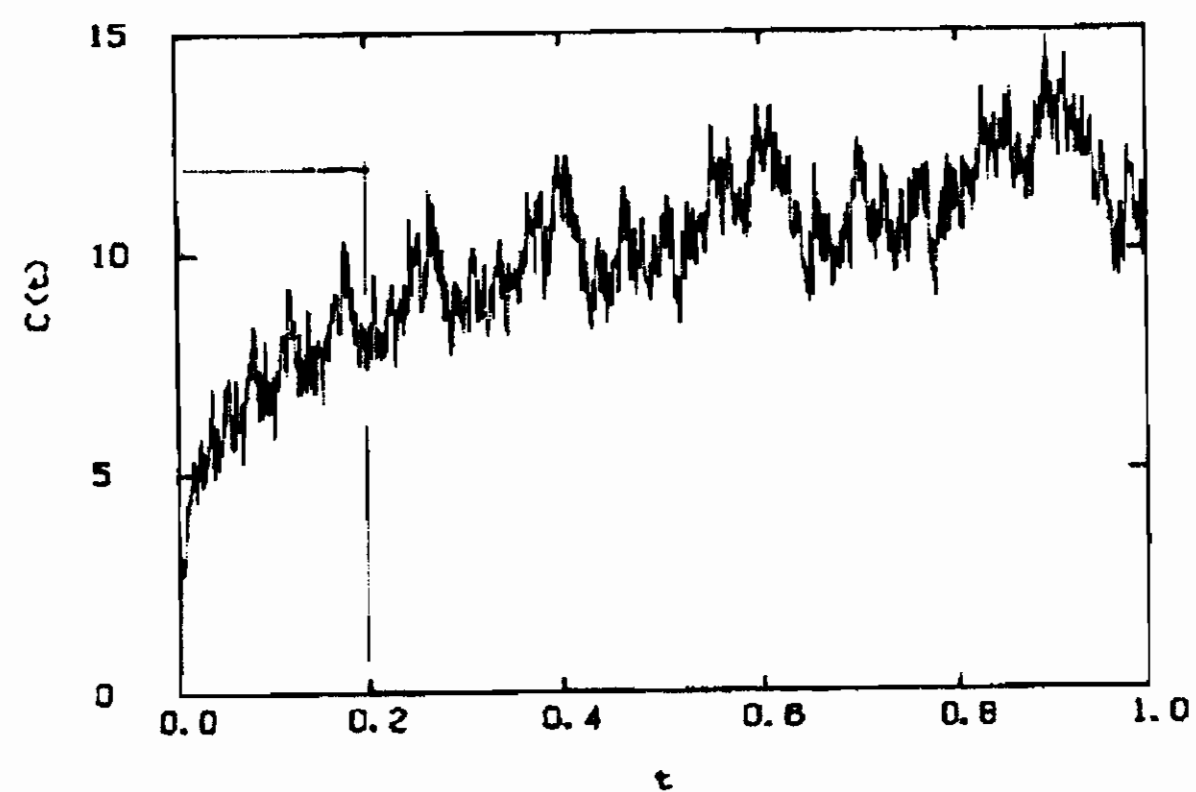
- non è mai negativa;
- è continua in ogni punto;
- non è derivabile in alcun punto;
- obbedisce alla legge di scaling:

$$C(bt) = b^{2-D}C(t). \quad (3.30)$$

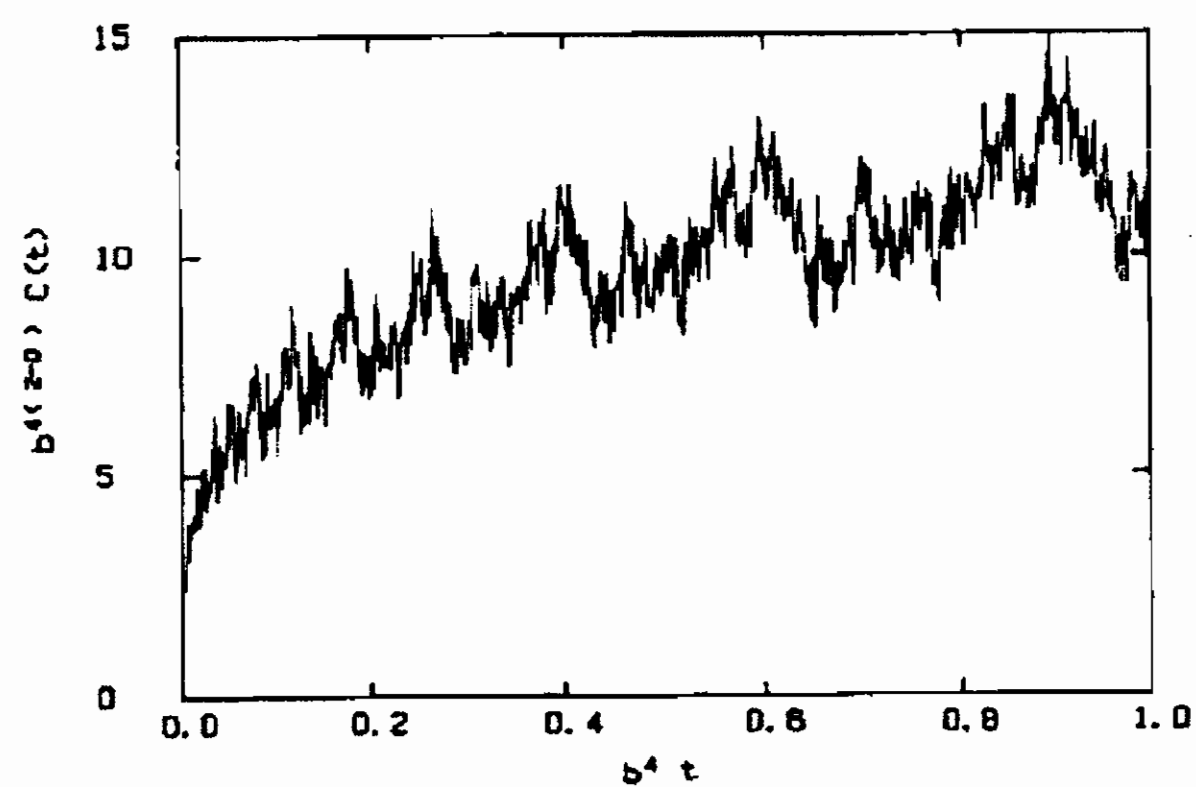
Quest'ultima proprietà è verificabile direttamente per via grafica. La fig. 3.12a rappresenta la  $C(t)$  nell'intervallo  $[0, 1]$ . In fig. 3.12b la scala orizzontale è stata ampliata di  $b^4 \approx 1.97$ , e la scala verticale è stata ampliata di  $b^{4(2-D)} \approx 1,38$ : come doveva verificarsi, il grafico ottenuto è identico a quello di partenza. Ciò dimostra visivamente l'autoaffinità della funzione  $C(t)$ .

E' possibile apprezzare quale sia l'effetto della variazione di  $b$  sul grafico della  $C(t)$  come mostrato in fig. 3.13 e 3.14.

Le oscillazioni a grande scala aumentano di ampiezza, ma un ingrandimento dell'immagine rivela che la curva non cambia molto a



(a)



(b)

Figura 3.12: Funzione  $C(t)$  con parametri  $D = 1.8$  e  $b = 1.5$ ; (a) funzione originale, (b) funzione riscalata

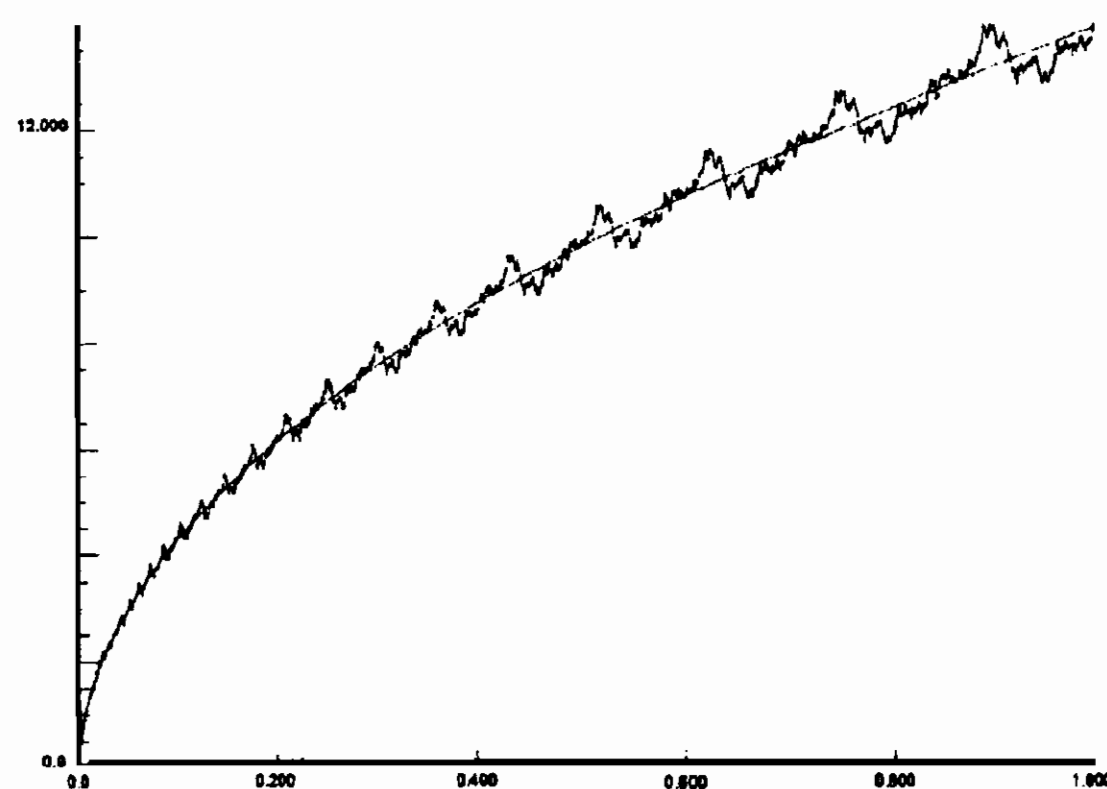
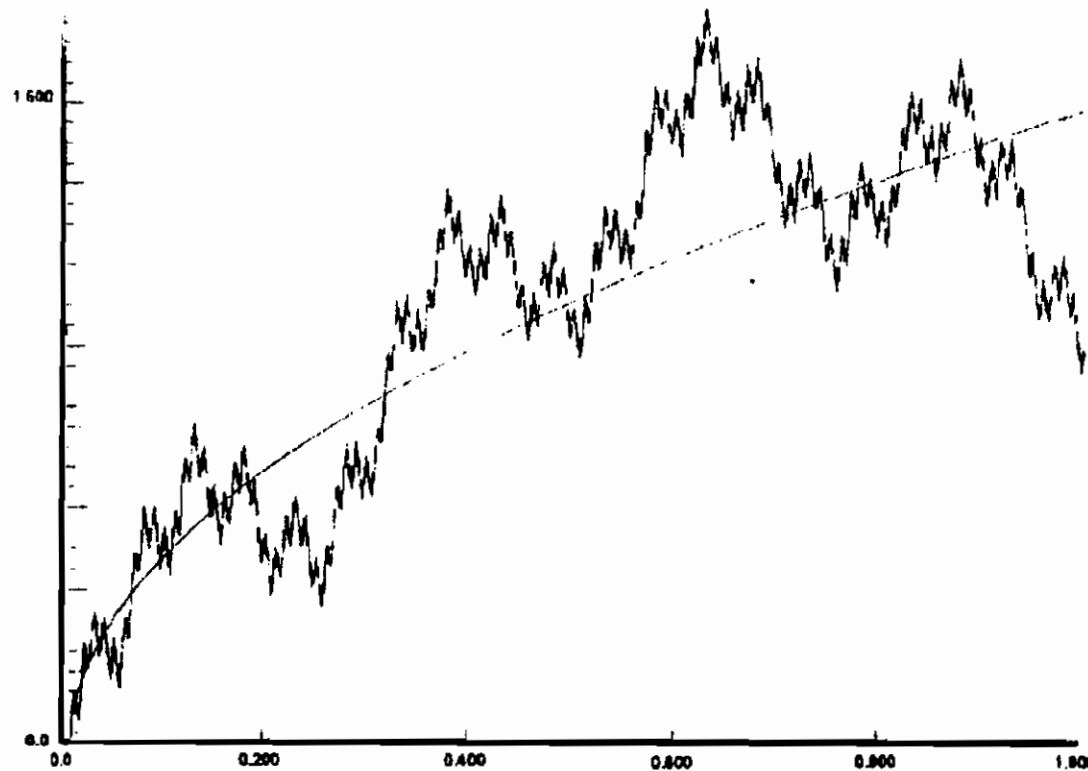


Figura 3.13: Funzione  $C(t)$  con parametri  $D = 1.5$  e  $b = 1.2$

Figura 3.14:  $b = 5$ 

piccola scala. La variazione di  $b$  non sembra avere effetto sulla frattalità della funzione.

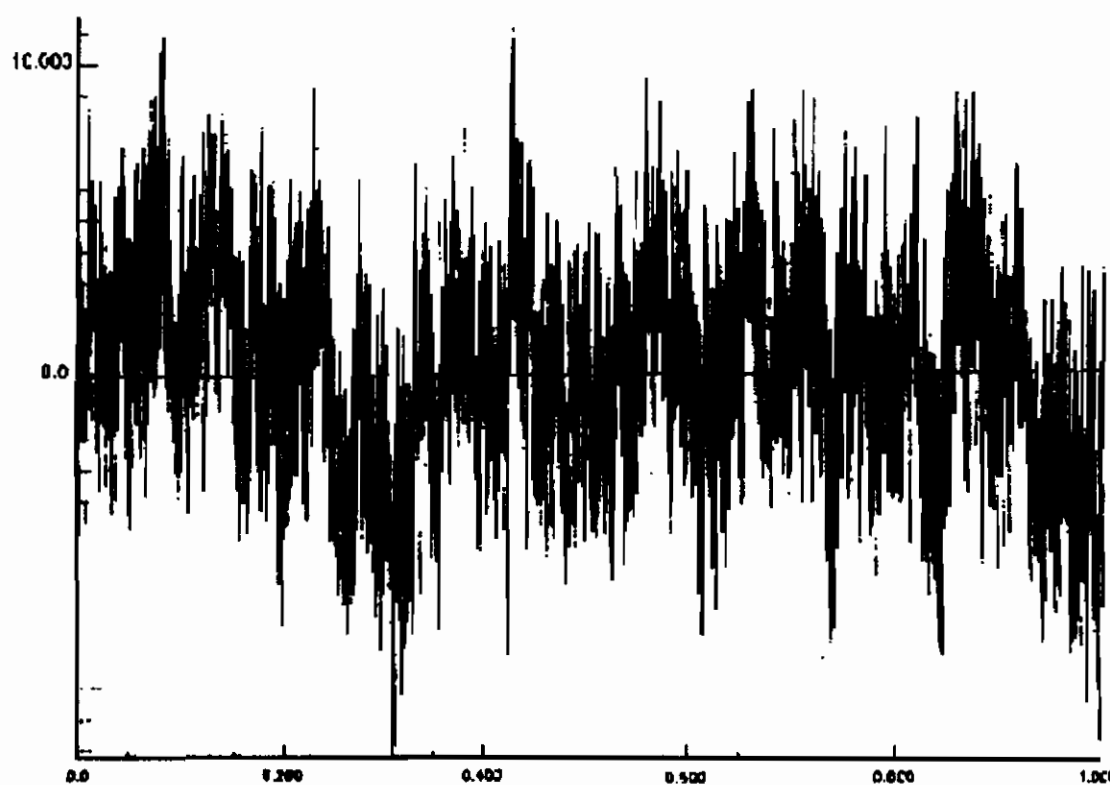
### 3.8 Funzioni di W-M stocastiche

Le funzioni di Weierstrass-Mandelbrot stocastiche si costruiscono assegnando le fasi  $\{\phi_n\}$  scegliendo numeri a caso compresi tra 0 e  $2\pi$ .



Figura 3.15: Esempio di funzione di Weierstrass-Mandelbrot stocastica,  $\mathfrak{RW}(t)$ , con parametri  $b = 1.5$  e  $D = 1.2$

Le funzioni di Weierstrass-Mandelbrot stocastiche non rispettano più

Figura 3.16:  $D = 1.5$ Figura 3.17:  $D = 1.99$ 

una rigorosa legge di scaling, tuttavia è nuovamente sorprendente la somiglianza che può avere un ingrandimento con la funzione originale. In generale è impossibile stabilire quale sia un ingrandimento e quale no. Possiamo fare il grafico della parte reale di tali funzioni (vedi fig. 3.15 - 3.17).

Si può dire che ogni funzione di Weierstrass-Mandelbrot stocastica è un elemento dell'ensemble di tutte le funzioni generate da ogni possibile set di numeri casuali. Le funzioni deterministiche rientrano tra queste come sottoinsieme di misura nulla. Le caratteristiche delle funzioni di Weierstrass-Mandelbrot stocastiche vanno studiate "statisticamente", introducendo il concetto di media di ensemble  $\langle \dots \rangle_e$ , cioè il valor medio

calcolato su tutte le possibili funzioni dell'insieme. Ad esempio, il valor medio degli incrementi è nullo :

$$\langle [W(t'') - W(t')] \rangle_e = 0. \quad (3.31)$$

Questa volta non valgono le considerazioni fatte a riguardo dell'andamento generale delle funzioni di Weierstrass-Mandelbrot deterministiche. Tuttavia, è facile notare che generalmente la funzione oscillerà intorno ad un valor medio nullo, indicando che il trend generale segue semplicemente l'asse orizzontale.

E' possibile sostituire la media di ensemble con la media temporale. Ciò può essere spiegato in questo modo. Iniziamo a considerare un numero finito  $N$  di termini della serie di Weierstrass-Mandelbrot. In questo caso le fasi  $\phi_n$  rappresentano delle coordinate su un toro  $N$ -dimensionale (le  $\phi_n$  sono tutte ortogonali tra loro e variano tutte da 0 a  $2\pi$ ). Ogni punto del toro è associato perciò ad una particolare funzione di Weierstrass-Mandelbrot stocastica. Eseguire la media di ensemble corrisponde a mediare su tutti i punti del toro. Invece, mediare su  $t$  corrisponde a fissare un punto del toro e quindi mediare lungo una traiettoria definita dall'equazione:

$$\phi'_n(\tau) = \phi_n + b^n \tau \quad (3.32)$$

cioè lungo una curva che si avvolge sul toro con una frequenza angolare  $b^n$ .

La media fatta su questa traiettoria equivale a quella di ensemble se e solo se la traiettoria stessa passa per ogni punto del toro. Il teorema ergodico per i tori garantisce questa condizione se  $b$  è irrazionale. Quindi tra tutte le funzioni di Weierstrass-Mandelbrot, le uniche eccezioni a questa regola formano un sottoinsieme di misura nulla. Tuttavia dall'analisi grafica sembra emergere che non ci sia alcuna netta differenza tra i grafici delle funzioni per due valori  $b$  irrazionali e razionali. Questo fatto dà una giustificazione "semiempirica" al processo di scambio delle medie di ensemble e temporale.

Questa proprietà delle equazioni di Weierstrass - Mandelbrot stocastiche permette tra l'altro di dimostrare che la loro dimensione frattale sia proprio indipendente dal parametro  $b$  e coincida invece con il parametro  $D$ , come ci si aspettava dai grafici.



# Capitolo 4

## Random Walks e Frattali

### 4.1 Introduzione

L'aleatorietà, la casualità sono proprietà caratteristiche di moltissimi se non di tutti i fenomeni naturali; in misura più o meno marcata l'aspetto casuale condiziona i fenomeni fisici. Anche il più perfetto dei diamanti o dei cristalli ha numerose impurità e/o difetti dislocati a caso al suo interno. La luce dei diamanti non sarebbe tale se il cristallo fosse perfettamente e rigorosamente cubico. Non fosse altro che per una semplicissima ragione: anche il cristallo più perfetto ha *tutti* i suoi atomi al loro giusto posto solo in media, perché gli atomi sono sempre in agitazione termica.

Ora si dà il caso che molti fenomeni naturali siano molto ben descritti dai frattali, ma per comprendere questa fondamentale scoperta sperimentale è necessario sviluppare il concetto di frattale aleatorio (*random fractal*). A questo proposito il moto browniano costituisce un esempio fisico, chimico e biologico di straordinaria importanza di un processo casuale con proprietà frattali ben definite.

Il concetto di processo stocastico, infatti, è una scoperta del XX Secolo che trae origine dagli studi di Robert Brown. Einstein, nella sua tesi di dottorato, riuscì a formalizzare ciò che era noto con il nome

generico di *moto browniano*. Nel Secolo XXI, Christian Wiener elaborò il concetto matematico di processo stocastico che permise di inquadrare correttamente non solo il moto browniano ma anche moltissimi altri fenomeni, non escluso l'andamento dei prezzi della Borsa francese ([capitolo 11 seconda parte])

Come al solito, cominceremo dal caso particolarmente semplice del moto browniano unidimensionale per poi estenderlo al caso di *random walks* multidimensionali<sup>1</sup>. Più avanti arriveremo alla generalizzazione del moto browniano frazionale introdotto da Mandelbrot. Una accurata analisi dovuta a Hurst [24] indica che la statistica di molti fenomeni naturali è rappresentata al meglio da funzioni del tipo “moto browniano frazionale”.

## 4.2 Il Moto Browniano di Einstein

Robert Brown (1773-1858), un botanico inglese, nel 1827-28 fu il primo a scoprire, mediante l'osservazione con un microscopio appositamente costruito, alcuni moti a zig-zag di sospensioni di polline di *Clarkia pulchella* (egli riportò osservazioni di F.W. von Gleichen di 60 anni prima). La tentazione fu quella di attribuire tale movimento ad una sorta di *movimento vitale* intrinseco delle cellule gamete maschili (punto di vista sostenuto da molti scienziati dell'epoca che pretendevano di avere in tal modo individuato la sorgente della vita). Ma il pragmatismo del botanico inglese lo portò a concludere un suo scritto con le parole: *la mia ipotesi sugli organi maschili è da abbandonare*.

Continuando i suoi studi usando particelle sicuramente inorganiche, osservò che *quelle particelle di materia solida estremamente piccole, se poste in sospensione di acqua pura o di altri fluidi acquosi, mostrano moti che io non sono in grado di giustificare e le cui irregolarità ed apparente indipendenza ricordano in massima parte il tipico moto poco rapido di alcuni semplici microbi delle infusioni*.

---

<sup>1</sup>Non è detto che in questa prima versione il capitolo dei *Levi flights* e dei fenomeni multidimensionali venga scritto.

Nè Brown nè gli scienziati che per settant'anni lo seguirono, riuscirono a decifrare il meccanismo mediante il quale l'interazione particelle-fluido potesse generare il *moto browniano*.

Il moto non era di origine biologica (forma primordiale di vita) bensì di origine fisica.

Einstein scrisse “...in accordo con la teoria molecolare cinetica del calore, corpi di dimensioni osservabili microscopicamente, sospesi in un liquido, possono compiere movimenti di ampiezza tale da poter essere osservati al microscopio. E' possibile che tali movimenti coincidano con il cosiddetto moto molecolare browniano; comunque le informazioni riguardo a quest'ultimo, di cui sono in possesso, sono così poco precise da non permettermi di esprimere un giudizio in merito. Se il moto che discuterò potrà essere realmente osservato, allora la termodinamica classica non potrà più essere considerata come non applicabile con precisione ai corpi anche di dimensioni osservabili al microscopio. Per contro, se la previsione di tale movimento dovesse risultare non corretta, ciò sarebbe un pesante argomento contro la concezione cinetico-molecolare del calore” [23].

L'interpretazione di Einstein è quindi che le particelle in sospensione presentano dei movimenti irregolari a causa del moto di agitazione termica delle molecole del fluido.

Come sappiamo oggi, ogni macrosistema costituito da una miriade di microsistemi è continuamente in agitazione termica ed ogni corpuscolo subisce continuamente collisioni con gli elementi vicini a causa della energia termica. Data una particella browniana sospesa in un sistema monoatomico a temperatura  $T$ , essa possiede in media una energia cinetica  $K = 3/2 kT$  (con  $k$  costante di Boltzmann). Einstein, nel 1905, ha mostrato che ciò è vero indipendentemente dalle dimensioni della particella microscopica, ed assumendo che *i movimenti di una stessa particella dopo differenti intervalli di tempo debbano essere considerati processi mutuamente indipendenti, fintanto che questi intervalli di tempo non sono troppo piccoli*.

In assenza di attrito, ogni urto della particella con le molecole del fluido produce dei semplici *spostamenti* a causa dell'attrito viscoso che incontra in quanto la variazione di velocità prodotta dall'urto viene riassorbita dalla viscosità. Questa semplice osservazione è in sostanza una definizione primordiale di *random walk*: un corpo può *saltare* da un punto ad un altro dello spazio con determinate probabilità.

E' pertanto dallo studio dettagliato del moto browniano che si può imparare come l'equilibrio si raggiunge e perché. Il moto browniano, visto al microscopio, appare quindi come un insieme di spostamenti casuali (*random walks*) in direzioni casuali. Una assunzione di Einstein, banale ma profonda, è quella che nel moto browniano *non è la posizione del corpuscolo al tempo  $t$  ad essere indipendente dalla posizione del corpuscolo ad un tempo  $t^* \neq t$ , ma è lo spostamento del corpuscolo in un intervallo di tempo  $\Delta t$  ad essere indipendente dallo spostamento del corpuscolo in un intervallo di tempo  $\Delta t^*$  diverso.*

Consideriamo quindi  $n$  particelle sospese in un liquido *monodimensionale* al tempo  $t$ . Ogni particella, in un tempo  $\tau$  piccolo (ma comunque grande rispetto al tempo medio che intercorre tra due urti successivi, così da rendere impossibile la previsione deterministica della sua nuova posizione) si sia spostata di un tratto  $\xi$ . Sia  $p(\xi, \tau)$  la probabilità di uno spostamento  $\xi$ . Sia inoltre, ovviamente:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi, \tau) d\xi = 1 \quad (4.1)$$

Si può a questo punto introdurre l'ipotesi che la situazione sia stazionaria e che pertanto  $p(\xi, \tau)$  dipenda solo da  $\xi$  e non da  $\tau$  e scrivere, per il numero di particelle che hanno subito uno spostamento dal punto  $x$  ad un punto compreso nell'intervallo  $[(x + \xi), (x + \xi + d\xi)]$ :

$$dn = np(\xi)d\xi.$$

Si assuma ancora che la situazione sia perfettamente simmetrica e che il segno degli spostamenti non sia preferenziale, cioè che:

$$p(-\xi) = p(\xi).$$

Si calcoli ora il numero  $\frac{dn}{dx} = f(x, t + \tau)$  di particelle per unità di volume (monodimensionale) che si trovano nella posizione  $x$  al tempo  $t + \tau$ . Esso è dato dalla somma di tutte le particelle che, al tempo  $t$  si trovano in  $x + \xi$  e che hanno subito uno spostamento  $-\xi$  (per correttezza sostituiamo la somma con un integrale in quanto ogni punto dell'asse reale rappresenta una posizione occupabile):

$$f(x, t + \tau) = dx \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \xi, t) p(\xi) d\xi. \quad (4.2)$$

Essendo  $\tau$  piccolo, il primo termine della (7.53) può essere sviluppata in serie ottenendo:

$$f(x, t + \tau) \approx f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} \quad (4.3)$$

Questa equazione introduce l'ipotesi che le transizioni a grande  $\xi$  sono poco probabili. Possiamo anche sviluppare in serie il secondo membro della (7.53), questa volta fino al secondo termine in  $x$  e scriverla pertanto come:

$$f(x, t + \tau) = f(x, t) + \xi \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2 x^2} + \dots \quad (4.4)$$

In definitiva, la (7.53) diventa:

$$\begin{aligned} f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &\approx \\ &\approx \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ f(x, t) + \xi \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} + \frac{\xi^2}{2!} \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2 x^2} \right] p(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.5)$$

La (7.53) si può allora scrivere finalmente, facendo la somma degli integrali:

$$\begin{aligned} f(x, t) + \tau \frac{\partial f(x, t)}{\partial t} &\approx f(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} p(\xi) d\xi + \\ &+ \frac{\partial f(x, t)}{\partial x} \int_{-\infty}^{+\infty} \xi p(\xi) d\xi + \frac{\partial^2 f(x, t)}{\partial^2 x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{2!} p(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Ora, il primo addendo a sinistra vale 1 per la (4.1); il secondo addendo si riduce alla derivata parziale.

A questo punto conviene introdurre, con Einstein, un coefficiente di diffusione  $\Theta$  che caratterizza una *densità di corrente intrinseca di diffusione*, per definizione legata al flusso di particelle  $j_\Theta$  che attraversano, nell'unità di tempo, una superficie unitaria immersa nel fluido. La densità di corrente di diffusione viene pertanto definita come:

$$j_\Theta = - \frac{\Theta}{2} \frac{\partial f(x, t)}{\partial x}; \quad (4.7)$$

$\Theta$  viene allora valutato come spostamento quadratico medio, cioè (il fattore 2 è un semplice artificio):

$$\Theta = \frac{2}{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\xi^2}{2!} p(\xi) d\xi; \quad (4.8)$$

dal che la varianza della distribuzione è:

$$\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = \Theta t \quad (4.9)$$

Detto quanto sopra, la densità di probabilità  $p(x)$  soddisfa la equazione<sup>2</sup> di evoluzione:

$$\frac{\partial}{\partial t} p(x, t) = \frac{\Theta}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(x, t) \quad \text{FOKKER PLANCK STAZ.} \quad (4.10)$$

La (4.10) è la tipica equazione di Fokker Plank della diffusione stazionaria che si studia nella termodinamica statistica la quale, nel caso di  $n$  particelle in sospensione, una volta imposta, per qualsiasi  $t$  positivo, la conservazione di  $n \int_{-\infty}^{+\infty} p(x, t) dt = n$  e la condizione iniziale  $x_o = x(0) = 0$ , ammette la soluzione gaussiana:

$$p(x, t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi\Theta t}} \exp \frac{(x - x_o)}{2\Theta t}. \quad (4.11)$$

Chiamando  $\xi = x - x_o$  si può finalmente scrivere:

$$p(\xi, t) = \frac{n}{\sqrt{2\pi\Theta t}} \exp \frac{(\xi - \xi_o)}{2\Theta t}. \quad (4.12)$$

---

<sup>2</sup>Ritroveremo questa equazione anche nel Cap. 11 della seconda parte. I primi lavori nei quali compare tale equazione risalgono ad Einstein , Langevin , Fokker e Planck

Il coefficiente di diffusione di Einstein  $\Theta$  si ottiene dalla analisi macroscopica del moto di una particella di raggio  $r$  immersa in un fluido di viscosità  $\eta$ , sottoposta alla legge di Stokes. Ovverossia: detta  $F$  la forza esterna e  $v$  la velocità della sferetta di raggio  $r$ :

$$v = \frac{F}{6\pi\eta r}. \quad (4.13)$$

In condizioni di equilibrio, quando la forza esterna e le correnti di diffusione statisticamente si bilanciano, la distribuzione di probabilità è data dalla distribuzione di Boltzmann<sup>3</sup>:

$$g(\xi, T) = A \exp F\xi/kT$$

con  $A$  costante di normalizzazione,  $k$  costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura.

Dalla legge di Stokes si può dedurre che la densità di corrente di diffusione può essere scritta anche come:

$$j_{\Theta} = \frac{g(\xi, T)F}{6\pi\eta r}$$

con il che si può ricavare  $j_D$  dalla (4.7) e scrivere:

$$-\frac{\Theta}{2} \frac{\partial g(\xi, T)}{\partial \xi} = \frac{f(\xi, T)F}{6\pi\eta r} \quad (4.14)$$

Derivando la distribuzione di Boltzmann, inserendo il risultato nella (4.14) si ricavano immediatamente due possibili formule per  $D$ :

$$D = \frac{f(\xi, T)F}{3\pi\eta r}; \quad D = \frac{R}{N_o} \frac{1}{3\pi\eta r} \quad (4.15)$$

che permette di esprimere  $D$  sia in termini della temperatura  $T$ , sia in termini della costante dei gas perfetti  $R$  e del numero di Avogadro (oltre che della viscosità e del raggio delle sferette)<sup>4</sup>.

<sup>3</sup>Questa equazione viene ricavata (A.20) nel Cap. A.

<sup>4</sup>Vale la pena di sottolineare che, all'inizio del XXI Secolo, queste misure venivano eseguite nella speranza di poter stimare le dimensioni molecolari.

Per quanto riguarda le proprietà del moto browniano, esaminando la (A.13) ci si accorge che, aumentando la risoluzione del microscopio usato per l'osservazione del fenomeno, si produce un *random walk* autosimile; in altre parole il moto browniano gode della proprietà di autosimilarità. Se si considera invece *anche* il tempo, la funzione  $p(\xi, t)$  non è autosimile ma *autoaffine*<sup>5</sup>.

### 4.3 Random walks mono-dimensionali

Consideriamo un moto browniano monodimensionale e siano, nell'intervallo di tempo  $\tau$ ,  $+\xi$  e  $-\xi$  gli incrementi lungo l'asse  $x$ . Operativamente possiamo pensare a  $\xi$  dell'ordine della dimensione media del corpuscolo in esame e  $\tau$  dell'ordine diverse unità maggiore del tempo medio di collisione. Naturalmente  $\xi$  non è zero. Assumiamo allora, come nel paragrafo 4.2, una distribuzione gaussiana:

$$p(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{\Theta\tau}\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2\Theta\tau}\right) \quad (4.16)$$

Questa formula contiene informazioni importantissime. Immaginiamo il processo di *random walk* su scala microscopica come segue: scegliamo  $\xi$  a caso (passo  $\xi_i$ ) ad intervalli di tempo regolari  $\tau$ ; la probabilità di trovare  $\xi$  tra  $\xi$  e  $\xi + d\xi$  è data dalla funzione densità di probabilità  $p(\xi, \tau)$  definita dalla (4.16); una sequenza di spostamenti  $\{\xi_i\}$  è un insieme di variabili aleatorie, gaussiane per definizione, e quindi la varianza del processo è quella data dalla (4.9):  $\sigma^2 = \langle \xi^2 \rangle = \Theta\tau$ .

La gaussiana normalizzata si ottiene mediante un cambiamento di variabile nella (4.16) e successiva normalizzazione. La sostituzione da operare è:  $\frac{\xi}{\sqrt{\Theta\tau}} \rightarrow \epsilon$  e  $\frac{d\xi}{\Theta\tau} \rightarrow d\epsilon$  in modo da avere spostamenti  $\epsilon$  con valore medio  $\langle \epsilon \rangle = 0$  e varianza  $\langle \epsilon^2 \rangle = 1$ .

La funzione che descrive la posizione  $X(t = n\tau) = \sum_1^n \xi_i$  in funzione del tempo  $t$  a partire da una posizione iniziale  $X(0) = 0$  tende ad una funzione aleatoria per  $\tau \rightarrow 0$  e  $\xi \rightarrow 0$ . Mandelbrot chiama  $X(t)$  funzione

<sup>5</sup>Rivedremo meglio il significato di questo termine nel paragrafo 4.4.



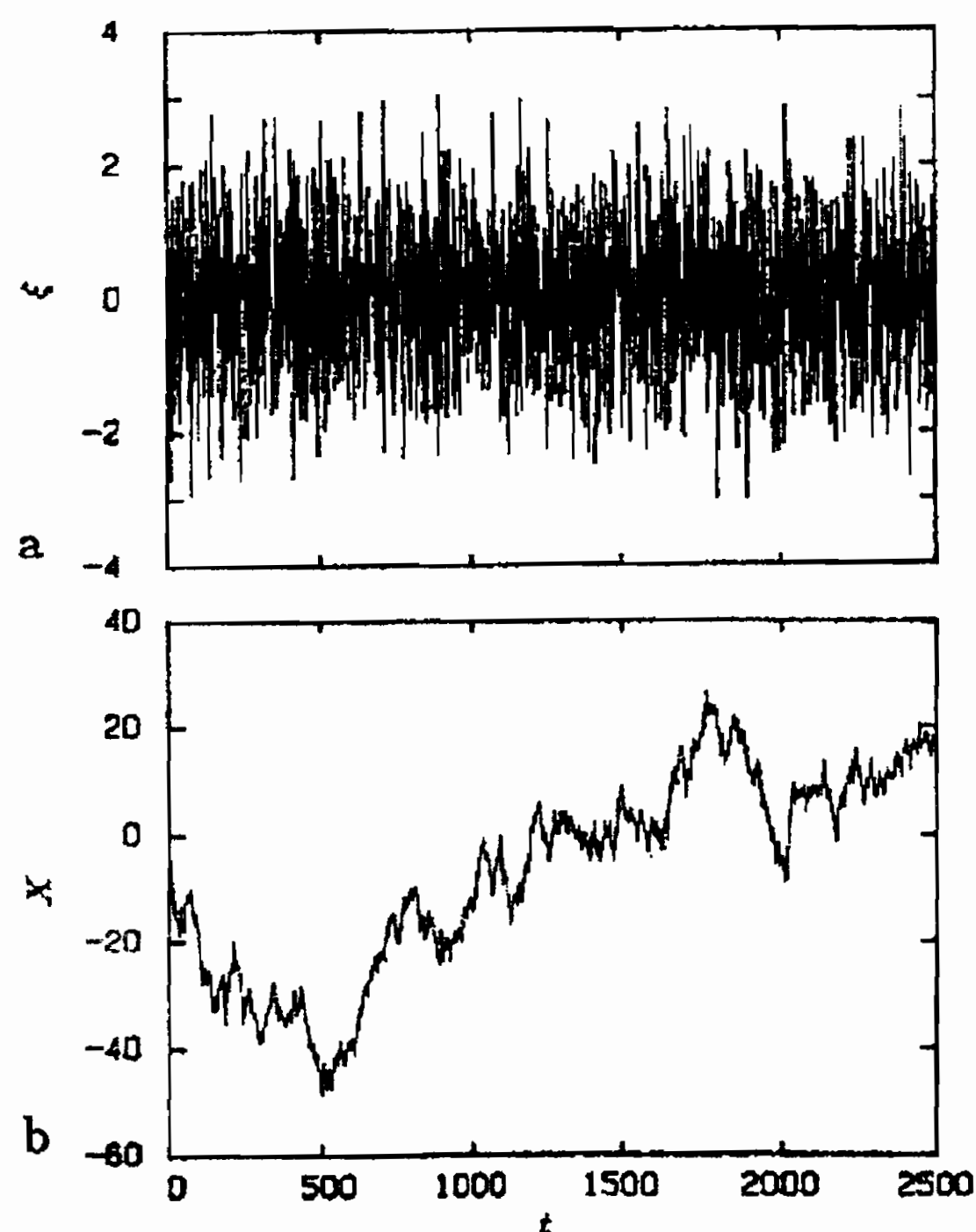


Figura 4.1: Una sequenza di Gaussiani indipendenti. (a) Incrementi casuali. (b) Posizione della particella

di Brown. In fig. 4.1 vengono riportati gli spostamenti e la funzione posizione di una tale distribuzione per 2500 passi successivi.

## 4.4 Proprietà di scaling

Dobbiamo fare ora qualche considerazione concreta. Non osserviamo il moto browniano con evoluzione infinita, ma cerchiamo di vedere cosa succede se osserviamo il fenomeno non ogni  $\tau$ , ma ogni  $b\tau$  con  $b$  arbitrario. Per esempio prendiamo  $b = 2$ . L'incremento  $\xi$  è la somma di due incrementi indipendenti  $\xi'$  e  $\xi''$  come è possibile vedere in fig. 4.2. La probabilità congiunta  $p(\xi'; \xi'', \tau) d\xi' d\xi''$  che il primo incremento sia compreso tra  $\xi'$  e  $\xi' + d\xi'$  e che il secondo sia compreso tra  $\xi''$  e  $\xi'' + d\xi''$

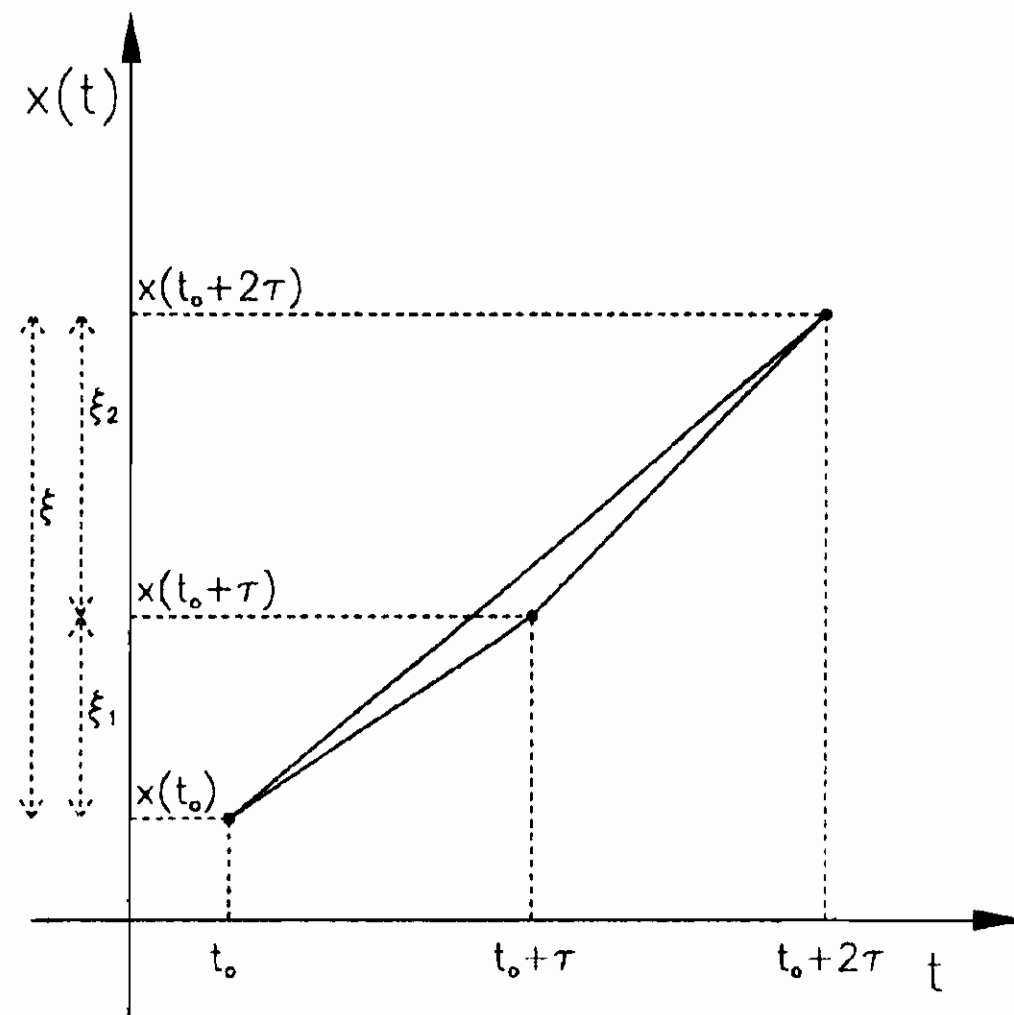


Figura 4.2: Incremento  $\xi$  nella posizione di una particella browniana al tempo  $2\tau$  è la somma di due incrementi indipendenti  $\xi'$  e  $\xi''$

è data da:

$$p(\xi'; \xi'', \tau) = p(\xi', \tau) \cdot p(\xi'', \tau) \quad (4.17)$$

Abbiamo assunto che la probabilità composta non è condizionata perché i due incrementi sono indipendenti statisticamente. I due incrementi devono sommarsi per dare  $\xi$  ( possiamo perciò chiamare  $\xi'' = \xi - \xi'$ ) per cui sommando (integrando) su tutte le possibili combinazioni di  $\xi'$  e  $\xi''$ , la densità di probabilità per l'incremento  $\xi$  è data da:

$$p(\xi, 2\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi' p(\xi - \xi', \tau) p(\xi', \tau) = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Theta 2\tau}} e^{(-\frac{\xi^2}{4\Theta 2\tau})} \quad (4.18)$$

Che significato ha questa equazione?

Se osserviamo il moto browniano con risoluzione temporale dimezzata ( $2\tau$ ), l'incremento nella posizione (monodimensionale!) del corpuscolo è ancora gaussiana attorno a  $\langle \xi \rangle = 0$ , ma adesso la varianza è diventata  $\langle \xi^2 \rangle = 4\Theta\tau = 2\Theta(2\tau)$  e non  $\langle \xi^2 \rangle = 2\Theta\tau$ . Potremmo ripetere il discorso variando il valore del parametro  $b$  ed arriveremmo alla conclusione seguente: qualunque sia il numero  $b$  di "tempi microscopici" dopo i quali eseguiamo le osservazioni, troviamo che gli incrementi  $\xi$  della

posizione del corpuscolo costituiscono un processo gaussiano aleatorio con  $\langle \xi \rangle = 0$ , ma con varianza  $\langle \xi^2 \rangle = 2\Theta t$  con  $t = b\tau$ .

Questa conclusione che scaturisce dalla legge di Einstein è fondamentale:

$$\langle \xi^2 \rangle = \sum_1^n \xi_j^2 = 2\Theta n \tau. \quad (4.19)$$

Aumentando il numero degli addendi<sup>6</sup> la deviazione standard totale non aumenta come  $\sqrt{n}$ , ma come  $n$ .

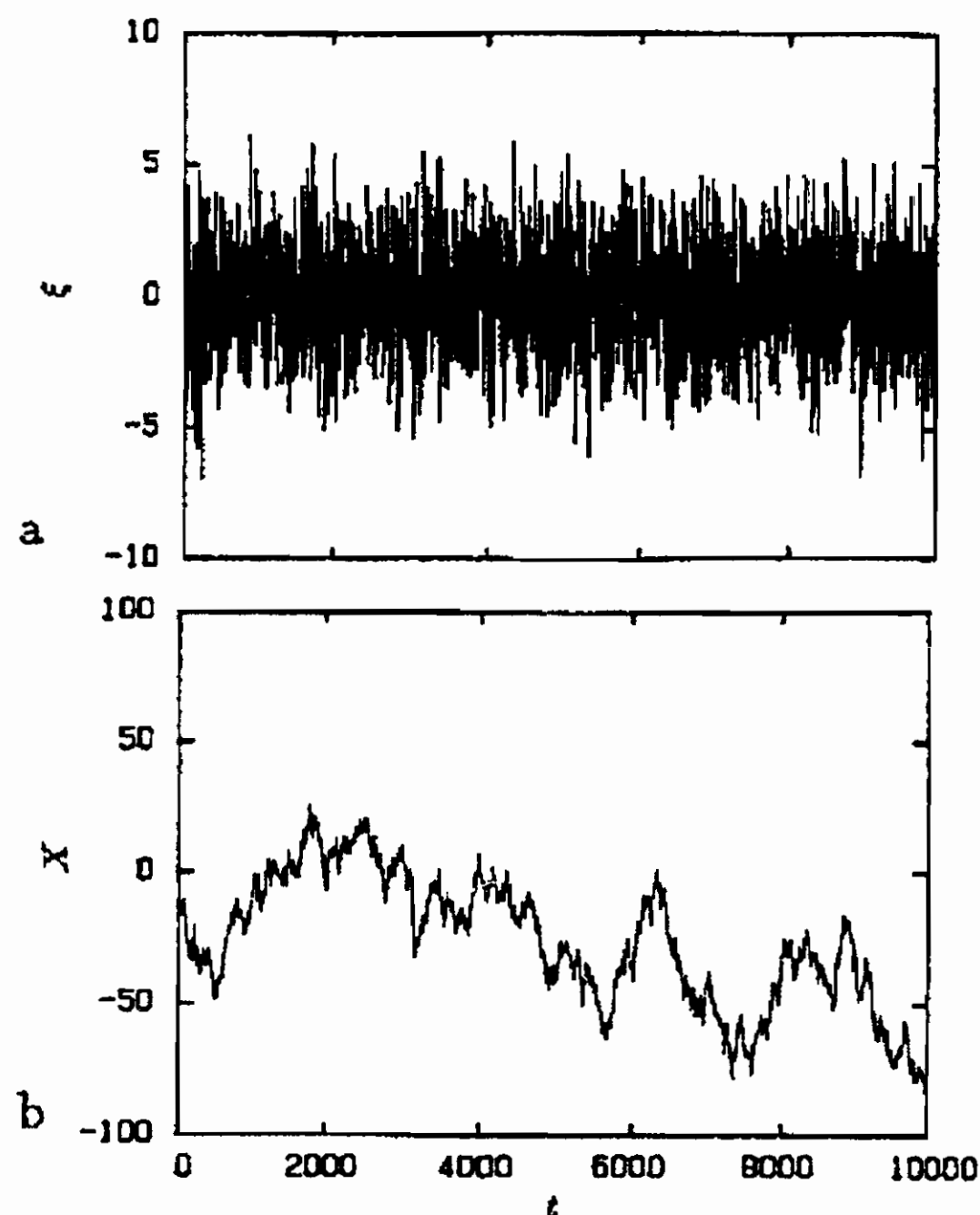


Figura 4.3: Una sequenza di variabili gaussiane indipendenti osservata ogni  $4\tau$ . (a) Incrementi casuali. (b) Posizione della particella

La fig. 4.3 descrive le osservazioni del moto browniano con risoluzione temporale  $4\tau$ . Si nota che, nonostante gli incrementi siano la somma di 4  $\xi_i$  indipendenti, è difficile rilevare la differenza con la fig. 4.1, salvo la scala degli incrementi che adesso sono due volte più ampi. Anche  $X(t)$  limitatamente a  $t < 2500$  è statisticamente simile a quella del primo caso. Tuttavia nella singola realizzazione stocastica le due funzioni  $X(t)$

<sup>6</sup>Si tenga presente questo fatto nel Cap. A.

sono differenti localmente e la scala verticale (che indica le deviazioni standard) non cambia del fattore  $\sqrt{b}$  che ci si aspetterebbe. Il risultato che la funzione di Brown  $X(t)$  sembra non cambiare al cambiare della risoluzione si chiama **invarianza di scala** della funzione browniana  $X(t)$ . Le proprietà di scaling del moto browniano si possono esprimere esplicitamente mediante le sostituzioni  $\sqrt{b}\xi \rightarrow \xi^o$ ,  $b\tau \rightarrow \tau^o$  nell'equazione (4.16) ottenendo:

$$p(\sqrt{b}\xi, b\tau) = \frac{1}{\sqrt{\Theta b\tau} \sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4\Theta b\tau}\right) \quad (4.20)$$

Ciò equivale a cambiare in fig. 4.1 la scala del tempo di un fattore  $b$  e la scala delle lunghezze di un fattore  $\sqrt{b}$ . Come risultato di questa sostituzione si ottiene una relazione di scala delle funzioni di densità di probabilità:

$$p(\xi^o = \sqrt{b}\xi, \tau^o = b\tau) = \frac{1}{\sqrt{b}} p(\xi, \tau) \quad (4.21)$$

Il fattore  $\sqrt{b}$  verifica che le due funzioni densità di probabilità sono normalizzate. L'equazione (4.21) mostra che il processo aleatorio browniano è invariante (nelle distribuzioni densità di probabilità) per una trasformazione di scala dei tempi  $b\tau \rightarrow \tau^*$  e delle lunghezze  $\sqrt{b}\xi \rightarrow \xi^*$ . Una trasformazione nella quale i fattori di scala dei due assi sono diversi si chiama *trasformazione affine* e non autosomigliante o autosimilare. Le curve che si riproducono sotto una trasformazione affine si chiamano **curve autoaffini**. In preparazione alla trattazione successiva, del moto browniano frazionario (frattale), deduciamo anche la forma della distribuzione di densità per la funzione di Brown  $X(t)$ :

$$p[X(t) - X(t_o)] = \frac{1}{\sqrt{4\pi\Theta|t - t_o|}} \exp\left(-\frac{[X(t) - X(t_o)]^2}{4\Theta|t - t_o|}\right) \quad (4.22)$$

la quale soddisfa alla relazione di scala:

$$p(\sqrt{b}[X(t) - X(t_o)]) = \frac{1}{\sqrt{b}} p[X(t) - X(t_o)] \quad (4.23)$$

Con queste distribuzioni di probabilità per la posizione del corpuscolo si ottengono il valore medio e la varianza associate:

$$\langle X(t) - X(t_o) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta X p(\Delta X, t - t_o) d\Delta x = 0 \quad (4.24)$$

$$\langle [X(t) - X(t_o)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta X^2 p(\Delta X, t - t_o) d\Delta X = 2\Theta |t - t_o| \quad (4.25)$$

La funzione  $X(t)$  (monodimensionale) è una funzione aleatoria del tempo.

Nel 1923 Wiener ha dato la seguente elegante descrizione della funzione browniana  $X(t)$ : consideriamo un processo aleatorio gaussiano indipendente  $\{\Xi\}$  e siano gli incrementi  $\Delta$  nella posizione del corpuscolo browniano dati in modo del tutto generale:

$$\Delta = X(t) - X(t_o) = \xi |t - t_o|^H \quad (4.26)$$

per  $t \geq t_o$  e per una qualsiasi coppia di valori  $t$  e  $t_o$ .  $H$  è un parametro arbitrario introdotto analogamente a quanto fatto in precedenza per  $\Theta$  per indicare la dimensione frattale. La (4.26) definisce una funzione aleatoria e vale per ogni istante iniziale  $t_o$ , sia nota oppure ignota la funzione  $X(t)$  per  $t < t_o$ . Con la definizione (4.26) si ottiene la posizione  $X(t)$  una volta data la funzione  $X(t_o)$ , scegliendo un numero a caso  $\xi$  da una distribuzione gaussiana, moltiplicandolo per l'incremento temporale  $\Delta t = |t - t_o|^H$  e aggiungendo il valore trovato alla funzione  $X(t_o)$ . Lo stesso si può fare anche per  $t < t_o$ . La funzione ottenuta è continua ma non è derivabile. Essa ha la distribuzione di probabilità (4.22). La variabile ridotta  $\epsilon$  si definisce quindi come:

$$\epsilon = \frac{X(t) - X(t_o)}{\sqrt{2\Theta\tau} \left| \frac{t-t_o}{\tau} \right|^H} \quad (4.27)$$

con la quale si ottiene, ponendo  $H = 1/2$ :

$$p(\epsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) \quad (4.28)$$

che è la forma ridotta di una distribuzione gaussiana.

Arrivati a questo punto, abbiamo studiato il moto browniano tradizionale che ha una serie di proprietà tra cui sono rilevanti le seguenti:

- proprietà di scaling-affinità;
- proporzionalità delle varianze alle variabili;
- linearità nella somma delle deviazioni standard.

## 4.5 Il moto browniano frazionale

Abbiamo visto che i fattori di scala per i quali il processo aleatorio browniano classico risulta invariante sono:

$$\sqrt{b}\xi \rightarrow \xi^*, \quad b\tau \rightarrow \tau^* \quad (4.29)$$

Fin dal 1968 Mandelbrot e Van Ness [25, 12] hanno introdotto il concetto di moto browniano frazionale per definire la generalizzazione della funzione browniana  $X(t)$ . Come Mandelbrot faccia ciò lo possiamo immaginare sulla base di quanto detto nel Cap 2 per ottenere la dimensione frattale di un insieme. Abbiamo visto che per il moto browniano Weiner nel 1923 aveva dato una elegante descrizione della funzione browniana  $X(t)$  assumendo gli incrementi  $\Delta$  nella posizione del corpuscolo soggetto a moto browniano dati in modo del tutto generale dall'espressione:

$$\Delta = X(t) - X(t_o) = \xi |t - t_o|^H \quad (4.30)$$

Usando la sostituzione (4.29) nella (4.30) si ottiene  $H=1/2$ . Mandelbrot assume che  $H$  possa assumere qualsiasi valore tra  $0 < H < 1$ .  $H$  è noto con il nome di *esponente di Hurst*.

Per  $H=1/2$  si ha quindi il caso speciale di incrementi stocasticamente indipendenti (per il moto browniano classico);

per  $H \neq 1/2$  si ha il caso generale di incrementi frazionali di variabili aleatorie stocasticamente non indipendenti e quindi di moto browniano frazionale. Sostituiamo quindi  $X(t) \leftrightarrow B_H(t)$  [chiaro che nel caso classico  $x(t) = B_{1/2}(t)$ ] e ridefiniamo quindi le caratteristiche del moto browniano:

- in un processo browniano frazionale l'incremento medio è nullo:

$$\langle B_H(t) - B_H(t_o) \rangle = 0 \quad (4.31)$$

- la varianza degli incrementi  $V(t-t_o)$  è data generalizzando l'espressione di Weiner:

$$V(t-t_o) = \langle [B_H(t) - B_H(t_o)]^2 \rangle = 2\Theta\tau \left| \frac{t-t_o}{\tau} \right|^{2H} \quad (4.32)$$

E' importante sottolineare che nel moto browniano frazionario le varianze divergono all'aumentare del tempo di osservazione. La relazione (4.32) del moto browniano introduce una correlazione *a lungo range in t*. In particolare gli incrementi passati ( $t < 0$ ) risultano correlati agli incrementi futuri ( $t > 0$ ).

Per comodità assumiamo ora  $t = 1$ ,  $B_H(0) = 0$ , e, per esempio,  $\tau = 1$ ,  $2\Theta\tau = 1$ .

Ricordiamo che il fattore di correlazione di una funzione aleatoria  $f(x, y)$  con  $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$  è:

$$\rho = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\langle xy \rangle}{\langle x \rangle \langle y \rangle} \quad (4.33)$$

per cui nel nostro caso il fattore di correlazione in funzione del tempo è:

$$\begin{aligned} c(t) &= \frac{\langle [B_H(0) - B_H(-t)][B_H(t) - B_H(0)] \rangle}{\langle [B_H(t) - B_H(0)]^2 \rangle} = \\ &= \sigma^2 - \Delta \end{aligned} \quad (4.34)$$

Alla luce della (4.32) dobbiamo considerare, al denominatore, al posto di  $\tau$  un intervallo di tempo  $\Delta = |\delta t|^2 + |-\delta t|^2 = 2$ , che è la somma di due intervallini (unitari):  $\delta t$  per i tempi positivi e  $-\delta t$  per i tempi negativi; inoltre:  $\sigma^2 = 2^{2H}$  [come dalla (4.32)] e quindi:

$$c(t) = 2[2^{2H-1} - 1] \quad (4.35)$$

Per  $H = 1/2$  risulta che  $c = 0$  e quindi gli incrementi sono indipendenti, mentre se  $H \neq 1/2$   $c \neq 0$  indipendentemente da  $t$ . Dalla (4.35) si possono dedurre i comportamenti di:

- **persistenza:** se  $H > 1/2$ , se per  $t < 0$  si è avuta una serie di incrementi positivi, si ha una media di incrementi positivi per il futuro;

- **antipersistenza:** se  $H < 1/2$ , se per  $t < 0$  si è avuta una serie di incrementi positivi si ha una media di incrementi negativi per il futuro.

Tutto questo rimane vero per qualunque  $t$ .

Occorre rimarcare con forza che un comportamento di questo tipo per la funzione evolutiva  $B_H(t)$  è in chiaro conflitto con quanto si assume nella statistica tradizionale applicata ai sistemi fisici. Per la fisica statistica tradizionale l'ipotesi a volte tacitamente fatta è che ci possono essere correlazioni a corto range (per piccoli  $\Delta t$ ) ma che gli eventi diventano completamente scorrelati per  $\Delta t \rightarrow \infty$  (o per  $\Delta \rightarrow \infty$ ). Questa indipendenza statistica a grandi distanze o a grandi differenze temporali è un ingrediente indispensabile per formalizzare il concetto di equilibrio termico, ma ci sono eccezioni ben note!

Il punto critico di un fluido, essendo un punto di transizione di fase del 2° ordine, è tale che quando il sistema gli si avvicina nello spazio delle fasi, le funzioni di correlazione di densità molecolare sviluppano una componente che non ha una intrinseca scala nè per le lunghezze nè per i tempi. Per conseguenza l'energia libera  $F$  possiede una parte cruciale e critica che mostra le proprietà di scala della (4.27). Questo avviene per tutti i fenomeni (o le condizioni) di transizione di fase del 2° ordine. In quelle condizioni il comportamento secondo leggi di potenza diventa una regola e non l'eccezione (es: sviluppi di stelle in certe condizioni, produzione multipla di adroni alle alte energie, sviluppi di tornado, etc...). Il moto browniano frazionale è molto utile per modellare le serie temporali dei fenomeni che possono mostrare lunghi periodi di persistenza (effetto Noè, effetto Giuseppe)<sup>7</sup>.

#### 4.5.1 Definizione di moto browniano frazionale

Un modo per capire le proprietà del processo aleatorio browniano frazionale è quello di preparare una simulazione con computer per generare

---

<sup>7</sup>Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, Freeman, pp.248-249



i risultati che abbiamo mostrato nelle figure del moto browniano. La funzione browniana di Mandelbrot e Van Ness deve essere una funzione casuale:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t (t - t')^{H-1/2} dB_H(t') \quad (4.36)$$

$B_H(t)$  è una distribuzione frazionale browniana,  $\Gamma$  è la funzione di Eulero,  $(t-t')^{H-1/2}$  è una modifica introdotta da Mandelbrot e Van Ness,  $dB_H(t')$  è un incremento del processo gaussiano di base e il valore medio di  $\langle B_H(t) \rangle$  è nullo. Le notazioni diventano chiare quando si discretizza per l'uso di un calcolatore. In generale la funzione  $k(t-t') = (t-t')^{H-1/2}$  è detta *kernel* (nucleo) dell'equazione (4.36).

Scegliamo ora una unità di tempo per cui  $t$  sia intero. Dividiamo questo intervallo di tempo in  $n$  parti (*steps*), al fine di simulare l'integrale.

Possiamo così scrivere il tempo  $t'$  di integrazione come  $t' = \frac{i}{n}$  con  $i = -\infty, \dots, -nt, -(n-1)t, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, (n-1)t, nt$ . Invece dell'incremento  $dB_H(t')$  del processo gaussiano si può scrivere come discretizzazione  $dB_H(t') \rightarrow \frac{1}{\sqrt{n}}\xi_i$  dove  $\xi_i$  è una variabile gaussiana discreta con media nulla e varianza  $\sigma^2 = 1$ . Il termine  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  è il termine di scala (si ricordi il fattore  $b^{-1/2}$ ) che riscalda gli incrementi gaussiani browniani col diminuire del tempo di osservazione; cioè approssimativamente:

$$B_H(t) \simeq \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \sum_{i=-\infty}^{nt} (t - \frac{i}{n})^{H-1/2} n^{-1/2} \xi_i \quad (4.37)$$

Chiaramente questa serie non converge, così come l'integrale (4.36) diverge per  $t' \rightarrow -\infty$ . Per evitare la divergenza occorre usare un artificio matematico, o meglio, una funzione più precisa di Mandelbrot e Van Ness e cioè:

$$B_H(t) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^t k(t-t') dB_H(t') \quad (4.38)$$

dove il kernel  $k(t-t')$  è un po' più complicato della semplice legge di potenza inserita nella (4.36). In particolare Mandelbrot e Van Ness

usano:

$$k(t - t') = \begin{cases} (t - t')^{H-1/2} & \text{per } 0 \leq t' \leq t \\ [(t - t')^{H-1/2} - (-t')^{H-1/2}] & \text{per } t' < 0 \end{cases}$$

Questo kernel va a 0 abbastanza rapidamente ed assicura la convergenza, vuoi dell'integrale vuoi della sommatoria per la quale il kernel assume la forma:

$$k\left(t - \frac{i}{n}\right) = \begin{cases} \left(t - \frac{i}{n}\right)^{H-1/2} & \text{per } 0 \leq i \leq nt \\ \left[\left(t - \frac{i}{n}\right)^{H-1/2} - \left(-\frac{i}{n}\right)^{H-1/2}\right] & \text{per } i < 0. \end{cases}$$

In ogni caso, quella usata è una deformazione legittima della variabile gaussiana di incrementi indipendenti. L'equazione di Mandelbrot-Van Ness ha la forma di una generica curva di risposta lineare (per esempio di un circuito elettronico lineare). Questa equazione dice che l'incremento gaussiano  $dB_H(t')$  di ampiezza unitaria al tempo  $t'$  dà un contributo alla posizione frattale browniana  $B_H(t)$  ad un istante posteriore  $t$  determinato dalla funzione lineare di risposta  $k(t - t')$ . La caratteristica del kernel sta nella forma di legge di potenza la quale non ha una scala intrinseca dei tempi o una unità di misura.

Lo scaling della forma dell'equazione si vede cambiando la scala dei tempi di un fattore  $b$  (ricordiamo:  $\hat{\xi} \rightarrow \sqrt{b}\xi$  e  $\hat{\tau} \rightarrow b\tau$ ):

$$B_H(bt) - B_H(0) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \int_{-\infty}^{bt} k(bt - bt') dB_H(t') \quad (4.39)$$

dove  $t' = b\hat{t}$ . Ma  $dB(t')$  è una distribuzione aleatoria browniana gaussiana e pertanto  $dB(b\hat{t}) = \sqrt{b}dB_H(\hat{t})$ .

D'altro canto il kernel  $k(bt - b\hat{t}) = b^{H-1/2}k(t - \hat{t})$  per cui:

$$\begin{aligned} B_H(bt) - B_H(0) &= b^{H-1/2+1/2}[B_H(t) - B_H(0)] = \\ &= b^H[B_H(t) - B_H(0)] \end{aligned}$$

e questa relazione di scala è valida per ogni  $b$ .

Per ricondurci all'inizio ed alle equazioni già scritte nei paragrafi precedenti prendiamo  $t = 1$  e  $\Delta t = bt$ . Otteniamo che l'incremento

frazionale browniano è proporzionale a  $|\Delta t|^H$ . Ne consegue che la varianza degli incrementi risulta (prendendo  $t_o = 0$  e  $\Delta t = t - t_o$ ):

$$V(t - t_o) = \langle [B_H(t) - B_H(0)]^2 \rangle = 2\Theta \tau \left| \frac{\Delta t}{\tau} \right|^{2H} \sim |\Delta t|^{2H} \quad (4.40)$$

La (4.40) rappresenta una legge di potenza e dimostra che l'equazione di Mandelbrot-Van Ness è una buona scelta che generalizza il moto browniano gaussiano.

### 4.5.2 Simulazione del moto browniano frazionale

Per una simulazione con computer occorre procedere all'introduzione del kernel nella funzione discreta di Mandelbrot-Van Ness per rendere convergente la sommatoria. E' però chiaro che in pratica un calcolo di  $B_H$  può usare solo un numero finito di termini e pertanto la sommatoria può coprire un intervallo finito  $M$  di tempi  $t$  (interi per assunzione,  $\max(t) = M$ ). L'equazione approssimata è dovuta a Mandelbrot e Wallis e si scrive legando  $B_H$  ai tempi  $t$  e  $t - 1$  come nella (4.37):

$$B_H(t) - B_H(t - 1) = \frac{1}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \sum_{i=-n(t-M)}^{nt} k(t - \frac{i}{n}) n^{-1/2} \xi_i \quad (4.41)$$

In questa formula  $\{\xi_i\}$  è un vettore di variabili aleatorie gaussiane per  $i = 1, 2, \dots, M$  con media nulla e varianza unitaria.

Introducendo il kernel ( $t$  interi):

$$k(t - \frac{i}{n}) = \begin{cases} (t - \frac{i}{n})^{H-1/2} & \text{per } 0 \leq i \leq M \\ [(t - \frac{i}{n})^{H-1/2} - (-\frac{i}{n})^{H-1/2}] & \text{per } i < 0 \end{cases}$$

si ottiene il risultato. La procedura è un poco laboriosa: occorre cambiare l'indice di sommatoria, evidenziare che c'è un  $n^{-H}$  in ogni termine, riarrangiare gli addendi, *etc...* ma alla fine si ottiene l'equazione di Mandelbrot-Wallis nella forma:

$$\begin{aligned} B_H(t) - B_H(t - 1) &= \\ &= \frac{n^{-H}}{\Gamma(H + \frac{1}{2})} \left\{ \sum_{i=1}^n (i)^{H-1/2} \xi_{[1+n(M+t)-i]} + \right. \end{aligned} \quad (4.42)$$

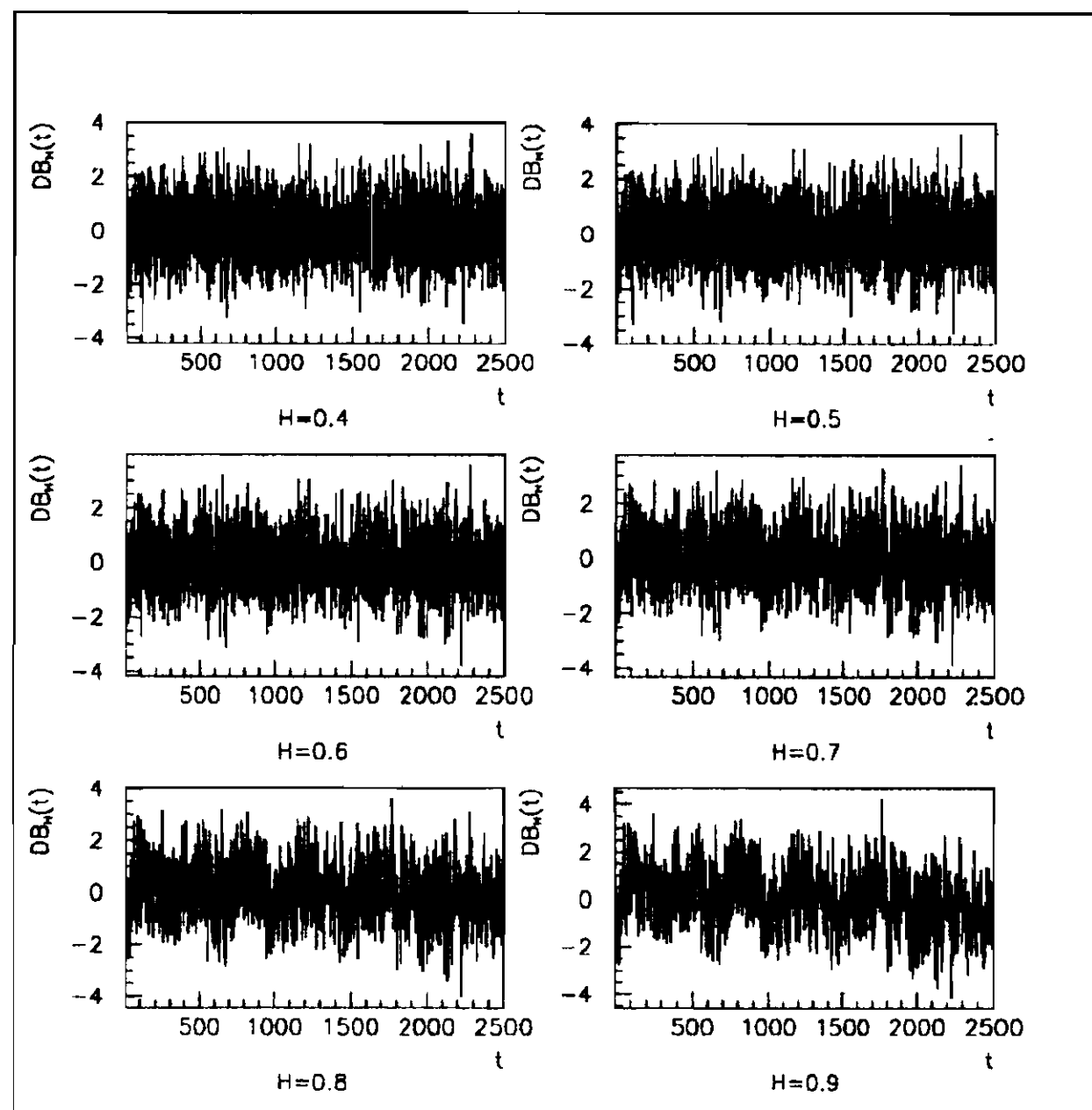


Figura 4.4: Incrementi della funzione Browniana  $B_H$  simulati con  $M = 700$  e  $n = 8$ . Metodo con il teorema del limite centrale

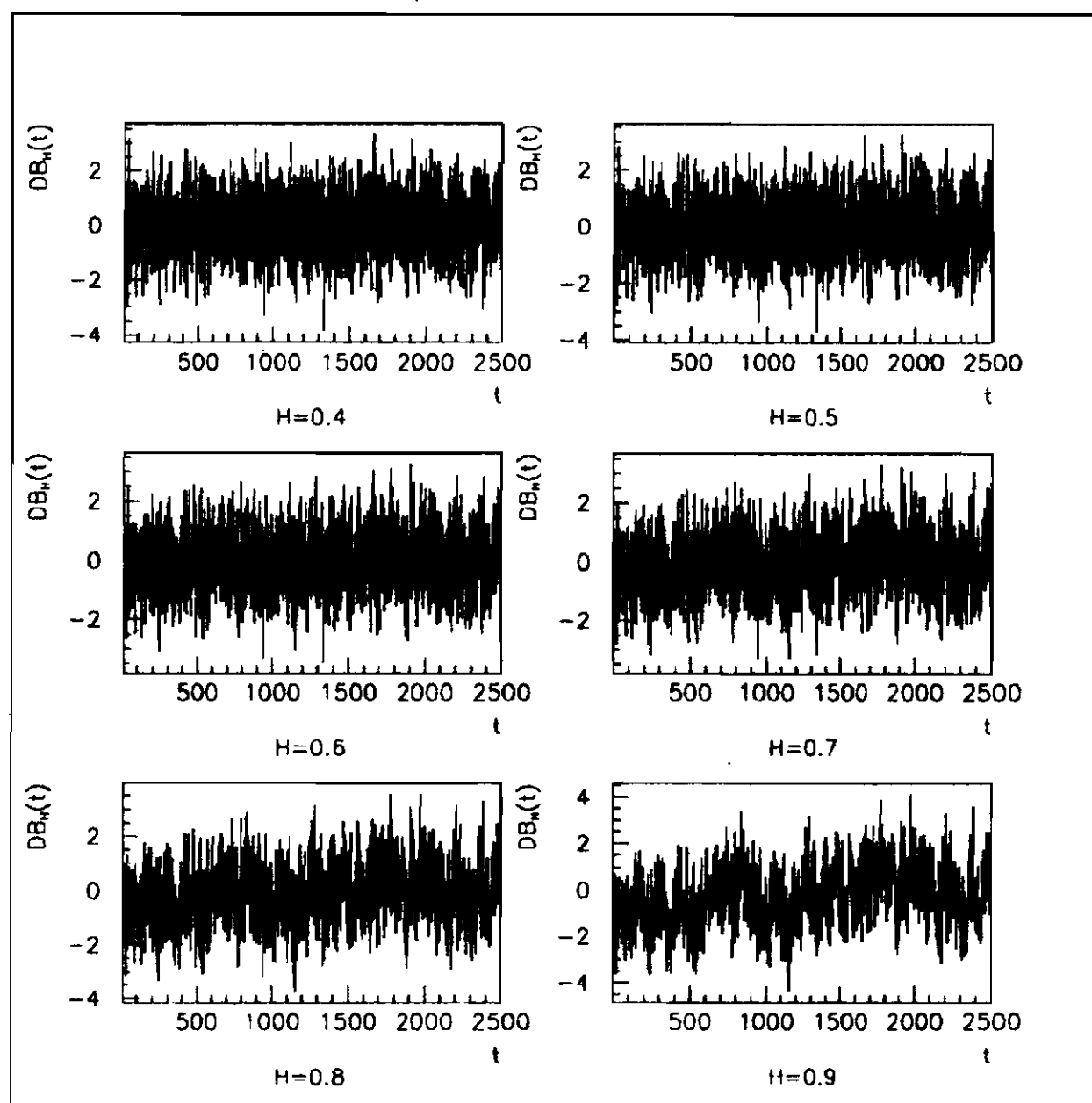


Figura 4.5: Incrementi della funzione Browniana  $B_H$  simulati con  $M = 700$  e  $n = 8$ . Metodo con subroutine del CERN

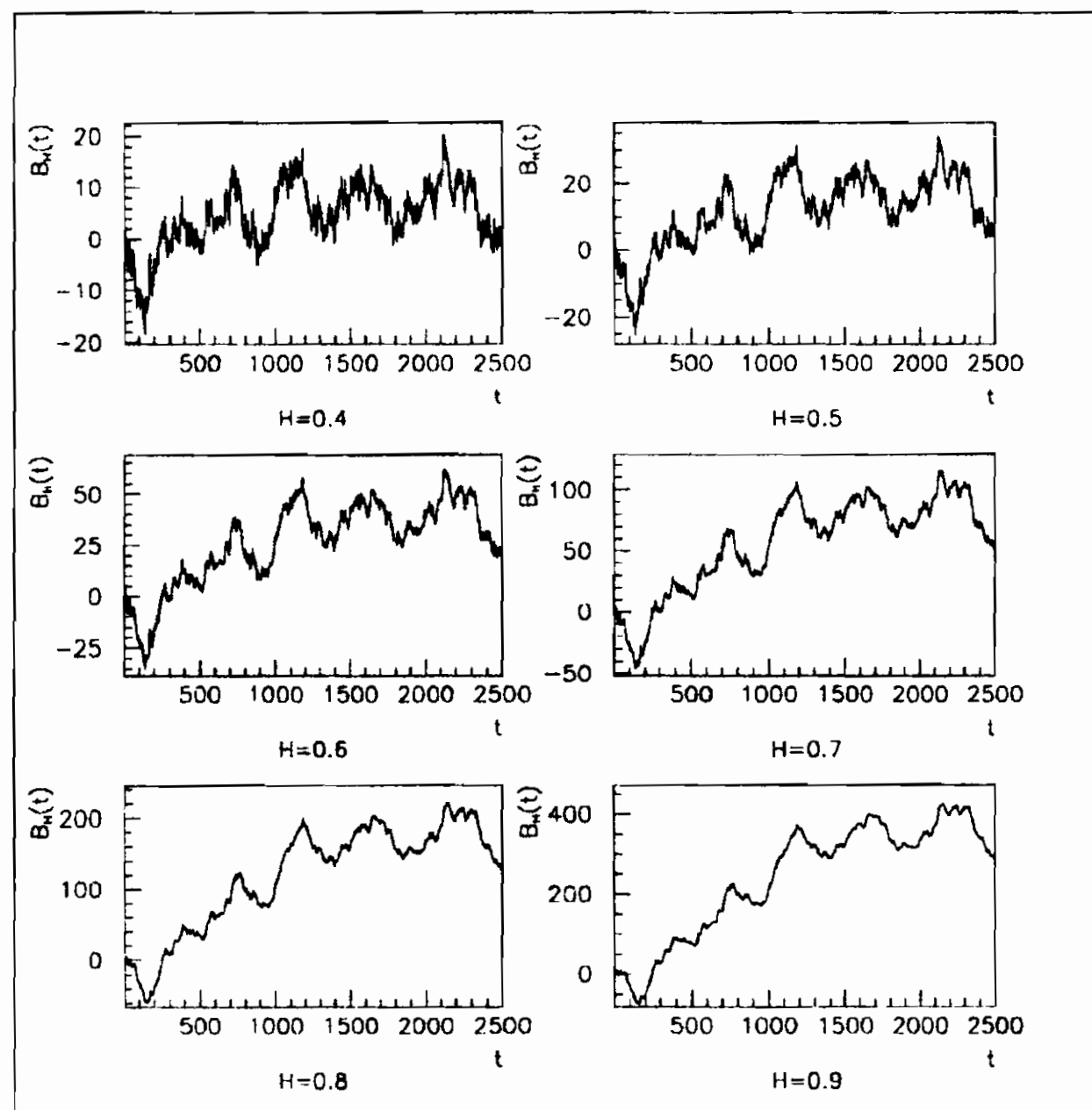


Figura 4.6: La funzione Browniana  $B_H$  simulata con  $M = 700$  e  $n = 8$ . Metodo con il teorema del limite centrale

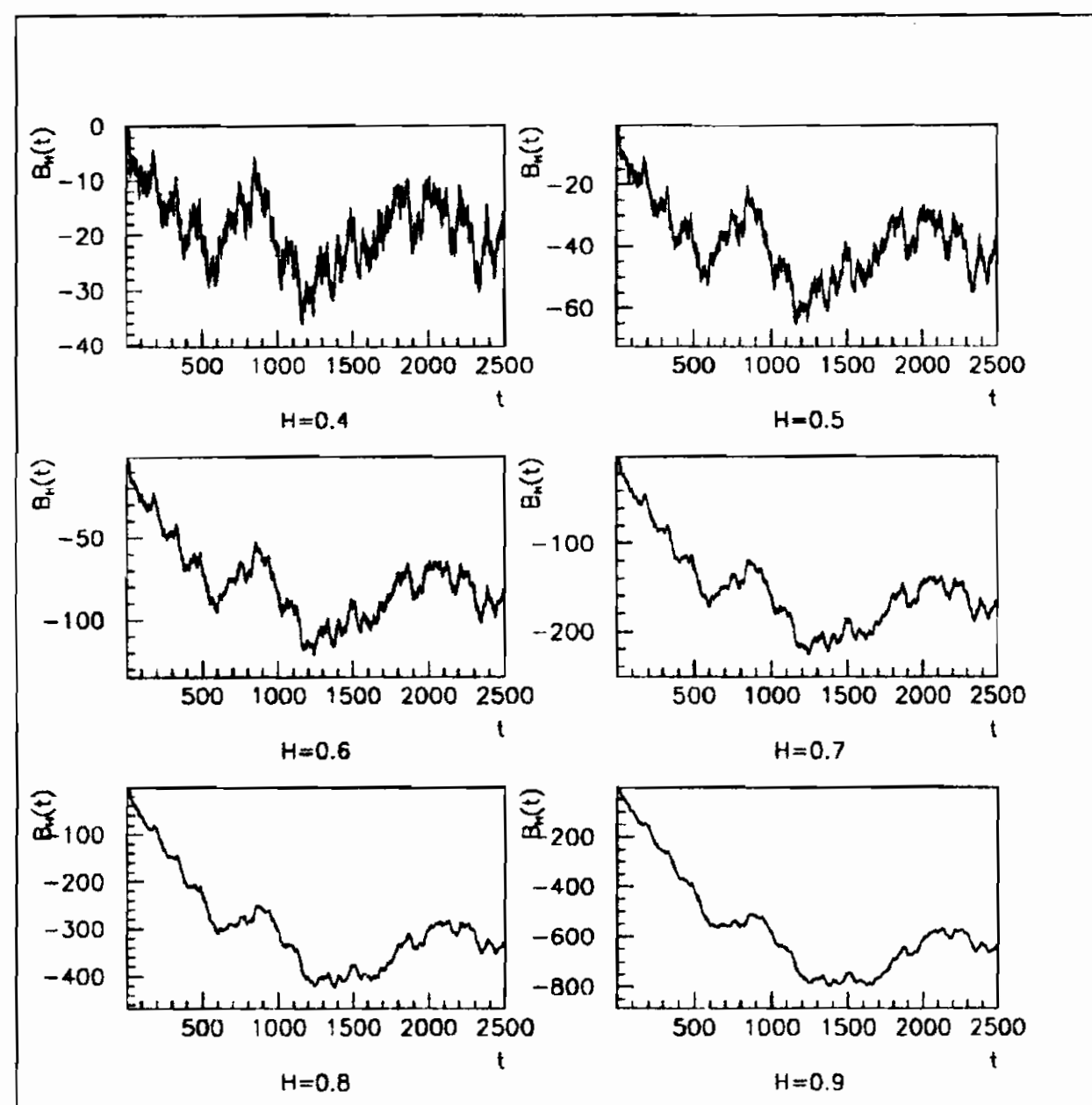


Figura 4.7: La funzione Browniana  $B_H$  simulata con  $M = 700$  e  $n = 8$ . Metodo con subroutine del CERN

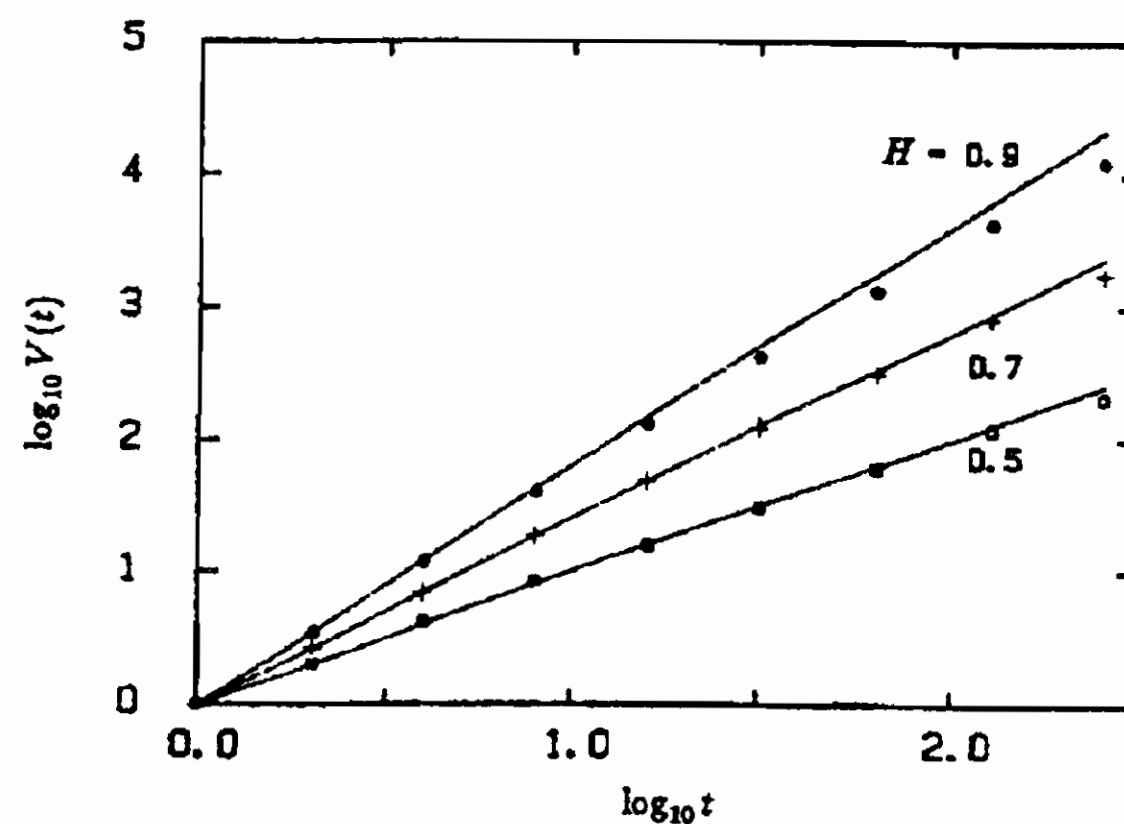


Figura 4.8: La correlazione degli incrementi per la funzione Browniana  $B_H$  per  $M = 700$  e  $n = 8$ .

$$+ \left. \sum_{i=1}^{n(M-1)} \left[ (n+i)^{H-1/2} - (i)^{H-1/2} \right] \xi_{[1+n(M-1+t)-i]} \right\}$$

dove  $i = n(t-M) \rightarrow [1+n(M+t)-i] = t$  e  $[1+n(M-1+t)-i] = t-1$ .

L'equazione di Mandelbrot-Wallis permette di ottenere una sequenza di incrementi browniani frazionari partendo da una sequenza di incrementi browniani gaussiani cioè da una sequenza di variabili casuali gaussiane. Ciò porta a mediare il processo gaussiano con una funzione peso data da una legge di potenza (che è caratteristica dei processi frattali!).

Una importantissima osservazione si impone a questo punto. Poiché  $M$  è intero e limitato, nella sommatoria si includono solo  $M$  termini. Quindi per  $t \gg M$  gli incrementi diventano contributi di un processo aleatorio gaussiano indipendente.

L'algoritmo dato dalla procedura di Mandelbrot-Wallis è poco efficiente perché occorre valutare la somma di  $n \cdot M$  termini per determinare ogni incremento di  $B_H$ ; Mandelbrot[26] ha migliorato l'algoritmo dal punto di vista applicativo (ma ciò non è importante qui).

L'effetto introdotto dall'aumentare  $n$  (dunque lo *step time*) è quello di fornire una approssimazione più precisa per la derivazione di  $B_H(t)$  su

intervalli di tempo  $\Delta t$  brevi. Nella fig. 4.4 è stato assunto  $n = 8$ . Nel paragrafo seguente sono riportati i dettagli della simulazione. Queste figure costituiscono delle distribuzioni di rumore. Per  $H = 0.5$  il rumore gaussiano è detto rumore bianco (*white noise*), mentre per gli altri valori di  $H$  si chiama *fractal noise*. Si osserva che all'aumentare di  $H$  diminuisce il rumore ad alta frequenza, facendo prevalere così le basse frequenze.

Nelle figure 4.4-4.7 sono tracciate le funzioni browniane in funzione del tempo, cioè l'evoluzione temporale della posizione di una particella soggetta ad un moto browniano frazionale unidimensionale lungo l'asse delle  $x$ , che parte dalla posizione  $x = 0$  per  $t = 0$ , posizione ottenuta usando gli incrementi della fig. 4.8.

Con l'aumentare dell'esponente di Hurst  $H$  cosa succede? Succede che aumenta il valore massimo delle elongazioni dello spostamento dall'origine ed il rumore si riduce proporzionalmente. In confronto con il moto browniano gaussiano il moto browniano frazionale o frattale permette degli allontanamenti anomali più marcati, cioè permette fluttuazioni più ampie di quelle gaussiane. Il moto frattale browniano ha infatti una varianza (nella posizione) data dalla (4.40). Usando la relazione di Einstein  $\Theta = \frac{\xi^2}{2\tau}$  si può definire un parametro detto **diffusibilità anomala** la quale assume una grande importanza nei fenomeni di trasporto frattale. Se  $\langle X(t)^2 \rangle = 2\Theta \tau \left|\frac{t}{\tau}\right|^{2H}$  si definisce  $\Theta_H$  legato alla variazione della varianza col tempo; cioè (per  $\tau = 1$ ):

$$\Theta_H = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \langle x(t)^2 \rangle \right) = \Theta |t|^{(2H-1)} \quad (4.43)$$

Questo parametro compare nei fenomeni lontani dall'equilibrio, per esempio la conducibilità elettrica di sistemi casuali (fulmini, aurore boreali *etc...*). Vale sottolineare che il carattere anomalo di  $D_H$  deriva dalla natura frattale del *random walk* nello spazio euclideo. Se chiamiamo  $t$  il tempo di adattamento di un sistema caotico alla situazione osservabile all'istante  $t$ , la varianza degli incrementi, invece che gaussiana si può scrivere, causa la normalizzazione,:

$$V(t) = \frac{\langle [B_H(t) - B_H(0)]^2 \rangle}{\langle B_H(t)^2 \rangle} = |t|^{2H} \quad (4.44)$$

e verificare che ricavando  $B_H(t)$  dalla fig. 4.4 questa relazione è ben rispettata. caso ottenuta con un particolare programma.

Tuttavia abbiamo detto che per  $t \gg M$  le fluttuazioni tendono a diventare gaussiane (processi incrementali casuali indipendenti). Le riportiamo nel grafico di fig. 4.8 dove  $\log_{10} V(t) = 2H \log_{10} |t|$  e chiamiamo  $t$  il tempo di adattamento. Tutte le pendenze tendono per  $t \gg M$  ( $t \sim 35M$ ) a far sì che  $2H = 1$ . Quando  $t \gg M$  il rumore frattale tende a scomparire ed a ridursi al rumore bianco. Per estendere la regione temporale interessata dal rumore frattale basta aumentare  $M$ .

### 4.5.3 Dettagli della simulazione

Nelle figure 4.4-4.7 sono mostrati i risultati della simulazione del moto browniano frattale, simulazione ottenuta mediante programma scritto in linguaggio FORTRAN che calcola la formula (4.43).

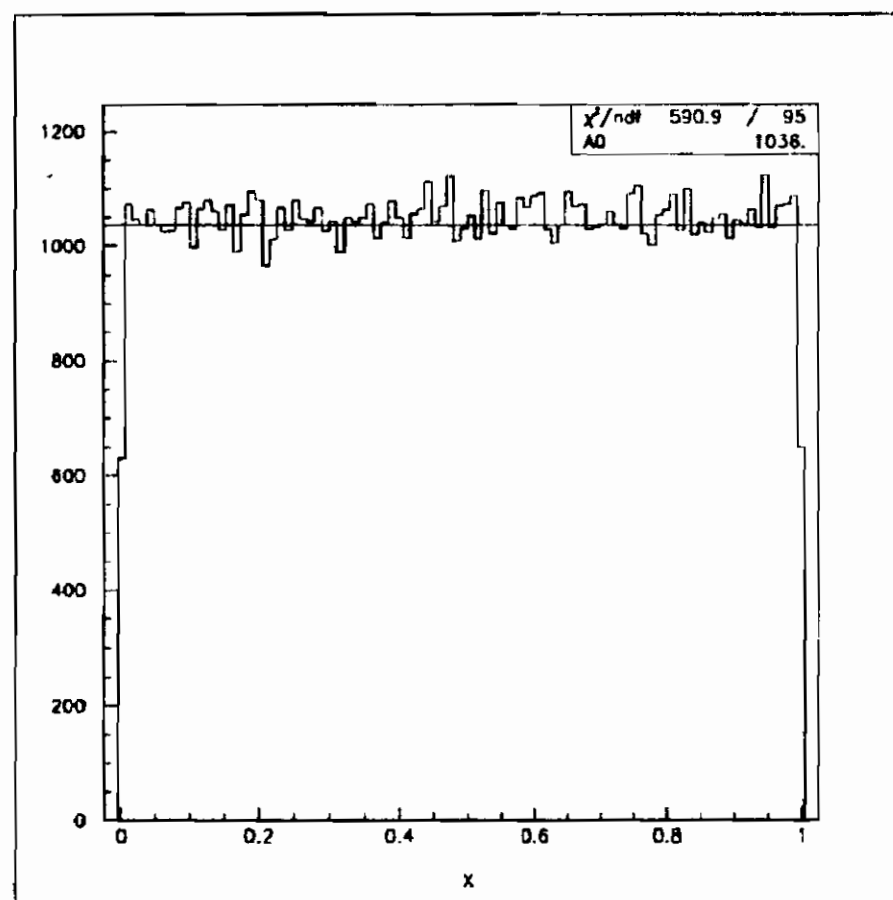


Figura 4.9: Distribuzioni della variabile random disponibile nella libreria del FORTRAN

Per semplificare gli algoritmi utilizzati la formula è stata spezzata in termini calcolati separatamente.

Le variabili  $\xi_j$ , da cui si parte, sono un set di variabili aleatorie tratte da una distribuzione gaussiana normalizzata di media nulla e varianza unitaria. La fig. 4.5.3 mostra una distribuzione di estrazioni casuali, tratta da una libreria del FORTRAN.



```

program fbmotion
c   programma per la simulazione del "fractional brownian motion"
parameter (H=0.9,n=8,M=700,tf=2500,l=26700)
real x,add,y(1)
real a,b,c,s,p
real t,som1,som2,DB(tf)
data iseed/1213129/

c   apertura file di dati
open (8,file='stepbr_1_9',status='new')

c   generazione di variabili da distribuzione gaussiana
c   normalizzata di media nulla e varianza unitaria

do j=1,1
  add=0
  do i=1,12
    x=ran(iseed)
    add=add+x
  end do

  y(j)=add-0.5*12
end do

c   le variabili a,b,c,s,p,q,r sono state introdotte per
c   comodita' di programmazione

a=H+0.5
b=H-0.5
c=n*(M-1)

do t=1,tf
c   calcolo del primo addendo

q=1+n*(M+t)
som1=0
do i=1,n
  s=q-i
  som1 = som1 + (i**b)*y(s)
end do

c   calcolo del secondo addendo

r=1+n*(M-1+t)
som2 = 0
do i=1,c
  p=r-i
  som2 = som2 + ((n+i)**b-i**b)*y(p)
end do

c   DB sono gli step del moto browniano frattale

DB(t) = ((n**(-H)/gamma(a))*(som1+som2))
end do

write (8,*) DB
close (8)

stop
end

```

Figura 4.10: Editor del programma utilizzato per la simulazione

Per generare il moto browniano si possono utilizzare diversi metodi tra i quali se ne sono scelti due. Un primo modo è quello di sfruttare il teorema del limite centrale (cfr. A). Detta  $y$  una variabile statistica definita come somma di altre variabili indipendenti  $x$ , detta  $\mu$  la media e  $\sigma^2$  la varianza finita, richiamiamo semplicemente le formule che sono:

$$\begin{aligned}
 y &= \sum_{i=1}^N x_i \\
 \mu &= \sum \mu(x_i) \\
 \sigma^2 &= \sum \sigma^2(x_i)
 \end{aligned}
 \tag{4.45}$$

Nel nostro caso, la distribuzione è gaussiana, a rigore, per  $N \rightarrow \infty$ ,

ma ciò risulta valido già per  $N \geq 10$ . Come insieme di variabili  $x_j$  si utilizza un insieme di numeri casuali distribuiti fra 0 e 1 uniformemente. Quindi la media è  $\mu(x) = 0.5$  e varianza  $1/\sqrt{12}$ . Per far sì che le  $y$  si distribuiscano come voluto, poichè:

$$\mu(y) = N \cdot \mu(x) = N \cdot 0.5 \quad (4.46)$$

e:

$$\sigma(y) = \sqrt{N} \cdot \sigma(x) = \sqrt{N} \cdot 1/\sqrt{12} \quad (4.47)$$

si sceglie  $N = 12$  e si definisce

$$\xi = y = \sum_{i=1}^{12} x(i) - 6 \quad (4.48)$$

Ripetendo questo procedimento più volte, attraverso un *loop*, si creano le variabili  $\xi_j$  necessarie. Si può utilizzare anche un valore di  $N \neq 12$  ma in questo caso è necessario riscalarare la definizione delle  $y$  perché si mantengano le caratteristiche della distribuzione voluta (vedi fig. 4.4).

Un secondo metodo, invece, consiste semplicemente nell'utilizzare una subroutine contenuta nelle librerie del CERN che fornisce direttamente variabili tratte dalla distribuzione richiesta (vedi fig. 4.5). Per seguire questo metodo è sufficiente sostituire il primo *loop* dell'editor del programma con le istruzioni

E' utile notare che anche per la funzione  $\Gamma$  di Eulero si utilizza una subroutine contenuta nelle librerie del CERN.

Sommando i passi del moto browniano frattale si può descrivere la legge di evoluzione temporale. Questa può essere facilmente simulata utilizzando il programma precedente ed aggiungendo ad esso un ulteriore loop (si vuole simulare la posizione della particella in funzione del numero dei passi sommati):

La simulazione è stata effettuata con i seguenti valori dei parametri:

$$n = 8 \quad M = 700 \quad t_f = 2500 \quad l = 26700$$

$$H = 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$$

```
call rg32in(iseed)
do j=1,1
  y(j)=rg32(dummy)
end do
```

Figura 4.11: Sostituzione del primo loop per il secondo metodo

```
do i=1,tf
  do t=1,i
    SB(i)=SB(i)+DB(t)
  end do
end do
```

Figura 4.12: Loop aggiuntivo per la simulazione della posizione della particella

Ciò che è importante osservare, confrontando le figure generate con metodo diverso, è che cambiando il generatore della distribuzione si modifica anche l'andamento delle curve, pur mantenendo le caratteristiche di frattalità delle stesse al variare di  $H$ , come descritto nel paragrafo precedente.

Di seguito vengono riportate le distribuzioni delle variabili gaussiane ottenute con i due metodi e la distribuzione della variabile casuale utilizzata, tutte fittate con la distribuzione teorica relativa.

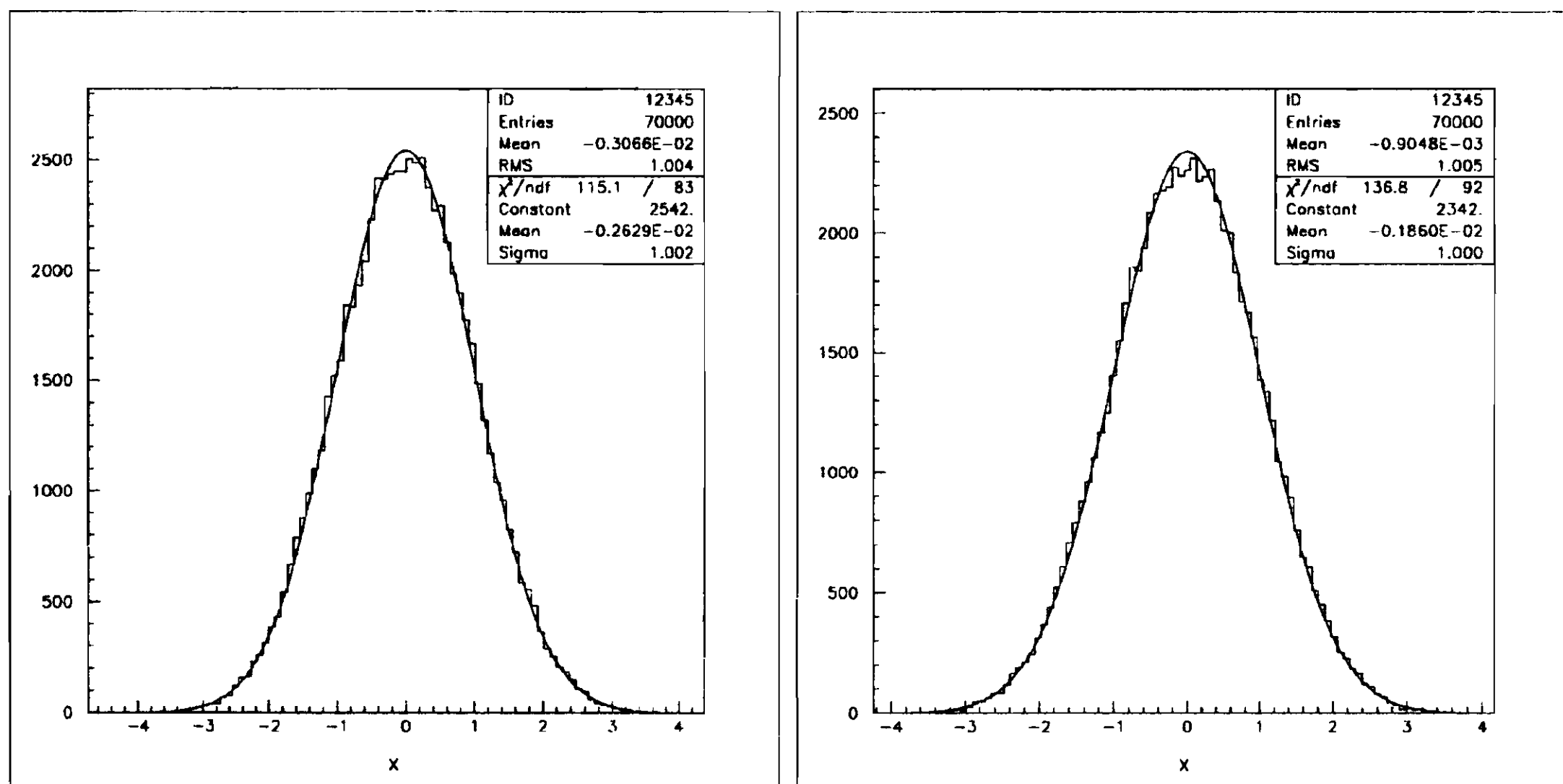


Figura 4.13: Distribuzione delle variabili gaussiane: a- ottenute con il metodo limite centrale; b- ottenute con la subroutine della libreria del CERN

## 4.6 L'analisi range - varianza

Lo scaling della equazione  $B_H(bt) - B_H(0) = b^H [B_H(t) - B_H(0)]$  ha portato alla conseguenza che la funzione casuale è proporzionale a  $|\Delta t|^H$ , cioè  $B_H(\Delta t) \propto |\Delta t|^H$ . Ciò implica anche che il range (cioè l'elongazione-posizione al tempo di adattamento  $\tau$ ) è una funzione casuale che gode della proprietà:

$$R(\tau) \simeq \tau^H. \quad (4.49)$$

Ora, poichè la varianza vera  $\sigma^2 = 1$  e la varianza del campione usato è  $\approx 1$  si può definire un range riscalato  $R(\tau)/\sigma$  che anche gode della proprietà  $R(\tau)/\sigma^2 \simeq \tau^H$ . Con il che scopriamo che l'esponente di Hurst si può sperimentalmente stimare prendendo:

$$\log_{10} \frac{R(\tau)}{\sigma^2} \simeq H \log_{10} \tau \quad (4.50)$$

e facendo un fit dei risultanti dalla simulazione. Qui si può fare una verifica sui dati simulati dall'equazione di Mandelbrot-Wallis tenendo conto che essa è una espressione approssimata; si può cioè interpolare la

curva:

$$\log_{10} \frac{\bar{R}(\tau)}{\sigma^2} = H \log_{10}(a\tau) = H[\log_{10} a + \log_{10} \tau] \quad (4.51)$$

Interpolando la distribuzione dei dati simulati da un processo browniano gaussiano con la (4.49) si ottiene  $H = 0.510 \pm 0.008$ ; cioè si verifica l'ipotesi  $H = 0.5$  con una incertezza del 2%. Interpolando la curva  $H[\log_{10} a + \log_{10} \tau]$  si trova anche  $a = 1.1 \pm 0.1$ .

Per la funzione  $B_{0.9}(t)$  di un processo browniano frattale con  $H_{gen} = 0.9$  le cose vanno diversamente. La curva è molto diversa da quella del processo gaussiano. L'esponente di Hurst è riprodotto solo approssimativamente:  $H_{out} = 0.81 \pm 0.02$ , valore che è inferiore del 10% rispetto ad  $H_{gen}$ . Va sottolineato che usiamo solo una memoria finita, limitata a ( $M=700$ ) e una risoluzione finita ( $n=8$ ); infatti  $H_{out} < H_{gen}$  perché per  $\tau > 700$   $H \rightarrow 0.5$ . Per ottenere un valore di  $H_{out}$  più vicino ad  $H_{gen}$  occorre aumentare il valore di  $M$ ; per esempio  $M \simeq 2500$ .



# Capitolo 5

## Misure di insiemi frattali

### 5.1 Introduzione

Una introduzione ai multifrattali più impegnata, rispetto a quella intuitiva di considerarli come insiemi dipendenti da un parametro cosicchè una misura dell'insieme può avere dimensione  $D = D(h)$  funzione del parametro  $h$  (per esempio l'altitudine), richiede di procedere secondo una metodica più rigorosa, e nello stesso tempo una breve introduzione illustrativa.

L'invarianza di scala (o *scaling*), che è contenuta nella terza definizione di frattale data da Mandelbrot nel Cap.2, è la proprietà per cui una relazione matematica risulta invariata se variamo la scala con cui esprimiamo le grandezze in essa contenuta:

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \quad (5.1)$$

dove  $\lambda$  è detto fattore di scala e  $\alpha$  esponente di scala<sup>1</sup>. Nella seconda delle definizioni proposte da Mandelbrot, che si rifà alla misura di Hausdorff e Besicovitch di un insieme, l'invarianza è espressa volontariamente in

---

<sup>1</sup>Purtroppo, in troppe occasioni i parametri vengono chiamati  $\alpha$ . Accade anche in questo volume. Tuttavia, si fa affidamento sul buon senso e sulla elasticità mentale dei lettori per capire che il significato è diverso nelle diverse circostanze. La scelta favorisce invece il confronto con i lavori originali e con i simboli usati nella letteratura specialistica.

una forma vaga, in modo che possa comprendere la più grande gamma possibile di fenomeni che presentino tale proprietà. In particolare essa può comprendere i casi in cui le proprietà di scaling si sono ritrovate nelle distribuzioni di probabilità di una certa grandezza misurabile; in tal caso l'invarianza è solo di tipo statistico. Proprio questo aspetto è per noi importantissimo perché in fisica è quello più facilmente riscontrato ad esempio in fenomeni quali la turbolenza, la pioggia, il moto browniano, le piene dei fiumi, gli sciami adronici ecc. Frattali perfettamente autosimili come la curva triadica di Koch sono in natura delle idealizzazioni; esse giocano il ruolo di esempi principe per la definizione del concetto di frattale, ma sono spesso svianti. Essi sono innaturali quanto potevano esserlo le curve lisce usate in precedenza per descrivere le forme della natura. Il moto browniano invece, è un moto fisico del tutto speciale: la traiettoria di una particella soggetta a moto browniano nel piano ha sia la dimensione topologica che quella di Hausdorff uguale a 2; infatti la traiettoria passa per qualsiasi punto dello spazio delle fasi (Teorema di Liouville). In senso stretto non sarebbe considerato un frattale. Tuttavia abbiamo visto che si arricchisce la possibilità descrittiva generalizzando il parametro di Hurst come abbiamo fatto nel Cap. 2.

I **multifrattali** sono oggetti o insiemi che posseggono più di una dimensione frattale. Ne possono esistere sia di geometrici che di stocastici. In questi ultimi le proprietà di scaling sono presenti nelle distribuzioni di probabilità e pertanto sono molto più importanti di quelli geometrici per lo studio dei fenomeni naturali. Un esempio tipico di multifrattale geometrico è una montagna o meglio l'insieme delle sue sezioni orizzontali individuate, su di una cartina, dalle isoipse. Tali sezioni hanno dimensione frattale diversa a seconda della quota alla quale sono eseguite, così che abbiamo una "funzione" di dimensione frattale che dipende da un parametro continuo (l'altitudine). Tale nozione di dipendenza da un parametro è tipica di tutti i fenomeni multifrattali. Altri tipi di multifrattali sorgono in modo naturale da fenomeni generati da cascate moltiplicative (come vedremo più avanti).



Pensiamo ad una popolazione fatta di membri-costituenti distribuiti in un volume di dimensione lineare  $L$ , cioè in un volume  $L^E$  (dove  $E$  è la dimensione dello spazio di immersione). Per intenderci la popolazione potrebbe essere:

- la popolazione umana distribuita sulla superficie terrestre;
- la posizione delle stazioni metereologiche nel mondo (che sono distribuite in modo molto disuniforme nei diversi continenti);
- la dissipazione di energia nello spazio (importante in tutti i fenomeni di turbolenza);
- le fluttuazioni del rumore in una linea di trasmissione (esempio di distribuzione ad una dimensione);
- la distribuzione di impurità sulla superficie o dentro la massa di un corpo (molto comune in molti fenomeni fisici);
- i momenti magnetici all'interno di un magnete (i magneti non si magnetizzano uniformemente);

Molte variabili fisiche possono fluttuare in modo selvaggio nello spazio. L'oro, per esempio, si trova in concentrazioni abbondanti soltanto in pochissime zone, ma in concentrazioni molto molto basse in moltissime parti.

La potenza della descrizione multifrattale è quella di essere valida a qualunque scala ( $Km$ ,  $m$ ,  $\mu m$ ). Una misura multifrattale è legata allo studio di una distribuzione di grandezze fisiche (o di altre quantità) in un supporto geometrico ( $\Rightarrow$  multifrattali geometrici). Il supporto può essere euclideo (linea, superficie, volume) o potrebbe essere a sua volta un insieme frattale di dimensione  $D$  non intera, ma inferiore alla dimensione  $E$  dello spazio di immersione. Alla enunciazione dei concetti fondamentali sui multifrattali hanno contribuito i seguenti lavori: Mandelbrot nel 1972/74 nella descrizione dei fenomeni di turbolenza [28], Mandelbrot nel 1982 estendendo la trattazione a molti altri contesti [11], Frisch e Parisi

nel 1985 sviluppando ulteriormente l'applicazione alla turbolenza[33]b, Katzen e Procaccia[35] nel 1987 interpretando la non analiticità delle dimensioni di insiemi multifrattali di interesse fisico come le transizioni di fase.

L'idea che una misura frattale si possa rappresentare in termini di sottoinsiemi frattali tra loro intrecciati e intercorrelati che hanno esponenti di scala diversi apre una nuova vasta gamma di opportunità per la applicazione della geometria frattale ai sistemi fisici. In questo capitolo pertanto vogliamo discutere alcune idee di base ed illustrare qualche esempio significativo.

## 5.2 Barra di Cantor e scale diaboliche

Cerchiamo di migliorare il significato primordiale dell'insieme di Cantor. L'iniziatore dell'insieme non è più l'intervallo unitario bensì una barra di un materiale di densità lineare  $\rho_o = 1$  e di lunghezza originaria  $l_o = 1$  e quindi di massa  $m_o = 1$ . Invece che applicare il generatore usato nei Cap. 2, dividiamo la barra in due pezzi uguali di massa  $m_1 = m_2 = 0.5$  e *martelliamo i due pezzi* fino a farli diventare di lunghezza  $l_1 = l_2 = 1/3$ . La densità aumenta da  $\rho_o = 1$  a  $\rho = \frac{m_1+m_2}{l_1+l_2} = \frac{3}{2}$ . Ripetendo  $n$  volte l'applicazione del nuovo generatore (l'operazione di taglio e martellamento), alla generazione  $n$  ci troviamo con  $M = 2^n$  barrette di lunghezza  $l_n = 3^{-n}$  e di massa  $m_n = 2^{-n}$ . Abbiamo fatto in modo che il processo conservi la massa, cioè che:

$$\sum_{i=1}^n m_i = 1 \quad (5.2)$$

Mandelbrot chiamò questo processo rattrappimento (*curdling*), cioè la trasformazione di una barra omogenea in un insieme a macchia di leopardo, fortemente disomogeneo con concentrazioni di alta densità in regioni sempre più piccole. Cosa consegue da quanto sopra? Che per  $l_i \leq \delta$  (dove  $\lambda = 1/\delta$  è la risoluzione al passo  $n$ -esimo) la massa di un

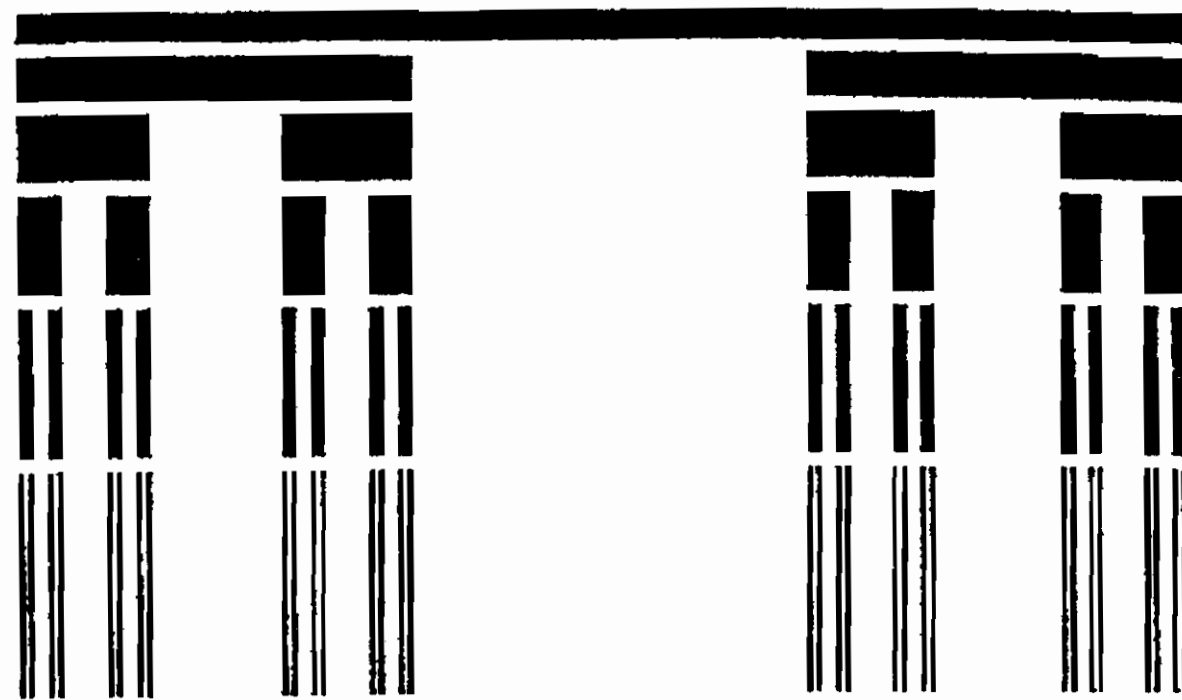


Figura 5.1: La barra triadica di Cantor

segmento  $l_i$  è:

$$m_i = l_i^{\frac{\log 2}{\log 3}} = l_i^\alpha \quad (5.3)$$

con  $\alpha = \frac{\log 2}{\log 3} < 1$ . La densità del segmento  $l_i$  è invece:

$$\rho_i = \frac{m_i}{l_i} = l_i^{\alpha-1}$$

L'esponente  $\alpha$  viene detto **esponente di Lipschitz- Hölder** e controlla la singolarità della densità  $\rho_i$ ;  $\alpha$  si chiama pertanto anche **esponente della singolarità**. Possiamo quindi costruire una curva triadica di Cantor (fig. 5.1) nella quale in ordinata rappresentiamo la densità  $\rho$  proporzionale all'altezza dei segmenti.

La nostra modifica impone di specificare  $\alpha$  per sapere come aumenta la densità al decrescere di  $l_i$ . Questo insieme di supporto della massa è un frattale di dimensioni  $D = \frac{\log 2}{\log 3}$ . Possiamo pertanto dire che le singolarità di esponente  $\alpha$  hanno un supporto di dimensione frattale  $D$ .

Abbiamo supposto che  $m_i$  rappresentasse la massa di una barra di Cantor; avremmo indifferentemente potuto immaginare che  $m$  fosse la carica elettrica, il momento magnetico, la vorticità idrodinamica o anche la probabilità di qualche fenomeno, visto che abbiamo assicurato la unitarietà ( $\sum m_i = 1$ ). Pertanto  $m$  può *misurare* qualunque quantità *appoggiata* ad un insieme geometrico. Possiamo inoltre usare un iniziatore diverso ed un generatore diverso.

Partendo dalla barra di Cantor possiamo fare una interessante costruzione. Poniamo  $x = 0$  all'inizio di sinistra della barra e calcoliamo la massa contenuta nel segmento  $[0, x]$ :

$$M(x) = \int_0^x \rho(t) dt = \int_0^x dm(t)$$

Qui la densità  $\rho(t)$  è zero in tutti le zone *bianche* e diventa  $\infty$  in tutte le zone *nere* della fig. 5.1, quando l'insieme di Cantor diventa una polvere di punti.

La massa subisce dei salti nei punti in cui un bianco è seguito da un nero, ed è costante nei tratti bianchi. Se si ragionasse in secondo Lebesgue, si potrebbe ragionare approssimativamente come segue: la massa rimane costante nei tratti che corrispondono ai buchi, ma la lunghezza dei buchi è 1, cioè la lunghezza della sbarra. Poichè la densità è zero nei buchi e i buchi sono in tutto lunghi 1, la massa è zero.

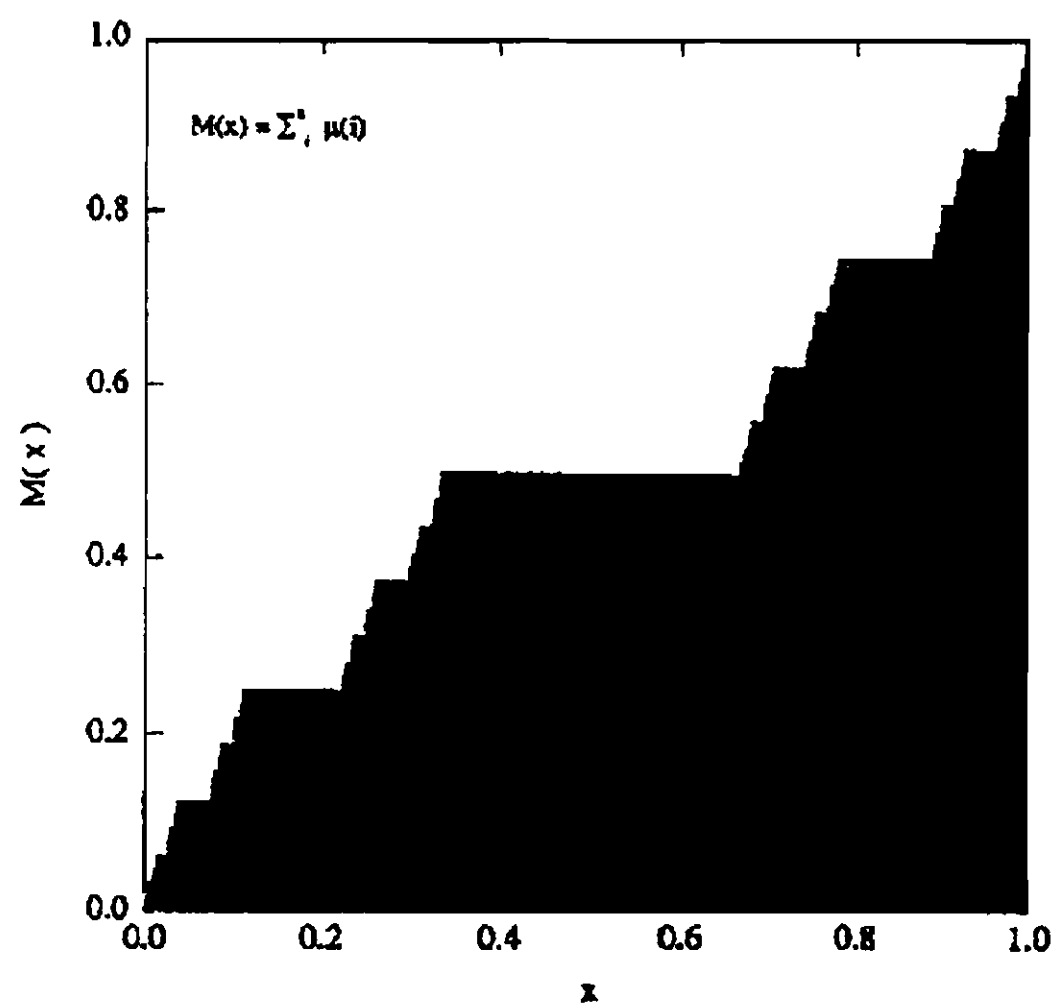


Figura 5.2: La massa della barra triadica di Cantor

Chiaramente un ragionamento di questo genere è sbagliato. La massa subisce dei salti infinitesimi in corrispondenza di ciascun punto dell'insieme di Cantor e tutti i contributi fanno sì che:

$$M(1) = \int_0^1 dm = 1$$

$M(x)$ , rappresentata in fig. 5.2 e chiamata *scala del diavolo*, è quasi dovunque orizzontale e la curva è autoaffine[29].

### 5.3 Il processo moltiplicativo binomiale

In generale i processi moltiplicativi hanno la capacità di generare grosse fluttuazioni locali. Popolazioni o distribuzioni generate da processi moltiplicativi hanno molte applicazioni e godono di proprietà relativamente semplici (nel Cap. 8 sulla statistica riprenderemo più a fondo il discorso). Consideriamo qui, per ora, il processo moltiplicativo binomiale.

Sia una popolazione di  $N_{tot}$  membri distribuiti su un segmento  $S = [0, 1]$ . Nel limite  $N_{tot} \rightarrow \infty$ ,  $N_{tot}$  è un campione dell'intera popolazione. Dividiamo il segmento in celle di lunghezza  $\delta = 2^{-n}$  cosicchè servono  $N = 2^n$  celle per ricoprire l'insieme  $S$  ( $n$ =numero di generazioni nella suddivisione binaria di  $S$ ). La distribuzione di popolazione su  $S$ , alla risoluzione  $\lambda = 1/\delta = 2^n$ , è specificata dai numeri  $N_i$  di membri della cella  $i$ -esima. Una misura utile del contenuto della cella  $i$ -esima è  $\eta_i = \frac{N_i}{N_{tot}}$ . L'insieme  $M$  dato dal vettore:

$$M = \{\eta_i\}_{i=0}^{N-1} \quad (5.4)$$

descrive completamente la distribuzione. Prendiamo ora un sottinsieme  $L$  di  $S$  e definiamo con  $N_L$  l'insieme degli indici delle celle necessarie per ricoprire  $L$ . La misura  $M(L)$  del sottinsieme  $L$  è  $M(L) = \sum_{i \in N_L} \eta_i$ . Questa di solito è la fine della storia: occorre conoscere  $M$  per conoscere la distribuzione dei membri su  $L(S)$  con una risoluzione  $\lambda$ , la migliore possibile. Tuttavia se  $M$  possiede proprietà di *scaling* si può dire molto di più sulla distribuzione. Consideriamo il processo moltiplicativo di Besicovitch [12] in grado di fornire una misura sull'intervallo unitario  $S = [0, 1]$ .

Costruiamo ora una distribuzione speciale suddividendo  $S$  in due parti di uguale lunghezza  $\delta = 2^{-1}$ . Alla prima appartenga una frazione  $p$  della

popolazione, alla seconda appartiene una frazione  $1-p$  della popolazione. La misura del primo segmento è  $\mu_0 = p$ , mentre quella del secondo è  $\mu_1 = 1-p$ . Aumentiamo la suddivisione a  $\delta = 2^{-2}$  (risoluzione  $\lambda = 2^2$ ). Il processo moltiplicativo divide la popolazione in 4 frazioni e si possono avere le "misure":

$$M_2 = \{\eta_i\}_{i=0}^{2^2-1} = \mu_0\mu_0, \mu_0\mu_1, \mu_1\mu_0, \mu_1\mu_1$$

Alla terza generazione il segmento è diviso in celle di lunghezza  $\delta = 2^{-3}$  e l'insieme  $M$  è dato dalla lista delle misure:

$$M_3 = \{\eta_i\}_{i=0}^{2^3-1} = \mu_0\mu_0\mu_0, \mu_0\mu_0\mu_1, \mu_0\mu_1\mu_0, \mu_0\mu_1\mu_1 \\ \mu_1\mu_0\mu_0, \mu_1\mu_0\mu_1, \mu_1\mu_1\mu_0, \mu_1\mu_1\mu_1 \quad (5.5)$$

Il processo produce segmenti sempre più corti (e sempre più vuoti) che contengono una porzione sempre più piccola della misura.

Definendo  $x = i\delta = i2^{-n}$  come la misura del segmento  $L = [0, x]$ , secondo la definizione,  $M(x) = \sum_{i=0}^{x \cdot 2^n} \eta_i$  [che proviene dalla (5.4)]. Questo significa che  $M(x)$  scala!

Osserviamo infatti che, al passo zero della generazione dell'insieme,  $\delta = 1$ ,  $M(0) = 0$  e  $M(1) = 1$  e questo deve sempre essere vero. Al primo passo  $\delta = 1/2$ ; il primo intervallo pesa  $p$  ed il secondo pesa  $1-p$ . La variabile  $x$  può assumere i valori  $x = 0; 1/2; 1$ , cioè i valori iniziali e/o finali degli intervalli. Le condizioni iniziali restano soddisfatte. Pertanto:  $M(0) = 0$  ancora;  $M(1) = p + (1-p) = 1$  ed ora anche  $M(1/2) = p$  il che si può anche scrivere  $M(1/2) = pM(1)$  dove  $M(1)$  è il peso dell'intervallo nel passo precedente. Ora, nel passo successivo si giunge ad un intervallo  $\delta = 1/4$  per cui  $M(1/4) = pM(1/2)$ ;  $M(1/8) = pM(1/4)$ , ecc.

Generalizzando quindi possiamo scrivere, per  $n = 1, 2, \dots$ :

$$M(\delta^n) = pM(\delta^{n-1}).$$

Ora, poichè si può scrivere:

$$\delta^{n-1} = \frac{\delta^n}{\delta},$$

per  $\delta = 1/2$  e ponendo  $y = \delta^{n-1}$  e  $x = \delta^n$  si ha che  $y = 2x$  per  $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ .  
Ciò per gli intervallini tra 0 ed  $1/2$ .

Infatti:

$$M(\lambda\delta^{n-1}) = \lambda^\alpha M(\delta^{n-1})$$

Ponendo  $\lambda = \delta$ , allora:

$$M(\lambda\delta^{n-1}) = \lambda^\alpha M(\delta^{n-1}) = pM(\delta^{n-1})$$

e  $\delta^\alpha = p$ , ovvero  $\alpha = \frac{\log(p)}{\log(\delta)}$ .

Prendiamo ora in considerazione l'intervallo  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ . Dobbiamo misurare  $M(1/2 + \delta^n)$ , cioè la misura dell'insieme che copre tutto il tratto fino a  $x = 1/2 + \delta^n$ , dove  $\delta^n$  corrisponde al primo intervallino dopo la metà.

In questo caso, al secondo passo,  $M(3/4) = p + (1 - p)M(1/2)$ . Al terzo passo  $M(5/8) = p + (1 - p)M(1/4)$ , ecc.

Generalizzando quindi:

$$M(1/2 + \delta^n) = p + M(\delta^{n-1})(1 - p)$$

Ora, poichè si può scrivere:

$$\delta^{n-1} = [(1/2 + \delta^n) - 1/2] \frac{1}{\delta} = (1/2 + \delta^n) \frac{1}{\delta} - \frac{1}{2\delta}.$$

Per  $\delta = 1/2$ , ponendo  $y = \delta^{n-1}$  e  $x = 1/2 + \delta^n$  e notando che  $\frac{1}{2\delta} = 1$ , si ha che  $y = 2x - 1$  per  $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ . Ciò per gli intervallini tra  $1/2$  ed 1.

Da queste generalizzazioni si ottiene pertanto il sistema:

$$\begin{cases} M(x) = pM(2x) & \text{per } 0 \leq x \leq 1/2 \\ M(x) = p + (1 - p)M(2x - 1) & \text{per } 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases} \quad (5.6)$$

La (5.6) viene chiamata **trasformazione affine** di  $M(x)$ .

In fig. 5.3a è rappresentata la undicesima generazione di un processo binario moltiplicativo con  $p = 0.25$ , mentre in fig. 5.3b è rappresentata la misura dell'insieme  $M(x)$ . Si pensi ora di tracciare una retta verticale passante per  $x = 0.5$  ed una retta orizzontale per  $M(x) = 0.25$  che dividono in quattro parti la fig. 5.3b. La figura in alto a destra (R) si

ottiene dalla figura in basso a sinistra (L) moltiplicando per 1 l'asse delle  $x$  e moltiplicando per 3 l'asse delle  $M(x)$ . La trasformazione della figura si dice autoaffine perché i fattori di scala dei due assi sono diversi.

Il sistema di equazioni 5.6 rappresenta l'invarianza della misura  $M(x)$  sotto le trasformazioni affini di coordinate:

$$\begin{cases} L: (x, y) \rightarrow (\frac{1}{2}x, py) \\ R: (x, y) \rightarrow (\frac{1}{2}, p) + (\frac{1}{2}x, (1-p)y) \end{cases} \quad (5.7)$$

Queste trasformazioni riconducono la curva  $y = M(x)$  in se stessa per cui la curva è autoaffine.

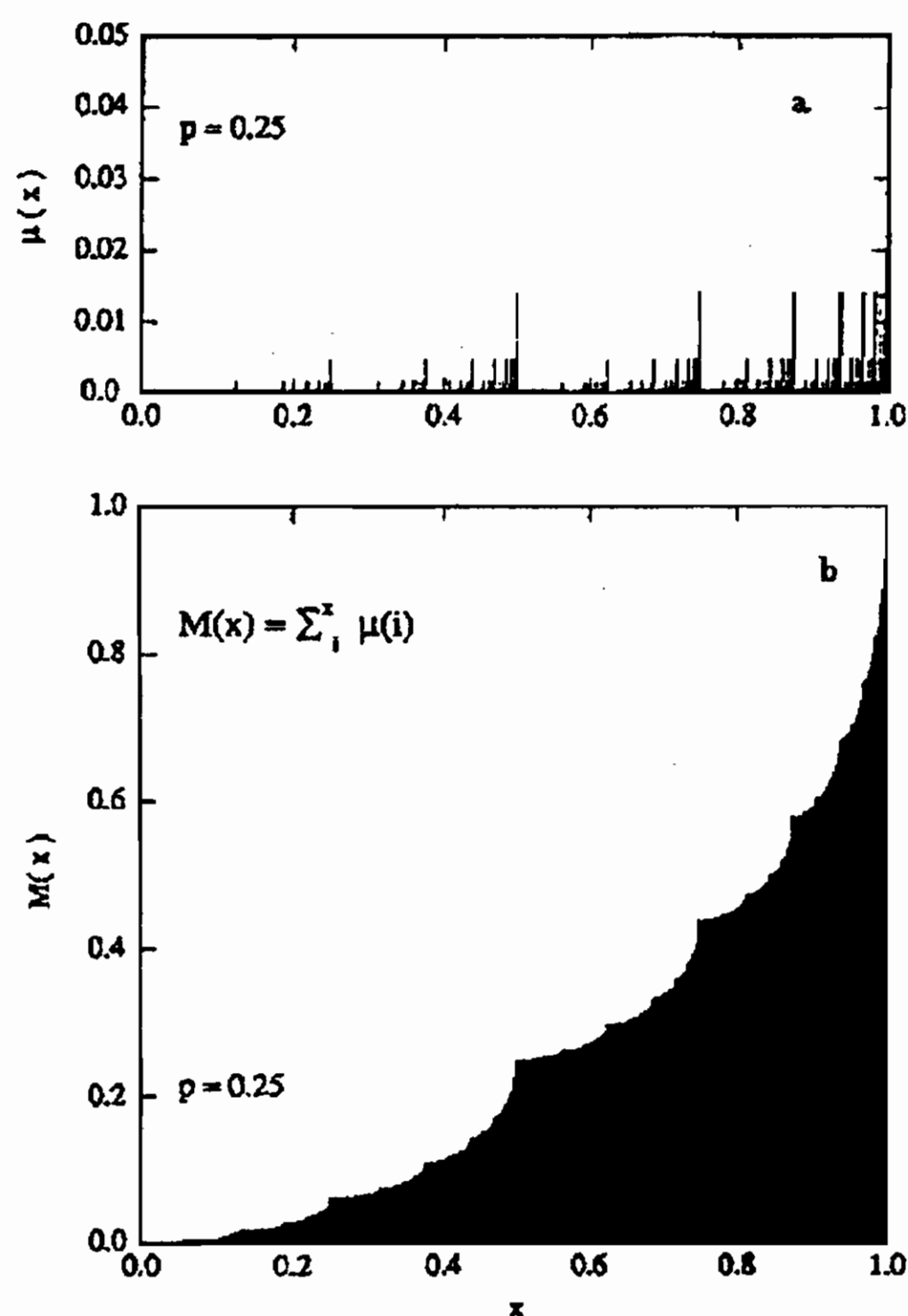


Figura 5.3: Misura  $M(x)$  per un processo moltiplicativo binomiale alla 11-sima generazione: a) Misura del contenuto  $\mu$  di ogni cella; b) Misura nell'intervallo  $[0, x]$

Ritorniamo ora alla generazione  $n$ -esima. Ci sono  $n$  celle di misura  $\mu = (1-p)^{n-1}$ .

In generale se  $k = 0, 1, 2, \dots, n$  e  $\xi = k/n$ ;  $N_n(\xi)$  celle ciascuna di misura  $\mu_\xi = \Delta^n(\xi)$  dove  $N_n(\xi)$  è l'espressione della binomiale (cfr. Cap.



A):

$$N_n(\xi) = \frac{n!}{(\xi n)!((1-\xi)n)!}$$

e  $\Delta(\xi)$  è:

$$\Delta(\xi) = \mu_0^\xi \mu_1^{(1-\xi)} = p^\xi (1-p)^{(1-\xi)} \quad (5.8)$$

La (B.104) traduce un fattore di scala che fa variare  $\xi$  da 0 a 1 invece che  $k$  da 0 a  $n$ .

La misura totale dell'insieme  $S[0, 1]$  è quindi data da:

$$M(x=1) = \sum_{i=0}^{2^n-1} \mu_i = \sum_{\xi=0}^1 N_n(\xi) \Delta^n(\xi) = (\mu_0 + \mu_1)^n = 1$$

Il processo moltiplicativo semplifica e razionalizza la descrizione della distribuzione.

I processi moltiplicativi sono molto importanti nella fisica delle particelle e nei frattali stocastici.

## 5.4 Sottoinsiemi frattali

Nella  $n$ -esima generazione del processo analizzato nel § precedente ci sono  $N_n(\xi)$  segmenti di lunghezza  $\delta_n = 2^{-n}$  e che hanno la stessa misura  $\mu_\xi$ . Questi segmenti formano un sottoinsieme  $S_n(\xi)$  dell'intervallo unitario  $S = [0, 1]$  che è un sottoinsieme "frattale" di punti. Per convincerci ricopriamo l'insieme con segmenti di lunghezza  $\delta$  e facciamo la misura-d  $M_d(S_\xi)$  secondo la prescrizione di Hausdorff-Besicovitch (vedi Cap. 2) e determiniamo la dimensione frattale  $D(\xi)$  studiando il comportamento di  $M_d$  per  $\delta \rightarrow 0$ .

Si ha:

$$M_d(S_\xi) = N_n(\xi) \delta^d \xrightarrow{(\delta \rightarrow 0)} \begin{cases} 0, & d > D(\xi) \\ \infty, & d < D(\xi) \end{cases}$$

Usiamo la seconda formula di Stirling per approssimare  $n!$ :

$$n! = \sqrt{2\pi n} n^{n+1/2} e^{-n}$$

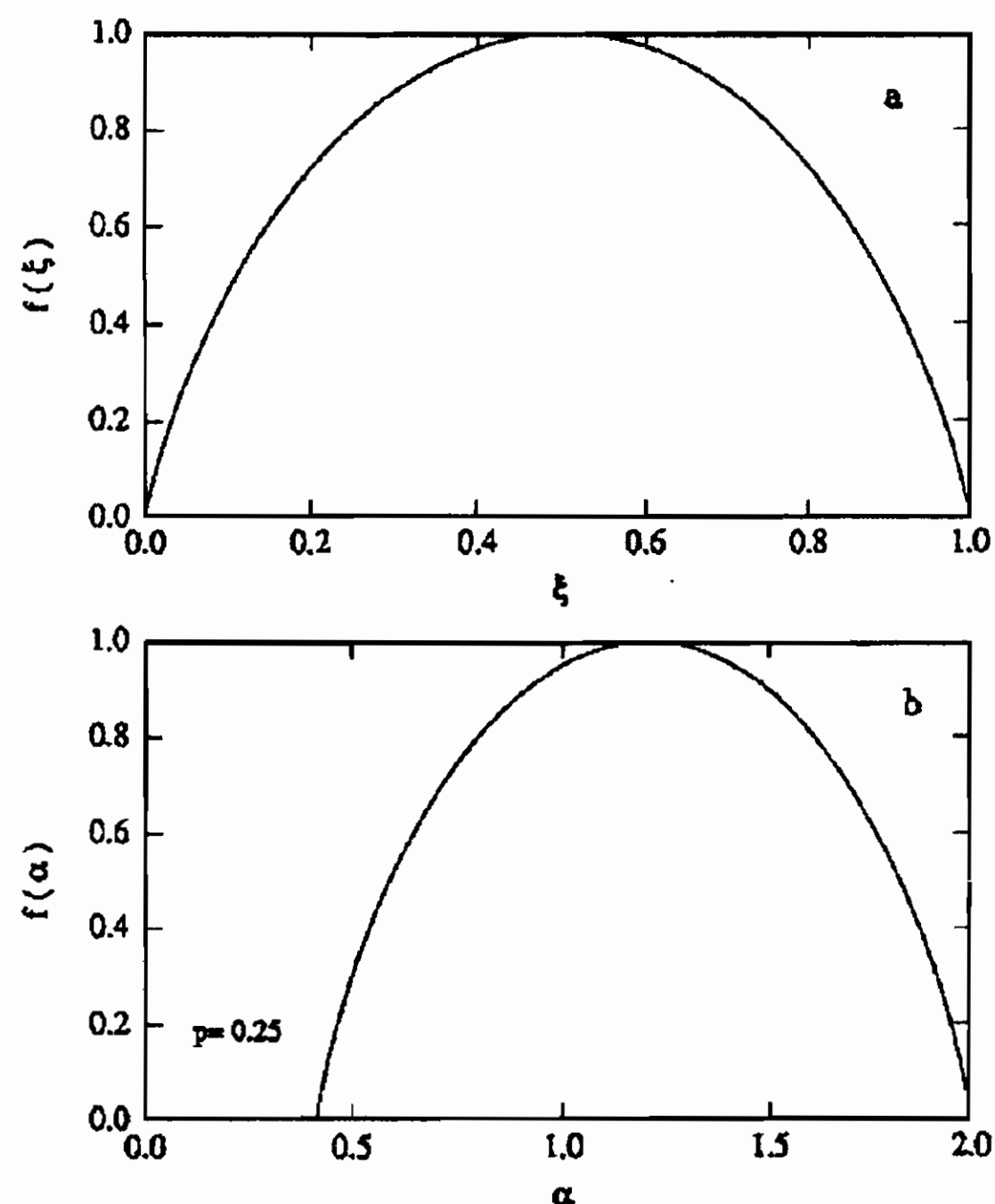


Figura 5.4: Sottoinsiemi frattali: a) Dimensione frattale dei sottoinsiemi  $S_\xi$  in funzione di  $\xi$ ; b) Dimensione frattale dei sottoinsiemi  $S_\alpha$  in funzione di  $\alpha$ , per  $p = 0.25$ .

Ricordando che abbiamo posto:  $\xi = \frac{k}{n}$  e, per costruzione,  $n = -\frac{\log \delta}{\log 2}$ :

$$N_n(\xi) = \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \frac{n^n e^{-n}}{\sqrt{2\pi k^k e^{-k}} (n-k)^{n-k} e^{-(n-k)}} \quad (5.9)$$

$$= \frac{n^n e^{-n+k+n-k}}{\sqrt{2\pi k(n-k)} k^k (n-k)^{n-k}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi k(n-k)}} e^{n \log n - k \log k - (n-k) \log(n-k)}$$

Essendo  $k = \xi n$  e pertanto  $n - k = n(1 - \xi)$ :

$$N_n(\xi) \simeq \frac{n^{n+1/2}}{\sqrt{2\pi \xi(1-\xi)} n} e^{-\xi n \log(\xi n) - n(1-\xi) \log n(1-\xi)} =$$

$$= \frac{n^{n-1/2}}{\sqrt{2\pi \xi(1-\xi)}} e^{-n[\xi \log \xi + \xi \log n + (1-\xi) \log(1-\xi) + (1-\xi) \log n]} =$$

$$= \frac{n^{n-1/2}}{\sqrt{2\pi \xi(1-\xi)}} e^{-n[\xi \log \xi + (1-\xi) \log(1-\xi) + \xi \log n + \log n - \xi \log n]} =$$

$$= \frac{n^{n-1/2}}{\sqrt{2\pi\xi(1-\xi)}} e^{-n \log n} e^{-n[\xi \log \xi + (1-\xi) \log(1-\xi)]} \quad (5.10)$$

Finalmente il numero di conteggi si riduce a:

$$N_n(\xi) = \binom{n}{\xi n} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi n\xi(1-\xi)}} e^{-n(\xi \log \xi + (1-\xi) \log(1-\xi))}$$

Riprendendo la (2.6) del Cap. 2 §2, la misura  $M_d(S_\xi)$  si può scrivere:

$$M_d(S_\xi, \delta) = N_n(\xi) \delta^d = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\xi(1-\xi)}} \delta^{-f(\xi)} \delta^d \xrightarrow{(\delta \rightarrow 0)} \begin{cases} 0, & d > D(\xi) \\ \infty, & d < D(\xi) \end{cases} \quad (5.11)$$

dove per comodità abbiamo posto:

$$f(\xi) = \frac{-[\xi \log(\xi) + (1-\xi) \log(1-\xi)]}{\log 2} \quad (5.12)$$

La misura  $M_d$  dell'insieme  $S_\xi$  è definita secondo Hausdorff e Besicovitch, per  $\delta \rightarrow 0$  e

$$d = f(\xi);$$

pertanto  $f(\xi)=D(\xi)$  è la dimensione frattale dell'insieme. Per la prima volta qui incontriamo esplicitamente una dimensione frattale che è una funzione. Ciò ci fa presagire che la flessibilità della geometria frattale aumenta enormemente con la introduzione della possibilità di operare con dimensioni frattali dipendenti da uno o più parametri. Per verificare che  $d = f(\xi)$ , basta esplicitare la dipendenza di  $n$  da  $\delta$  nella 5.11

$$M_d(S_\xi, \delta) = N_n(\xi) \delta^d = \sqrt{\frac{\log 2}{2\pi\xi(1-\xi)}} \frac{\delta^{d-f}}{\sqrt{-\log \delta}} \quad (5.13)$$

Chiamando  $K$  il primo fattore indipendente da  $\delta$ , consideriamo il limite notevole del tipo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -K x^\beta \log(x) = 0 \text{ per } \beta > 0 \quad (5.14)$$

Elevando alla 1/2 si ottiene:

$$\lim_{x \rightarrow 0} -K^{1/2} x^{\beta/2} (-\log x)^{1/2} = 0 \text{ per } \beta > 0 \quad (5.15)$$

Allora, se  $d - f < 0, f - d > 0$  e la 5.11 diventa:

$$M_d(S_\xi, \delta) = N_n(\xi)\delta^d = K \frac{1}{\delta^{f-d}(-\log \delta)^{1/2}} \quad (5.16)$$

Il denominatore tende a zero per cui, per  $\beta = (f - d) > 0$ ,  $M_d(S_\xi) \rightarrow \infty$ . D'altro canto, se  $d - f > 0$ ,  $M_d(S_\xi) \rightarrow 0/\infty \rightarrow 0$ . Infine, se  $d - f = 0$ :

$$M_d(S_\xi, \delta) = \frac{K}{(-\log \delta)^{1/2}} \rightarrow 0 \quad (5.17)$$

Pertanto l'insieme  $S_\xi$  ha misura nulla e dimensione frattale  $D = f(\xi)$ . In conclusione possiamo dire che la popolazione generata dal processo moltiplicativo binario è distribuita sull'insieme dei punti del segmento unitario  $S = [0, 1]$ . Questo set è l'unione di sottoinsiemi  $S_\xi$  tali per cui  $S = \bigcup_\xi S_\xi$ .

Gli insiemi  $S_\xi$  sono frattali di dimensione  $D = f(\xi)$  data dalla (5.12) e tale dimensione frattale dipende dal parametro  $\xi = k/n$ . In fig. 5.4a è disegnato l'andamento di  $f(\xi)$  in funzione di  $\xi$ , secondo la (5.12).

La misura  $M(x)$  della popolazione distribuita sull'intervallo unitario è completamente caratterizzato dall'unione di insiemi frattali. Ogni insieme frattale ha la sua dimensione frattale, diversa e distinta. Anche per questa ragione si usa il termine **multifrattale** per descrivere questi insiemi.

## 5.5 Esponente di Lipschitz-Hölder e $f(\alpha)$

Il parametro  $\xi = k/n$  che è peculiare per le catene moltiplicative binarie ha un carattere più che altro pedagogico, ma non è di particolare utilità. Più utile è l'**esponente  $\alpha$  di Lipschitz-Hölder**. Le singolarità della misura  $M(x)$  sono caratterizzate da  $\alpha$  (come nel caso della barra triadica di Cantor).

Consideriamo infatti ancora la misura generata dal processo moltiplicativo binario alla generazione  $n$ -esima.

Scegliamo un  $x(\xi)$  che corrisponde ad un dato valore di  $\xi_i$ . Questo punto è un membro dell'insieme  $S_\xi$ . Scegliamo la misura  $M(x)$  anche ad

un punto  $x(\xi) + \delta$  con  $\delta = 2^{-n}$ . L'incremento in  $M(x)$  tra i due punti è  $\mu_\xi$  e si ha:

$$\eta_\xi = M(x(\xi) + \delta) - M(x(\xi)) \quad (5.18)$$

Definiamo allora  $\mu_\xi$  nel seguente modo:

$$\eta_\xi = \delta^\alpha \quad (5.19)$$

così come avevamo fatto a proposito della barra di Cantor con la (5.3).

Nei passi successivi viene generato un numero sempre maggiore di punti dell'insieme  $S_\xi$  e le equazioni (5.18) e (5.19) rimangono valide anche nel limite  $n \rightarrow \infty$ .

Se prendiamo:

$$\eta_\xi = \Delta^n(\xi) = [\mu_0^\xi \mu_1^{(1-\xi)}]^n = [p^\xi (1-p)^{1-\xi}]^n$$

e definiamo:

$$\eta_\xi = \delta^{\alpha(\xi)} \quad (5.20)$$

ricordando che  $\delta = 2^{-n}$  possiamo concludere che la misura per una popolazione moltiplicativa ha un esponente di Lipschitz-Hölder:

$$\alpha(\xi) = \frac{\log(\eta_\xi)}{\log(\delta)} = \frac{-[\xi \log(p) + (1-\xi) \log(1-p)]}{\log 2} \quad (5.21)$$

Questo parametro  $\alpha$  vale per i punti dell'insieme  $S_\xi$  ed è una funzione lineare di  $\xi$ ;  $\alpha$  è anche funzione del peso  $p$  con cui si suddivide l'intervallo unitario di partenza.

Si trova che, per  $p \leq 1/2$ ,  $\alpha$  varia tra due valori estremi:

$$\alpha_{Min} = -\frac{\log(1-p)}{\log 2} \quad \text{per } \xi = 0; \quad \alpha_{Max} = -\frac{\log(p)}{\log 2} \quad \text{per } \xi = 1$$

Vi è pertanto una corrispondenza biunivoca fra il parametro  $\xi (= k/n)$  ed  $\alpha$ . Di conseguenza il sottoinsieme frattale  $S_\xi$  si può anche indicare come  $S_\alpha$ . La misura  $M(x)$  è caratterizzata dall'insieme  $S_\alpha$  che, unito a tutti i possibili insiemi, costituisce l'insieme unitario originale per cui:

$$S = \bigcup_{\alpha} S_\alpha$$

La misura possiede delle singolarità di esponenti  $\alpha$  di Lipschitz-Hölder sull'insieme frattale  $S_\alpha$  che ha dimensione frattale  $f(\alpha) = f(\xi(\alpha))$ . La

curva  $f(\alpha)$  per la misura della popolazione generata da un processo moltiplicativo binario con  $p = 0.25$  è mostrato in fig. 5.4. Lo sviluppo delle turbolenze [30] sono ottimamente simulate da una curva  $f(\alpha)$  con  $p = 0.7$  che riproduce lo spettro multifrattale del campo dissipativo.

La curva  $f(\alpha)$  di fig. 5.4 gode di alcune caratteristiche particolari.

Se calcoliamo la derivata di  $f(\alpha)$ :

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{\log \xi - \log(1 - \xi)}{\log p - \log(1 - p)}$$

Per ricavare questa equazione occorre esplicitare la 5.21 rispetto a  $\xi$  ottenendo:

$$\xi(\alpha) = \frac{\log[2^\alpha(1 - p)]}{\log(1 - p) - \log p}. \quad (5.22)$$

Detto questo:

$$\frac{df(\alpha)}{d\alpha} = \frac{df}{d\xi} \frac{d\xi}{d\alpha} \quad (5.23)$$

per cui

$$\frac{d\xi}{d\alpha} = \frac{\log 2}{\log(1 - p) - \log p} \quad (5.24)$$

mentre:

$$\frac{df}{d\xi} = \frac{\log \xi + 1 - \log(1 - \xi) - 1}{\log 2}. \quad (5.25)$$

La 5.5 segue immediatamente.

Possiamo chiaramente vedere che il massimo della funzione si verifica nelle seguenti condizioni:

$$\begin{cases} \xi = \frac{1}{2} \\ f_{max} = f(\alpha_o) = 1 \\ \alpha_o = -\frac{\log p + \log(1-p)}{2 \log 2} \end{cases} \quad (5.26)$$

Il fatto che il massimo valore della dimensione frattale del sottoinsieme  $S_\alpha$  eguagli la dimensione frattale del supporto della misura, che nel nostro caso è 1 dal momento che la misura è definita su tutto

l'intervallo unitario, è un risultato generale. Per misure definite su insiemi frattali con dimensione  $D$  si trova  $f_{max}(\alpha) = D$  (come nel nostro caso). Questo non garantisce che l'insieme copra tutto l'intervallo, ma piuttosto che  $S_{\alpha_0}$  contenga una frazione dei punti dell'intervallo.

Il massimo si trova per  $\alpha_0 = 1.207$  quando  $p = 0.25$ . La funzione  $M(x)$  ha derivata nulla nei punti dove  $\alpha > 1$ . Ma  $M(x)$  è una funzione singolare perché i punti per cui  $\alpha(\xi) \leq 1$  sono densi dovunque.

La discussione sulle proprietà della funzione  $M(x)$  è in qualche modo delicata. Per esempio non è chiaro se i punti limite della sequenza di punti generati da un processo moltiplicativo debbano o meno essere inclusi [12] e [32]. Possiamo notare che la curva  $M(x)$  ha derivata nulla quasi ovunque, ma cresce da 0 a 1 al crescere di  $x$  da 0 a 1. In altre parole si tratta di una *scala del diavolo*. La lunghezza della curva dal punto origine  $P(0,0)$  al punto finale  $Q(1,1)$  è uguale a 2. Il termine *quasi ovunque* usato precedentemente significa *in tutti i punti salvo un insieme di punti con misura nulla (secondo Lebesgue)*. Questi punti possono essere coperti da segmenti di lunghezza totale trascurabile.

Un altro punto speciale della curva  $f(\alpha)$  è il seguente:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df(\alpha)}{d\alpha} = 1 \\ \xi = p \\ f(\alpha_s) = \alpha_s = S \\ S = -\frac{p \log(p) + (1-p) \log(1-p)}{\log 2} \end{array} \right. \quad (5.27)$$

Questo è il punto dove una linea che passa per l'origine è tangente a  $f(\alpha_s)$ . La dimensione frattale dell'insieme  $S_{\alpha_s}$  è  $S$ , conosciuta anche come *entropia* [12] del processo moltiplicativo binomiale. Nel processo moltiplicativo generale, in cui l'intervallo è suddiviso in  $b$  celle con peso  $p_0, p_1, p_{b-1}$ , si trova che  $f(\alpha_s)$  è dato da:

$$S = -\sum_{\beta=0}^{b-1} p_{\beta} \log_b(p_{\beta})$$

I fenomeni di turbolenza[30] sono ben descritti da processi moltiplicativi binari; in essi si ritrovano sperimentalmente (fig. 5.5) curve  $f(\alpha)$  che riproducono lo spettro del campo dissipativo perfettamente compatibili con quella mostrata in fig. 5.4b.

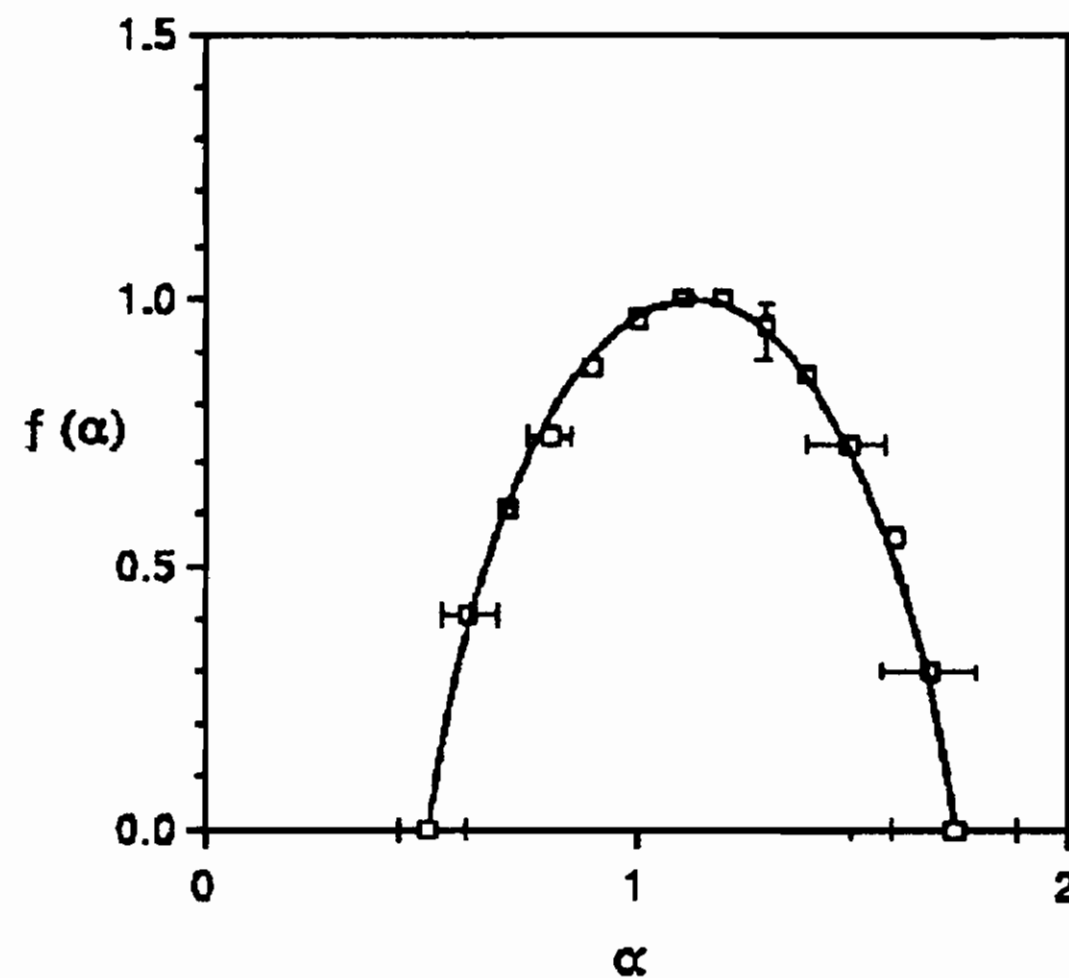


Figura 5.5: Lo spettro multifrattale per un processo mono dimensionale di turbolenza in un campo dissipativo con  $p=0.7$ .

## 5.6 Gli esponenti di massa

Le strutture frattali osservate sperimentalmente, per esempio le coste di un paese, possono anche essere riprodotte da simulazioni numeriche. Sia le osservazioni sperimentali che i risultati delle simulazioni danno un insieme di punti  $S$  che sono rappresentati sotto forma di curve o figure. Forse il metodo largamente più usato per lo studio di strutture di questo tipo è il metodo del *box-counting* mostrato in fig. 2.3 di Cap. 2. In questo metodo la dimensione  $E$  dello spazio delle osservazioni è suddiviso in iper-cubi di lato  $\delta$ , e vengono contati il numero  $N(\delta)$  di cubi che contengono almeno un punto dell'insieme  $S$ . Chiaramente questa è una forma basilare e non dà nessuna informazione sulla struttura dell'insieme. Per esempio se le coste di un paese sono molto frastagliate possono attraversare un singolo cubo un numero di volte  $n_i$ . Tuttavia il cubo contribuisce solo con uno al numero di cubi necessari a ricoprire l'insieme. C'è un modo per dare un peso maggiore ai cubi con un alto numero  $n_i$  e un peso minore ai cubi con  $n_i = 1$ ?

Una risposta a questa domanda è stata data da Mandelbrot nel 1974 [31], da Grassberger [33], Hentschel e Procaccia [27] negli anni successivi introducendo gli esponenti di massa.

Vediamo nei dettagli in cosa consiste il metodo degli esponenti di



massa.

Consideriamo un insieme  $S$  costituito da  $N$  punti e sia  $N_i$  il numero di punti nella cella  $i$ -esima. Questi punti sono un sottoinsieme che dipende dalla misura in corso. Costruiamo il momento statistico  $q$ -esimo utilizzando la *massa* o probabilità  $\mu_i = N_i/N$  nella cella  $i$ -esima, :

$$M_d(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q \delta^d = N(q, \delta) \delta^d \xrightarrow{(\delta \rightarrow 0)} \begin{cases} 0, & d > \tau(q) \\ \infty, & d < \tau(q) \end{cases} \quad (5.28)$$

Questa misura ha un *esponente di massa*  $d = \tau(q)$  per il quale la misura non diverge e non si annulla per  $\delta \rightarrow 0$ . L'esponente di massa  $\tau(q)$  dell'insieme dipende dall'ordine  $q$  del momento scelto. La misura è caratterizzata da tutta una serie di esponenti  $\tau(q)$  che controlla come i momenti della probabilità  $\{\mu_i\}$  scalano con  $\delta$ . Dall'equazione (5.28) risulta che il numero di cubi pesato ha la forma:

$$N(q, \delta) = \sum_{i=1}^N \mu_i^q \div \delta^{-\tau(q)} \quad (5.29)$$

e l'esponente di massa è dato dalla:

$$\tau(q) = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log[N(q, \delta)]}{\log(\delta)} \quad (5.30)$$

Possiamo subito notare che nel caso di scelta del momento  $q = 0$ , si ottiene  $\mu_i^{q=0} = 1$ , scoprendo che  $N(q = 0, \delta) = N(\delta)$  è semplicemente il numero di cubi necessari a coprire l'insieme, e  $\tau(0) = D$  coincide con la dimensione frattale dell'insieme. Le probabilità sono normalizzate:  $\sum_i \mu_i = 1$  da cui segue dalla (5.30) che  $\tau(1) = 0$ .

Se invece scegliamo grandi valori di  $q$ , per esempio 10 o 100, dalla (5.29) risulta che i contributi dalle celle con alto  $\mu_i$  sono favoriti. Infatti per  $q \gg 1$   $\mu_i^q \gg \mu_j^q$  con  $\mu_i > \mu_j$ . Al contrario per  $q \ll -1$  vengono favoriti i cubi con valori bassi della misura  $\mu_i$ . Questi limiti sono più comprensibili se si considera la derivata di  $\tau(q)$  fatta rispetto a  $q$ :

$$\frac{d\tau(q)}{dq} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i^q \log(\mu_i)}{(\sum_i \mu_i^q) \log(\delta)} \quad (5.31)$$

Se indichiamo con  $\mu_-$  il minimo valore di  $\mu_i$  nella somma possiamo scrivere:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(\sum_i' \mu_-^q) \log(\mu_-)}{(\sum_i \mu_i^q) \log(\delta)} \quad (5.32)$$

dove l'apice sulla somma indica che solo le celle con  $\mu_i = \mu_-$  contribuiscono alla sommatoria. L'espressione può anche essere riscritta nel seguente modo:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow -\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\mu_-)}{\log(\delta)} = -\alpha_{max}$$

dove abbiamo utilizzato la definizione dell'esponente di Lipschitz-Hölder  $\alpha$ . Con argomentazioni simili si può giungere alla conclusione che per  $q \rightarrow \infty$  il valore minimo di  $\alpha$  è dato da:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q \rightarrow +\infty} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\log(\mu_+)}{\log(\delta)} = -\alpha_{min}$$

dove  $\mu_+$  è il più elevato valore di  $\mu_i$  che determina il minor valore di  $\alpha$ . Nel paragrafo successivo vedremo come questo risultato ( $\alpha = d\tau/dq$ ) valga in maniera generale.

Per  $q = 1$  la derivata  $d\tau/dq$  assume un valore particolare:

$$\left. \frac{d\tau(q)}{dq} \right|_{q=1} = - \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\sum_i \mu_i \log(\mu_i)}{\log(\delta)} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{S(\delta)}{\log(\delta)}$$

dove  $S(\delta)$  è l'entropia della *partizione* della misura  $M = \{\mu_i\}_{i=0}^{N-1}$  sui cubi di dimensione  $\delta$  (cioè la partizione di massima probabilità), che può essere scritta nel seguente modo:

$$S(\delta) = - \sum_i \mu_i \log(\mu_i) \div -\alpha_1 \cdot \log(\delta)$$

L'esponente  $\alpha_1 = -(d\tau/dq)|_{q=1} = f_S$  è anche la dimensione frattale dell'insieme in cui le misure si concentrano e descrive lo *scaling* in funzione della dimensione  $\delta$  dei cubi della partizione entropia della misura. Possiamo notare che la partizione entropia  $S(\delta)$  alla risoluzione  $\delta$  è data in termini dell'entropia  $S$  della misura dalla relazione  $S(\delta) = -S \log(\delta)$ . Il comportamento generale della sequenza degli esponenti di massa  $\tau(q)$  è visibile nella misura di un intervallo generato da un processo moltiplicativo binomiale. Per questo processo si ottiene:

$$N(q, \delta) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^{qk} (1-p)^{q(n-k)} = [p^q + (1-p)^q]^n$$

Alla  $n$ -esima generazione con  $n = -\log(\delta)/\log(2)$  ed utilizzando la (5.30) abbiamo che:

$$\tau(q) = \frac{\log[p^q + (1-p)^q]}{\log(2)} \quad (5.33)$$

La sequenza degli esponenti di massa risultante è mostrata in fig. 5.6. Per  $q = 0$  si ha che  $\tau(0) = 1$ , che è la dimensione del supporto, cioè, l'intervallo unitario.

## 5.7 La relazione tra $\tau(q)$ e $f(\alpha)$

La sequenza degli esponenti di massa è legata alla curva  $f(\alpha)$  in un modo generale il che è molto utile in numerose applicazioni. Una misura multifrattale è supportata da un insieme  $S$ , che è l'unione di sottoinsiemi frattali  $S_\alpha$  scelti nel *continuum* dei valori permessi:

$$S = \bigcup_{\alpha} S_{\alpha}$$

Dal momento in cui l'insieme globale  $S$  è frattale con una dimensione frattale  $D$ , i sottoinsiemi frattali hanno dimensione frattale  $f(\alpha) \leq D$ . Per sottoinsiemi frattali, con dimensione frattale  $f(\alpha)$ , il numero  $dN(q, \delta)$  di segmenti di lunghezza  $\delta$  necessari a coprire l'insieme  $S_\alpha$  con  $\alpha$  nell'intervallo  $[\alpha ; \alpha + d\alpha]$  è:

$$dN(\alpha, \delta) = \rho(\alpha) d\alpha \delta^{-f(\alpha)}$$

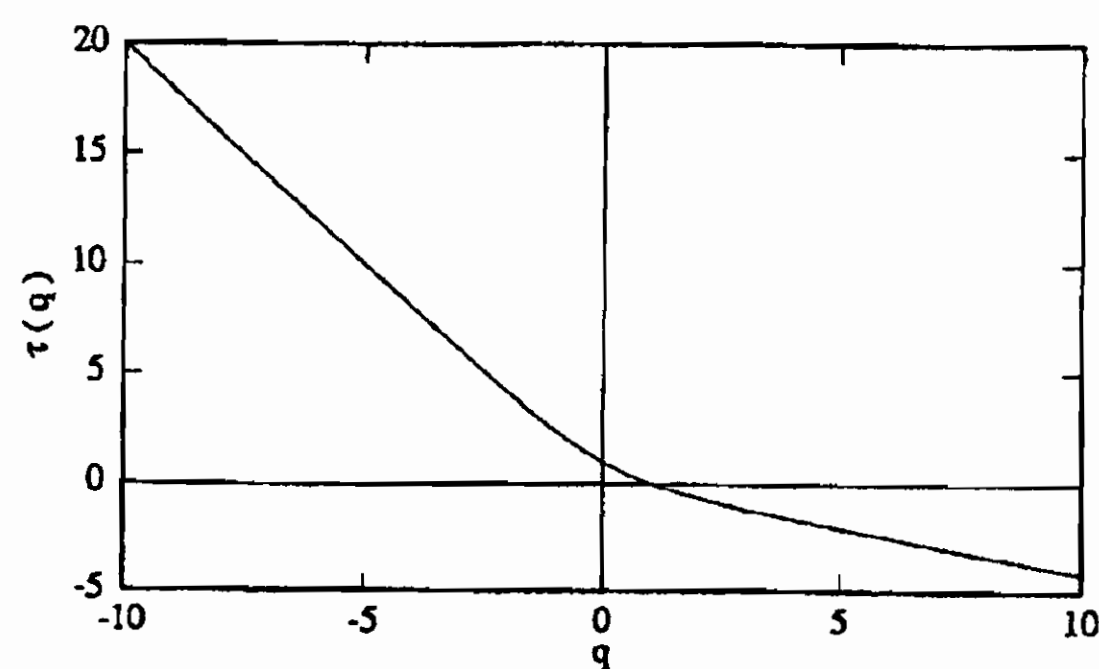


Figura 5.6: La sequenza degli esponenti di massa in funzione di  $q$  per un processo moltiplicativo binomiale

Qui  $\rho(\alpha)d\alpha$  è il numero di insiemi tra  $S_\alpha$  e  $S_{\alpha+d\alpha}$ . Per questi insiemi la misura  $\mu_\alpha$  in un cubo qualsiasi di dimensione  $\delta$  segue la legge di potenza dipendente da  $\delta$  esprimibile nella forma  $\mu_\alpha = \delta^\alpha$ . Di conseguenza la misura  $M$  per l'insieme  $S$ , data dall'equazione (5.28), può essere riscritta nel seguente modo:

$$M_d(q, \delta) = \int \rho(\alpha)d\alpha \delta^{-f(\alpha)} \delta^{q\alpha(q)} \delta^d = \int \rho(\alpha)d\alpha \delta^{q\alpha(q)-f(\alpha)+d} \quad (5.34)$$

L'integrale della (5.34) è dominato dai termini dove l'integrando ha il suo massimo valore; in altre parole per:

$$\frac{d}{d\alpha}[q\alpha - f(\alpha)]|_{\alpha=\alpha(q)} = 0 \quad (5.35)$$

L'integrale della (5.34) è quindi asintoticamente dato da:

$$M_d(q, \delta) \sim \delta^{q\alpha(q)-f(\alpha(q))+d}$$

Avremo allora che  $M_d$  rimane finita nel limite di  $\delta \rightarrow 0$  se  $d$  è uguale all'esponente di massa  $\tau(q)$  dato da:

$$\tau(q) = f[\alpha(q)] - q\alpha(q) \quad (5.36)$$

dove  $\alpha(q)$  è la soluzione dell'equazione (5.35). Così l'esponente di massa è dato in termini dell'esponente di Lipschitz-Hölder  $\alpha(q)$  e della dimensione frattale  $f(\alpha(q))$  dell'insieme che supporta questo esponente.

Possiamo d'altra parte, una volta conosciuti gli esponenti di massa  $\tau(q)$ , risalire all'esponente di Lipschitz-Hölder e a  $f(\alpha)$  usando le equazioni (5.35) e (5.36):

$$\begin{aligned} \alpha(q) &= -\frac{d}{dq}\tau(q) \\ f[\alpha(q)] &= q\alpha(q) + \tau(q) \end{aligned} \quad (5.37)$$

La (5.37) dà una rappresentazione parametrica della curva  $f(\alpha)$ , cioè della dimensione frattale del supporto delle *singularità* nella misura con l'esponente  $\alpha$  di Lipschitz-Hölder. La curva  $f(\alpha)$  caratterizza la misura ed è equivalente alla sequenza degli esponenti di massa. La (5.37), così come la (5.36), in effetti non è altro che una trasformazione di Legendre[36] della coppia di variabili indipendenti  $\tau$  e  $q$  a quella delle

$q$	$\tau(q)$	$\alpha = -d\tau(q)/dq$	$f = q\alpha + \tau(q)$
$q \rightarrow -\infty$	$\sim -q\alpha_{max}$	$\rightarrow \alpha_{max} = \log(\mu_-)/\log(\delta)$	$\rightarrow 0$
$q = 0$	$D$	$\alpha_o$	$f_{max} = 0$
$q = 1$	$0$	$\alpha_1 = -S(\delta)/\log(\delta)$	$f_S = \alpha_1 = S$
$q \rightarrow +\infty$	$\sim -q\alpha_{min}$	$\rightarrow \alpha_{min} = \log(\mu_+)/\log(\delta)$	$\rightarrow 0$

Table 5.1: Schema generale per le relazioni tra la curva  $f(\alpha)$  e la sequenza degli esponenti di massa  $\tau(q)$

variabili indipendenti  $f$  e  $\alpha$ . Usando la (5.37) nel caso semplice del processo moltiplicativo binomiale con  $\tau(q)$  dato dalla (5.33) e riprodotta nella fig. 5.6, si ricava la curva  $f(\alpha)$  di fig. 5.4b.

Il massimo della curva viene ottenuto quando  $df(\alpha)/d\alpha = 0$ . Dalla (5.35) si ottiene che  $q = 0$  e, utilizzando la (5.37), possiamo concludere che  $f_{max} = D$  dal momento che abbiamo già visto che  $\tau(0) = D$ , dove  $D$  è la dimensione frattale del supporto della misura. Uno schema delle relazioni tra la curva  $f(\alpha)$  e la sequenza degli esponenti di massa è mostrato in Tab. 5.1.



# Capitolo 6

## Frattali stocastici semplici

### 6.1 Introduzione

Abbiamo già commentato in apertura del capitolo 4 come gli aspetti aleatori giochino un ruolo importante in molti fenomeni naturali.

In questo capitolo affrontiamo il problema di “quanto” aleatori possano essere certi comportamenti e quale possa essere il ruolo di comportamenti “molto aleatori”. In particolare analizzeremo il fenomeno della pioggia.

Nel linguaggio comune, come sostiene il dizionario Pedrocchi (1897), si usa l’aggettivo “erratico” per indicare un comportamento fortemente irregolare nello spazio o nel tempo. Erratico è indubbiamente il moto browniano.

Un altro tipico esempio è costituito dalla caduta della pioggia che, nei suoi modi, può passare dalla pioggerellina di marzo, ai temporali ed acquazzoni estivi, infine alle piogge monsoniche tipiche dei tropici.

In fluidodinamica, l’analogo fenomeno di repentine transizioni da un regime ad un altro viene indicato con il nome di *intermittenza*.

Mandelbrot ha studiato sistematicamente il fenomeno della intermittenza in fluidodinamica, ha mostrato come il fenomeno sia strettamente legato

al fenomeno dello scaling ed alle distribuzioni di probabilità iperboliche. Nel 1986 Mandelbrot e Van Ness[37] hanno definito che una funzione casuale  $X(t)$  possiede proprietà di scaling *all'origine* se:

$$X(0) = 0, \quad X(\lambda t) = \lambda^H X(t) \quad (6.1)$$

per qualsiasi valore di  $\lambda$ ,  $H$  è un esponente di scala, per esempio il parametro di Hurst del Cap.3. Più generalmente, la funzione  $X(t)$  possiede proprietà di scaling per ogni  $t$  (non necessariamente *all'origine*) se, per ogni coppia di valori  $t_1$  e  $t_0$ :

$$\Delta t = t_1 - t_0; \quad \Delta X = X(t_1) - X(t_0); \quad t_2 = t_0 + \lambda(t_1 - t_0)$$

e definite le quantità :

$$\Delta X(\lambda \Delta t) = X(t_1) - X(t_0)$$

vale la relazione:

$$\Delta X(\lambda \Delta t) = \lambda^H \Delta X(\Delta t) \quad (6.2)$$

Quando  $\lambda$  è grande la (9.77) collega una variazione  $\Delta X(\lambda \Delta t)$  “a grande scala” su un lungo incremento temporale  $\lambda \Delta t$ , con una variazione “a piccola scala”  $\Delta X(\Delta t)$  su un breve incremento temporale  $\Delta t$ .

L' avere adottato i simboli degli incrementi finiti ,  $\Delta t$  e  $\Delta X$  indica con chiarezza - e sottolinea il fatto - che il fenomeno dello scaling si riferisce alle “differenze” dei valori della funzione in due punti ed alla sua “variazione” al variare dell' intervallo da  $\Delta t$  a  $\lambda \Delta t$ .

Le curve rappresentative delle funzioni casuali  $X(t)$  che godono delle proprietà di scaling sono insiemi frattali caratterizzati da una dimensione frattale legata all' esponente di scala  $H$ .

Mandelbrot ha anche puntualmente definito che una *variabile casuale*  $U$ , che può assumere valori  $u$ , si dice iperbolica se la “coda” della probabilità  $P_r(U > u)$  assume la forma :

$$P_r(U > u) \div u^{-\alpha} \quad (6.3)$$



con  $\alpha$  numero reale positivo. Si noti che la distribuzione (6.3) è ben lungi dall'essere, per esempio, gaussiana o poissoniana.

Più piccolo è il valore di  $\alpha$  e più grandi sono i possibili valori *estremi* di  $u$  ( maggiore è la probabilità di trovare grandi valori di  $U$  ).

Ci si può rendere conto facilmente di questo fatto calcolando il momento statistico

$$U^q = \langle U^q \rangle = \frac{1}{N} \int (u^{-\alpha})^q du \quad (6.4)$$

il momento  $U^q$  è finito se  $q < \alpha$  ma diverge se  $q \geq \alpha$ .

Storicamente, questa semplice osservazione aveva emarginato le distribuzioni di probabilità iperboliche considerate strane ed anomale.

Poichè i momenti di un campione limitato ( che chiameremo più semplicemente momenti campione ) sono sempre finiti, era considerato inopportuno usare distribuzioni rappresentative teoriche con momenti statistici che potessero divergere per “modellare” un fenomeno del campione limitato in questione.

Infatti, la divergenza di un momento statistico (teorico) di ordine  $|q|$  esprime semplicemente il fatto che il momento campione “non converge ad alcun limite” e può diventare grande a piacere. (Si veda il T. del limite centrale della Statistica nel Cap.A).

Mandelbrot, per primo, ha invece mostrato che questo avviene in molte importanti fluttuazioni di fenomeni naturali. Non soltanto, quindi, variabili casuali iperboliche riproducono una grande varietà di dati sperimentali attinenti i fenomeni naturali più disparati, bensì campioni costruiti con variabili casuali iperboliche contengono una grande varietà di configurazioni veramente “ esotiche ” ed estreme, tali che sembra difficile - erroneamente - credere che possano essere il frutto del “ puro caso ”. Soltanto se il “ puro caso ” è costruito con variabili casuali poissoniane o binomiali o gaussiane non è permesso generare configurazioni estreme assolutamente diverse dalla configurazione media. Il “ puro caso ” costruito con variabili casuali iperboliche generato da un “ meccanismo frattale ” molto semplice invece, riesce facilmente a creare configurazioni lontanissime dalla configurazione media o, se si

vuole, riesce a creare campioni molto complessi grazie alla possibilità di sfruttare le proprietà di scaling.

## 6.2 Evidenza empirica dello scaling

Tutte le stazioni turistiche più alla moda tengono sotto osservazione le fluttuazioni nel flusso della pioggia, durante i diversi periodi dell'anno, per poter decantare le meraviglie di un soggiorno di vacanza.

Tutte le stazioni sciistiche tengono sotto osservazione le fluttuazioni nel flusso della neve durante il periodo invernale, per poter decantare le meraviglie di una vacanza sciistica, anzi, sulla base di queste continue osservazioni, vengono organizzati avvenimenti sportivi di rilievo, come le olimpiadi invernali di Sierra Nevada in Spagna nel marzo 1995, che dovettero essere sospese e rimandate all'anno successivo perché i prati vennero trovati pieni di fiori.

Non avevano tenuto conto (e come mai si potrebbe? C'è pur sempre la legge di Murphy in agguato!) delle configurazioni lontane dalla configurazione media, possibili in fenomeni naturali generati da variabili casuali iperboliche.

Nella fig. 6.1 sono raccolti i dati di pioggia caduti nella città francese di Nimes in un periodo di circa 11 anni, dal 1978 al 1988, per un totale di 4096 giorni. Le ampie fluttuazioni che si osservano nelle rilevazioni giornaliere si stemperano quando le rivelazioni sono fatte mediando l'ammontare della pioggia caduta durante periodi aumentati ogni volta di un fattore 4. Il valore medio è ovviamente rappresentato nel grafico più basso nella figura mediato su ben 4096 giorni. Si vede bene che aumentando la risoluzione nelle osservazioni le fluttuazioni diventano man mano più evidenti. Il loro studio porta a mettere in evidenza le proprietà di scaling del fenomeno in quanto le fluttuazioni seguono un'alegge di probabilità di tipo iperbolico. Le osservazioni sperimentali vanno però analizzate con cura al fine di scoprire quali sono le "proprietà" e le caratteristiche statistiche del fenomeno in studio: la caduta della

pioggia.

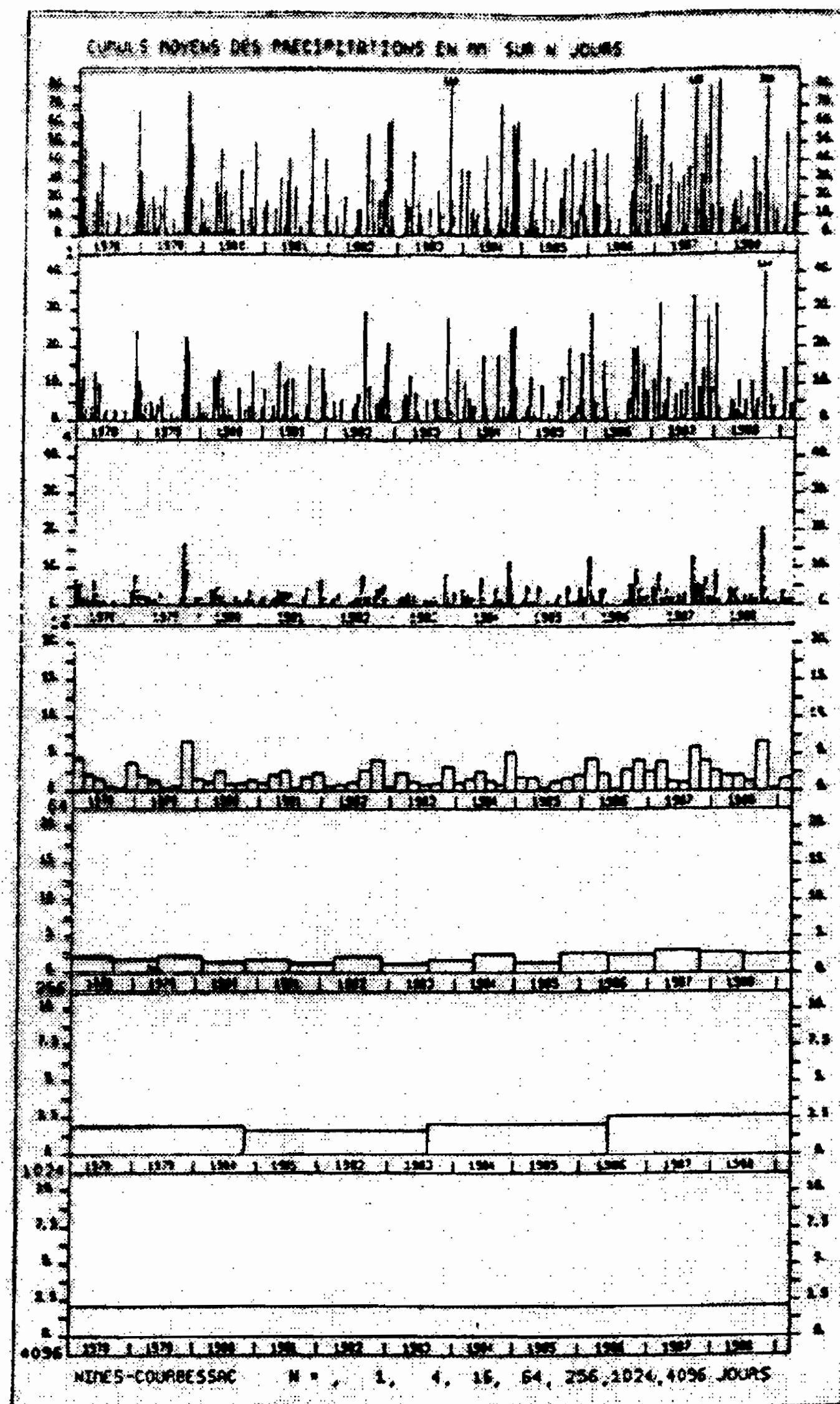


Figura 6.1: serie temporale di caduta della pioggia nella città francese di Nimes dal 1978 al 1988. Dall'alto verso il basso i valori sono stati mediati su: 1, 16, 64, 256, 1024 e 4096 giorni

S. Lovejoy[38] ha analizzato sistematicamente tali fluttuazioni a Montreal (città nella quale insegna alla Mc.Gill University) in Spagna e nell'Atlantico tropicale dalla nave Quadra, usando dati radar con una "segmentazione geometrica" di 4km x 4km e con una risoluzione "temporale" di 5 minuti primi, per verificare se, come e quando, questi

campioni di dati possedessero delle proprietà di scaling ed avessero distribuzioni iperboliche.

Per loro natura, le aree di pioggia frequentemente si separano (*la nuvoletta di Fantozzi*) o si uniscono in un'unica area che cambia bruscamente ed improvvisamente di dimensione (intermittenza, erraticità, frattalità).

E' inoltre necessario stabilire dei criteri di selezione ed enunciare delle definizioni precise la cui discussione dettagliata ci porterebbe troppo lontano dai nostri obiettivi. Rimandiamo agli articoli originali della referenza [38]. Le fig.s 6.2 a,b,c, mostrano, in scala bilogarithmica: sulle

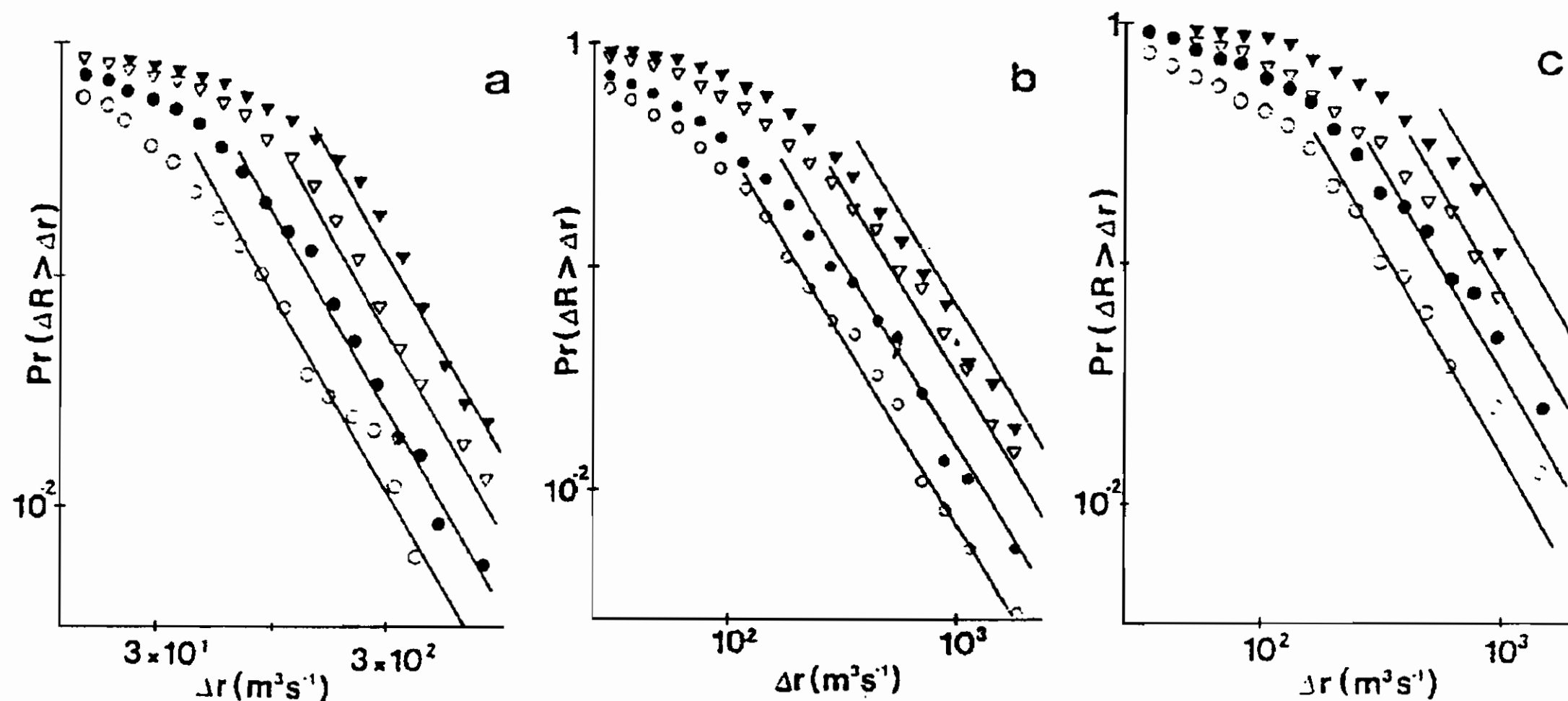


Figura 6.2: Caduta della pioggia: a- Spagna; b- Atlantico; c- Montreal.

ascisse il modulo  $\Delta r$  della fluttuazione (positiva o negativa) del flusso di pioggia <sup>1</sup> in un intervallo di tempo  $\Delta t$  ( $\Delta t = 5$  min, cerchietti vuoti;  $\Delta t = 10$  min, cerchietti pieni;  $\Delta t = 20$  min, triangoli vuoti;  $\Delta t = 40$  min, triangoli pieni). In ordinata invece vengono riportate le probabilità  $P_r(\Delta R > \Delta r)$  che il valore assoluto di una variazione (negativa per definizione in questo caso specifico) nel flusso di pioggia superi il valore  $\Delta r$ . La fig. 6.2a mostra i dati relativi a due giornate di misure in Spagna in 21 diverse località (aree di pioggia) osservate per 2 giorni. La fig. 6.2b

<sup>1</sup>In linguaggio colloquiale diremmo variazione di intensità della pioggia ma la quantità fisica misurata è indubbiamente un "flusso di acqua" attraverso la superficie del recipiente di raccolta

mostra i dati relativi a 29 tempeste nell' Atlantico tropicale raccolti nell' esperimento GATE durante 4 differenti giornate. La fig. 6.2c mostra i dati di 7 temporali nella città di Montreal in un solo pomeriggio.

Le tre figure sono decisamente simili. Asintoticamente (eliminando le variazioni irrilevanti delle pioggerelline uniformi o degli acquazzoni costanti) i dati mostrano un comportamento iperbolico abbastanza netto indipendentemente dal fatto di osservare le variazioni in intervalli  $\Delta t$  diversi di un fattore 8 ( $5 \times 8 = 40$ ) ed in località geografiche e climatiche diversissime: dalle 21 località spagnole osservate per 2 giorni; ai 29 temporali tropicali osservati per 4 giorni diversi; a 7 temporali in un pomeriggio a Montreal (estremamente poco probabile avere 7 temporali in un pomeriggio, ma non in una " primavera " canadese).

Si può empiricamente osservare che la relazione:

$$P_r(\Delta R > \Delta r) \approx \Delta r^{-\alpha} \quad (6.5)$$

è ben verificata per le *code* delle distribuzioni. Il valore di  $\alpha$  è sperimentalmente  $\alpha = 1.66 \pm 0.05$ , ovvero approssimativamente  $\alpha \approx \frac{5}{3}$ . Le rette sono esplicitamente disegnate nelle figure 6.2a,b,c. Il comportamento iperbolico non può dipendere dai criteri di selezione. La relazione (6.5), applicata alla parte asintotica delle figure precedenti permette di parametrizzare i dati mediante la relazione di scala:

$$P_r(\Delta R > \Delta r) \approx \left(\frac{\Delta r}{\Delta^* r}\right)^{-\alpha} \quad (6.6)$$

La quantità  $\Delta^* r$  costituisce una "normalizzazione di scala" e misura la larghezza della distribuzione (di fatto ci si potrebbe rifare ad una "larghezza a metà altezza" ma non è il caso di fare una digressione non essenziale).

Ora, poichè  $\Delta^* r$  è, per definizione, una normalizzazione delle fluttuazioni, in modulo, del flusso di pioggia, se le fluttuazioni posseggono proprietà di scala "temporale" deve valere la relazione:

$$\Delta^* r = -k(\Delta t)^{-\alpha} \quad (6.7)$$

Nella (6.7) compare a moltiplicare il coefficiente di proporzionalità  $k$  che dipende dalle unità di misura assunte per  $r$  (millimetri a superficie fissa,  $cm^3$ , litri ecc.) e per  $t$  (minuti, ore, giorni, ecc.)

Si vede allora che nelle figure precedenti, se si aumenta  $\Delta t$  la distribuzione di  $\Delta R$  si allarga. In scala doppio logaritmica, raddoppiando  $\Delta t$ , la "larghezza" [cfr. la (9.77)] aumenta di  $H \ln 2$ . Si può quindi stimare dai dati il valore numerico del parametro  $H$ . E lo si può fare in almeno due modi abbastanza indipendenti e diversi:

1. Valutare le distanze (orizzontali) fra le 4 distribuzioni nelle fig.s 6.2 a,b,c, per quote  $P_r(\Delta R)$  costante. Per esempio, per due diversi valori di  $P_r(\Delta R)$  della coda della distribuzione nell'intervallo  $10^{-2} \leq P_r < 10^{-1}$ , si trova  $H = 0.69 \pm 0.06$
2. Interpolare delle rette mediante un fit di minimi quadrati - o di  $\chi^2$  in presenza di errori - nella regione asintotica, come del resto indicato nelle figure precedenti, assumendo un determinato valore di  $\alpha$  ( $\frac{5}{3}$  o  $1.66 \pm 0.05$ ).

Si ottiene :

$$\frac{1}{\alpha} \log P_r(\Delta R) = \log\left(\frac{\Delta r}{\Delta^* r}\right) \quad (6.8)$$

e si può ricavare  $\Delta^* r(\Delta t)$  per quattro valori di  $\Delta t$ . Si può quindi verificare se:

$$\Delta^* r \approx (\Delta t)^H$$

graficando  $\log \Delta^* r$  vs  $\Delta t$ .

Questo metodo porta al valore  $H=0.59$ .

Mandelbrot e Van Ness concludono semplicemente che:

$$H = 0.64 \pm 0.05$$

e che il fenomeno gode di proprietà di scaling sia stocastiche che temporali.

## 6.3 Il rapporto area perimetro

Una ulteriore evidenza delle proprietà di scaling proviene indirettamente dallo studio del rapporto tra area e perimetro delle nubi e delle aree di pioggia che descrivono il fenomeno limitatamente al suo comportamento esclusivamente geometrico.

Il fatto che le aree di pioggia e gli ammassi di nubi abbiano carattere frattale così come le coste di un'isola, viene posto in evidenza anche studiando la relazione che esiste tra la area  $A$  di una figura frammentata ed il suo perimetro  $P$ . Il rapporto:

$$r = \frac{P}{\sqrt{A}} \quad (6.9)$$

per delle figure geometriche euclidee regolari è un numero puro indipendente dalla estensione della figura; essa rimane invariante per tutte le curve chiuse che abbiano la stessa forma. Per un cerchio il rapporto  $r$  vale  $2\sqrt{\pi}$ .

Per un poligono regolare iscritto in un cerchio di raggio  $R$ , il cui lato  $l$  è sotteso da un angolo  $\frac{2\pi}{n}$ , detta  $h$  l'altezza del triangolo, si ricava dalla fig. 6.3.

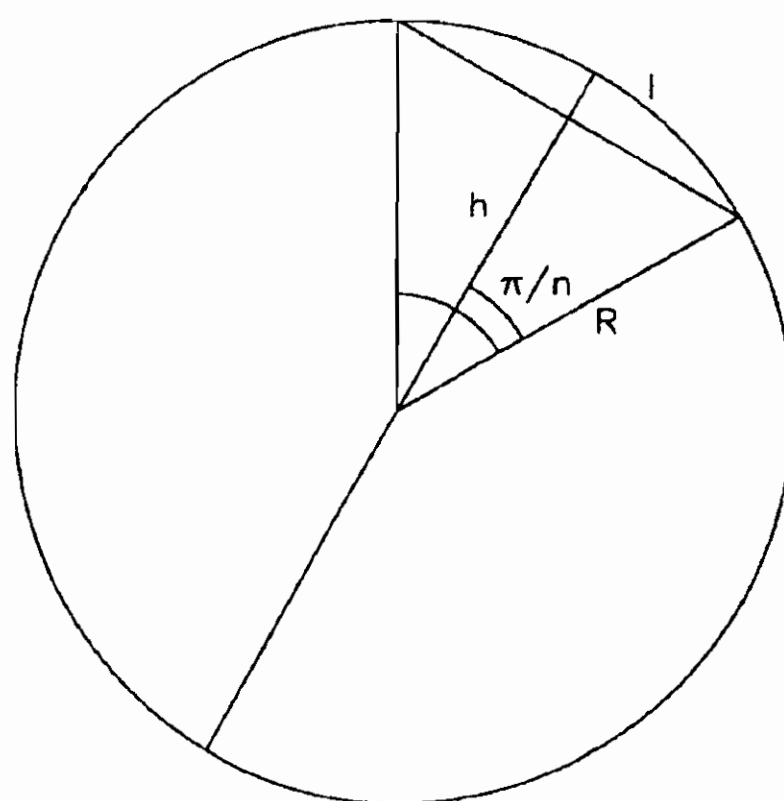


Figura 6.3: Determinazione del rapporto  $r$

figura	lunghezza Fond.	P	A	$\sqrt{A}$	$P/\sqrt{A}$
○	R	$2\pi R$	$\pi R^2$	$\sqrt{\pi} R$	$2\sqrt{\pi}$
△	1	3l	$\frac{\sqrt{3}}{2} l^2$	$\frac{(\sqrt[4]{3})}{\sqrt{2}} l$	$\frac{6\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{3})}$

$$\frac{l}{2} = R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right); h = R \cos\left(\frac{\pi}{n}\right); \frac{1}{n}A = R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) R \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

ovvero:

$$P = 2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right); A = nR^2 \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$$

Pertanto il rapporto r vale:

$$r = \frac{2nR \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\sqrt{n}R \sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}} = 2\sqrt{n} \sqrt{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{n}\right)} \quad (6.10)$$

indipendente da R. Alleghiamo una tabella con indicati alcuni valori del rapporto  $P/\sqrt{A}$ .

Per un' isola a coste frastagliate, il perimetro P dipende dalla unità  $\delta$  con cui lo si misura e di cui conosciamo il comportamento per  $\delta \rightarrow 0$ . Seguendo la procedura suggerita da Mandelbrot, pertanto è bene generalizzare la (6.9) definendo il rapporto:

$$r_D = \frac{P^{\frac{1}{D}}}{\sqrt{A}} \quad (6.11)$$

dove D è la dimensione frattale delle coste dell' isola. Il rapporto  $r_D$  è indipendente dalla estensione dell' isola ma dipende dalla risoluzione  $\lambda = \frac{1}{\delta}$  con cui P ed A vengono misurati.

La relazione (6.11) deriva direttamente dalla definizione di dimensione secondo Hausdorff e Besicovitch.

Eseguiamo infatti una misura della dimensione D mediante box counting di P ed A dell' isola disegnata in fig. 6.4, che per ragioni nazionalistiche riproduce l' isola d'Elba.

Scegliamo come lunghezza del regolo  $\delta_i^* = \lambda \sqrt{A_i(\delta)}$  dove  $\lambda$  è un numero arbitrario molto piccolo che rende conto della risoluzione con



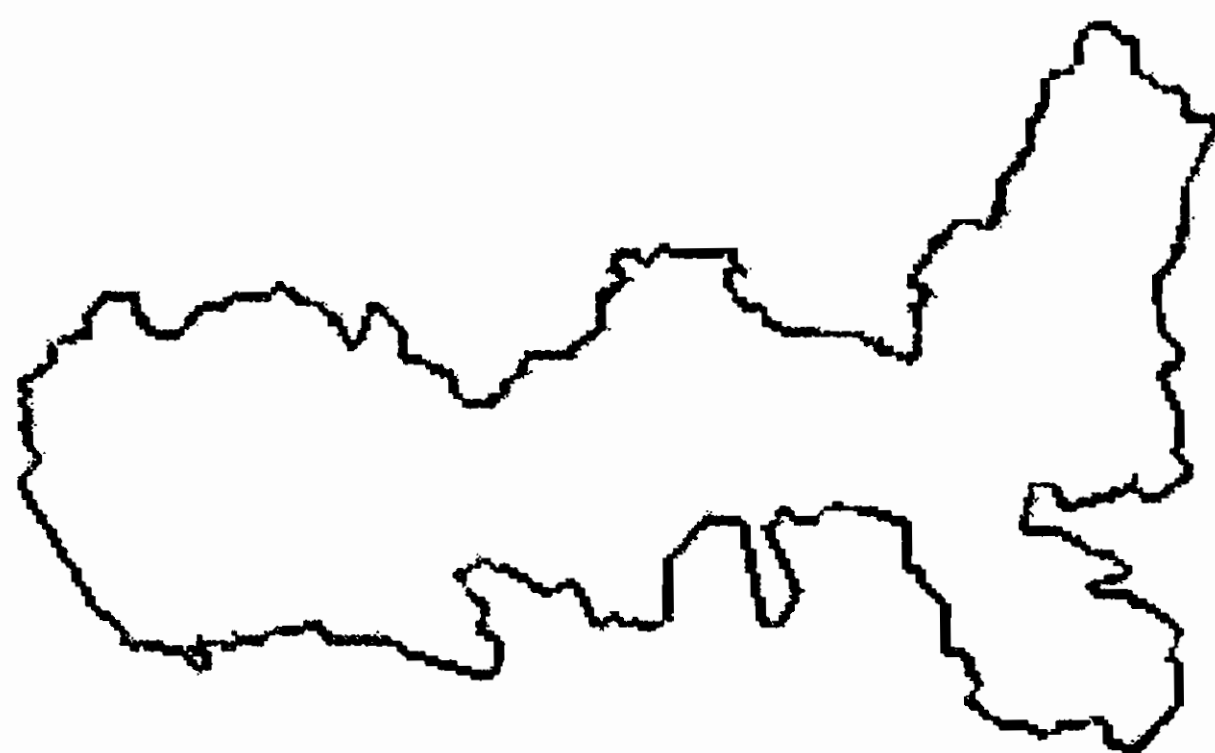


Figura 6.4: Isola d' Elba

cui si esegue il conteggio  $N_\lambda$  dei "boxes" e  $A_i(\delta)$  è la misura dell' area eseguita " in unita  $\delta$  ".

La lunghezza  $L(\delta)$  della costa è, per definizione:

$$L(\delta^*) = N_\lambda \delta^* \quad (6.12)$$

Dal Capitolo 2 la lunghezza  $L(\delta)$  risulta (ponendo  $a = L_i^0$ )

$$L(\delta) \approx L_i^0 \delta^{1-D}$$

Cambiando la scala da  $\delta$  a  $\delta^*$  si può scrivere:

$$L(\delta) = L(\delta^*) \left( \frac{\delta}{\delta^*} \right)^{1-D} \quad (6.13)$$

Sostituendo la (6.12) nella (6.13) si ottiene:

$$L(\delta) = N_\lambda \delta^* \frac{\delta^{(1-D)}}{\delta^{*(1-D)}} = N_\lambda \delta^{1-D} \delta^{*D} \quad (6.14)$$

Ricordando che abbiamo scelto:

$$\delta_i^* = \lambda \sqrt{A_i(\delta)}$$

possiamo scrivere

$$L_i(\delta) = N_\lambda \lambda^D \delta^{(1-D)} \sqrt{A_i(\delta)}^D$$

Ponendo

$$r_D(\delta) = N_\lambda \lambda^D \delta^{(1-D)} \quad (6.15)$$

si ottiene immediatamente la (6.11) che riscriviamo:

$$r_D(\delta) = \frac{[L_i(\delta)]^{1/D}}{[A_i(\delta)]^{D/2}} \quad (6.16)$$

per ricordare che il perimetro  $P$  e l' area  $A$  e pertanto  $r_D(\delta)$  dipendono dalla "unità  $\delta$ " con cui sono misurati.

La (6.15) mostra inoltre che tale rapporto dipende dal fattore arbitrario  $\lambda$  usato per "stabilire la scala" e scegliere la unità  $\delta^*$ .

La relazione perimetro-area si può allora scrivere, in definitiva, nella forma proposta da Mandelbrot:

$$P(\delta) = k \delta^{(1-D)} \sqrt{A(\delta)}^D \quad (6.17)$$

dove  $k = N_\lambda \lambda^D$  dipende dal parametro arbitrario  $\lambda$ .

La (6.17) è molto usata per determinare in pratica  $D$  in molti casi.

S. Lovejoy ha analizzato la relazione perimetro-area in fig. 6.5 è riportato il valore delle aree di pioggia  $A$  misurate sulle mappe radar in funzione del loro perimetro  $P$  misurato sulle stesse mappe (cerchietti pieni) per le aree tropicali dell' oceano Atlantico e dell' Oceano Indiano. Nella stessa figura sono riportati anche i valori delle aree  $A$  degli ammassi nuvolosi (cerchietti vuoti) misurati sulle immagini dei satelliti meteorologici in funzione del loro perimetro  $P$  misurato sulle stesse immagini.

La retta disegnata in fig. 6.5, ottenuta con una ottimizzazione dei minimi quadrati, ha una pendenza  $D = 1.35 \pm 0.05$ .

E' importante sottolineare che la linearità, in scala bilogaritmica, si estende per circa quattro ordini di grandezza sulla scala dei perimetri (da qualche chilometro, a qualche centinaia di migliaia di chilometri) e per

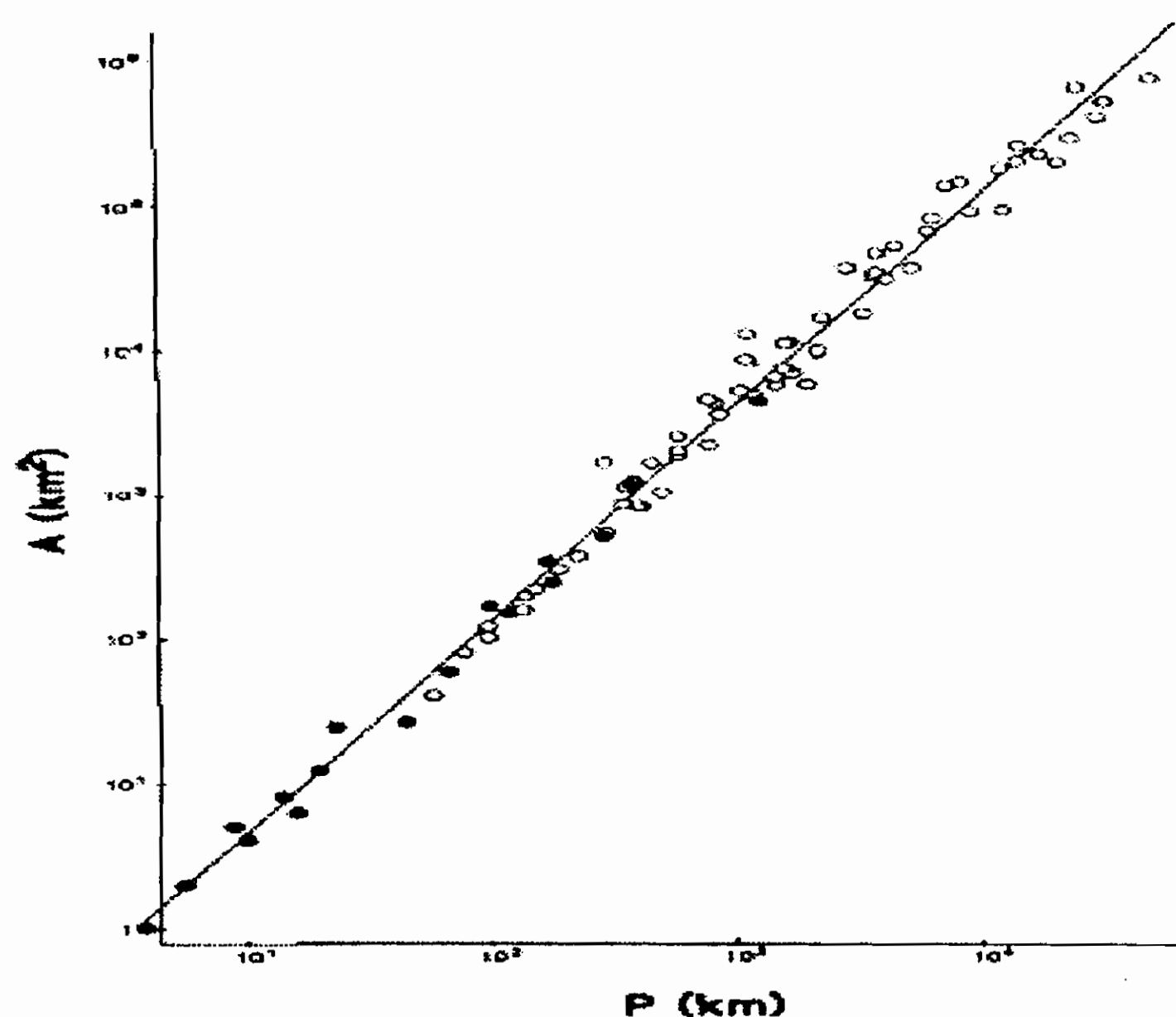


Figura 6.5: Relazione perimetro-area

circa sei ordini di grandezza sulla scala delle aree (da qualche chilometro quadrato, a qualche milione di chilometri quadrati).

Il valore di  $D$  è abbastanza ben rappresentato dal valore  $4/3$  di una curva frattale del tipo di quelle costruite nel Capitolo 2.

Le osservazioni che derivano dalla fig. 6.5 permettono di affermare che, nella formazione geometrica delle aree di pioggia e degli ammassi nuvolosi, non sono affatto privilegiate le fluttuazioni benigne di tipo gaussiano, bensì avvengono fluttuazioni erratiche e non benigne. Non sono pertanto rare fluttuazioni estreme fuori dalla norma o serie di deviazioni persistenti dalla norma.

Hentschel e Procaccia[27] hanno sviluppato nel 1986 una opportuna teoria della diffusione turbolenta per spiegare che, nonostante le nubi cambiano di forma al passare del tempo, esse esibiscono una struttura frattale che non dipende dalle condizioni iniziali per la loro formazione.

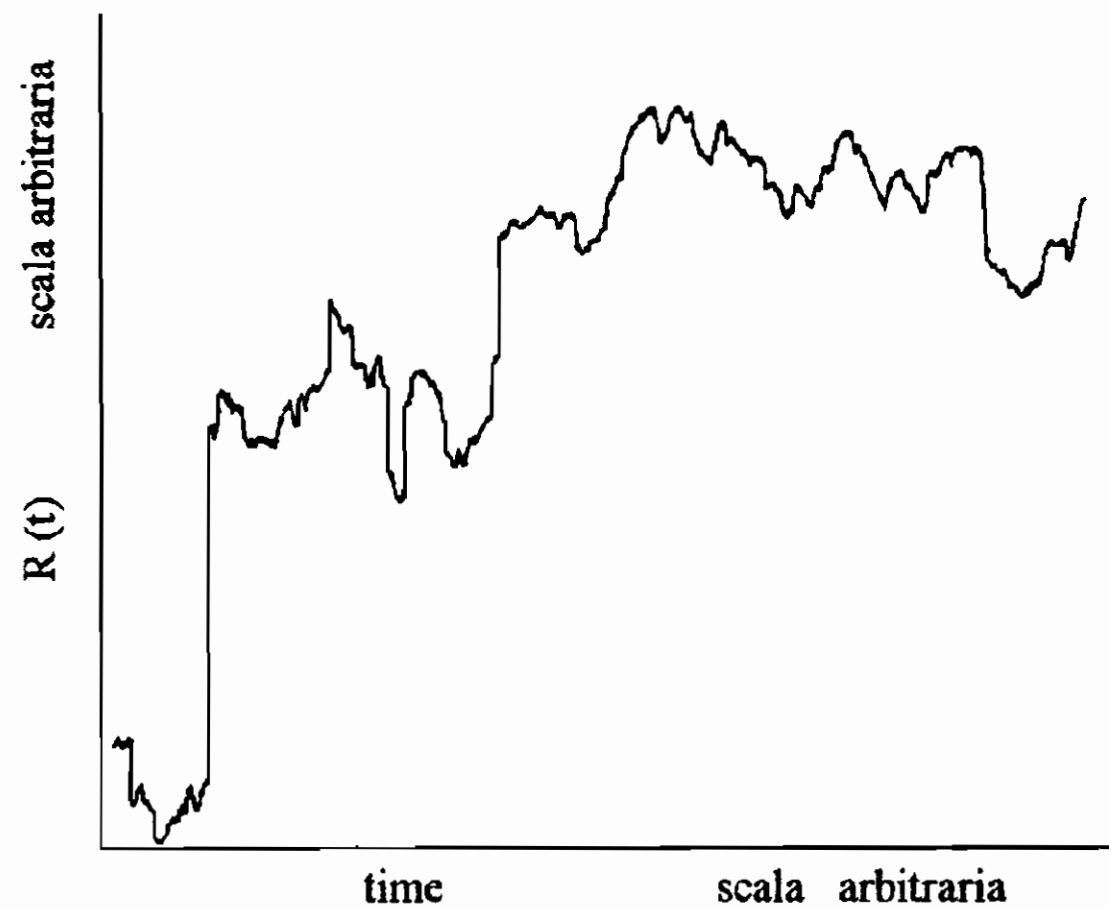


Figura 6.6: Simulazione Montecarlo di una serie temporale di caduta di pioggia sommando 1300 variabili casuali dalla distribuzione ( 6.5 ) con  $\alpha = \frac{5}{3}$ .

## 6.4 Le serie temporali di pioggia

L' idea di simulare situazioni “fortemente non gaussiane” è di Mandelbrot.

Prima di discutere i modelli bidimensionali e tridimensionali delle somme frattali di impulsi - detto in inglese *Fractal Sum of Pulses*, (*F.S.P.*) - è molto istruttivo descrivere un modellino propedeutico monodimensionale (peraltro usato con successo nelle scienze economiche), applicato alle serie temporali dei dati di pioggia, con una facile simulazione di eventi “straordinari” di improvvisi nubifragi o di lunghi periodi di siccità.

Il modello è in grado di rivelare le caratteristiche basilari del fenomeno dell' intermittenza che si ritrovano anche nelle versioni più sofisticate.

La fig. 6.6 mostra una simulazione Montecarlo di una serie temporale di pioggia  $R(t)$  costruite “ sommando ” 1300 variabili casuali  $\Delta r$  consecutive estratte dalla distribuzione iperbolica (6.5) con  $\alpha = \frac{5}{3}$ . Cioè :

$$P(|\Delta R| > \Delta r) \div (\Delta r)^{-\frac{5}{3}} \quad (6.18)$$

scegliendo a caso il segno positivo o negativo di  $\Delta R$  con uguale

probabilità. Arbitrariamente l'ascissa viene chiamata "tempo" e va da 1 a 1300 e

$$R(t) = \sum_{i=0}^t \Delta r_i \quad (6.19)$$

( $t = 1, 2, \dots, 1300$ ).

Si nota come occasionalmente l'aumento di pioggia è dovuta ad un singolo salto, il che giustifica l'aggettivo erratico attribuito a questi fenomeni[39]<sup>2</sup>. Poiché le fluttuazioni che si succedono in fig. 6.6 sono indipendenti per costruzione, la miglior previsione per  $t \rightarrow k$  grande è che non vi è persistenza (vedi Cap.4) ovvero sia variazione statistica del valor medio. Il modellino semplicissimo qui illustrato ed i dati di fig. 6.6 mostrano molto bene una proprietà fondamentale delle funzioni stocastiche i cui incrementi sono distribuiti iperbolicamente con  $\alpha < 2$ . E' facile osservare che, *a priori*, gli incrementi sono identicamente distribuiti; *a posteriori* nonostante il massimo incremento sia il più improbabile, essendo dello stesso ordine di grandezza della somma di tutti gli altri, domina la somma stessa.

Basta osservare qualsiasi intervallo di fig. 6.6; una larga frazione della "variazione totale" di  $R(t)$  proviene da un singolo incremento anomalo. Questo effetto fu battezzato *effetto Noè* da Mandelbrot e Wallis[40] proprio per ricordare la fluttuazione di 40 giorni e 40 notti di pioggia del diluvio biblico così come i tratti con piccole variazioni  $r(t)$  furono battezzati da Mandelbrot e Wallis "effetto Giuseppe" per ricordare la grande siccità dei 7 anni di vacche grasse e dei 7 anni di vacche magre.

Va sottolineato il fatto che la situazione per cui una grossa fluttuazione singola può dominare tutte le altre è drasticamente differente dalle familiari circostanze previste dalle distribuzioni gaussiane o quasi

---

<sup>2</sup>Una trattazione statistico-matematica accurata cui accenneremo nel Capitolo A, dimostra che, per  $\alpha < 2$ , una generalizzazione del teorema del limite centrale implica che la somma di variabili casuali iperboliche distribuite identicamente converge ad una variabile statistica di Levy iperbolica asintoticamente. Pertanto, se la relazione  $P(\Delta R > \Delta r) \sim (\Delta r)^{-\alpha}$  è estesa a  $\Delta r > 0$  il risultato gode delle proprietà di scaling. Riprenderemo questo aspetto matematico in seguito nel Cap. A.

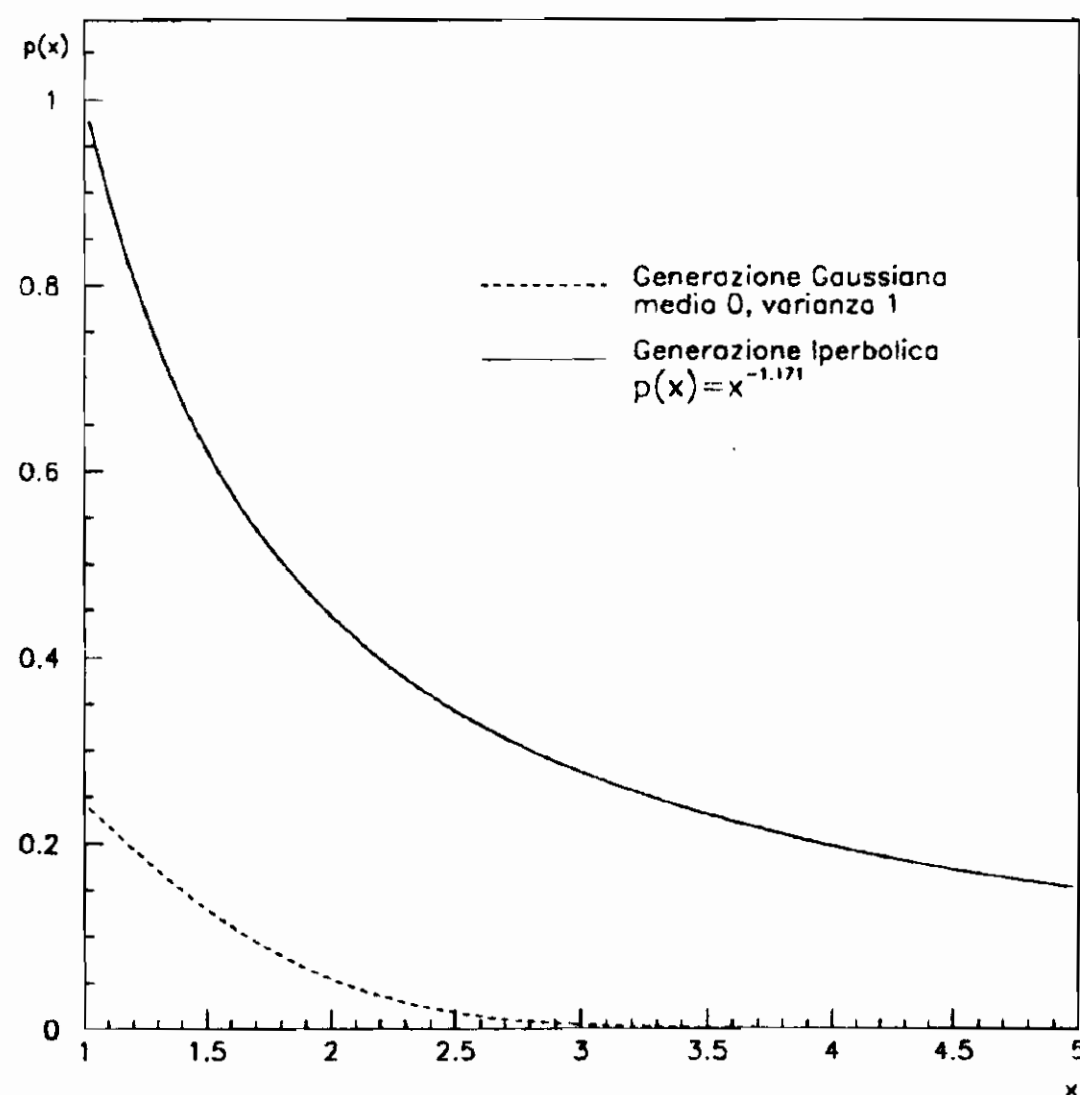


Figura 6.7: Confronto tra valori generati con distribuzione gaussiana e iperbolica.

gaussiane. In queste ultime le fluttuazioni “ individuali ” molto raramente superano qualche deviazione standard [ $P(\Delta R > \Delta r) > 3\sigma \approx 10^{-4}$ ]. Non solo, ma anche la più grossa fluttuazione è trascurabile rispetto alla somma di tutte le fluttuazioni precedenti.

In fig. 6.7 vengono confrontate le “code” di due distribuzioni di probabilità: una gaussiana di varianza unitaria con valore medio nullo :

$$P_r(\epsilon > x^*) = \int_{x^*}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\epsilon^2}{2}} d\epsilon$$

ed una iperbolica:

$$P_r(\epsilon > x^*) = \epsilon^{-1.171}$$

E' questa proprietà che fornisce il criterio per la convergenza della somma di gaussiane a una gaussiana nel teorema del limite centrale nella statistica che affronteremo nel Capitolo A.

Queste differenze tra variabili casuali iperboliche e variabili casuali gaussiane si accentuano nei modelli FSP che permettono una maggiore ricchezza di strutture (geometriche o stocastiche) ed una possibile ge-

rarchia delle proprietà di scaling dei diversi agglomerati (clusters) che si possono generare.

## 6.5 FSP monodimensionali

Ancora una volta trattiamo in dettaglio per prima cosa un caso semplice, monodimensionale, per poi estrapolarlo a più dimensioni.

Consideriamo una funzione  $R(t)$  che è la somma di impulsi rettangolari casuali, sia in altezza che in larghezza e posizione, come schematizzato in fig. 6.8. Per restare nell'ambito del caso trattato nel §6.3 pensiamo che gli impulsi rappresentino dei  $\Delta R$  - variazioni di flusso di pioggia- e che la loro larghezza rappresenti la durata  $\rho$  dell'acquazzone ( $\Delta R$  grosso) o della pioggerellina ( $\Delta R$  piccolo). Assumiamo che l'inizio o meglio il "centro" dell'intervallo  $\rho$ , sia distribuito come un processo poissoniano di frequenza  $\nu$ .

Nell'ambito di un tradizionale processo stocastico si assume implicitamente - e non lo si dichiara affatto - che il valore di aspettazione per i valori medi  $\bar{\rho}$  e  $\overline{\Delta R}$  siano entrambi *finiti* e che forniscano i relativi valori di "scala" (sono cioè i valori rappresentativi di riferimento).

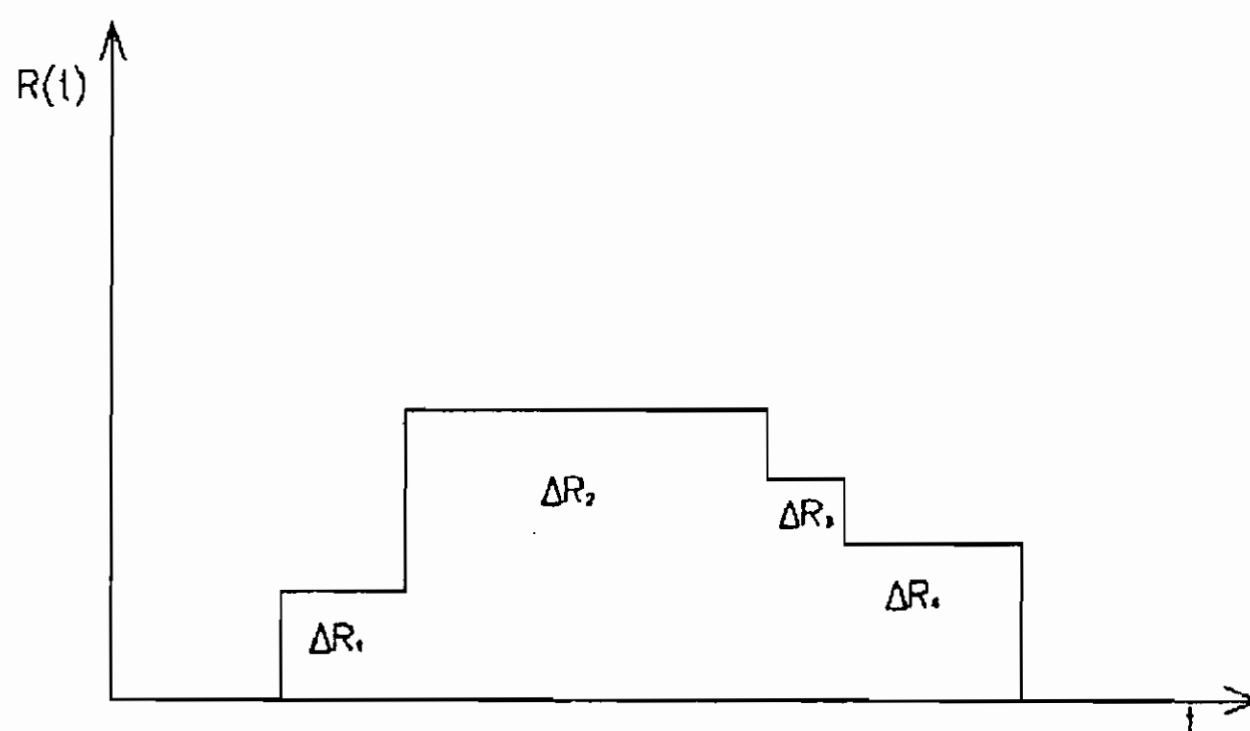


Figura 6.8: Schematizzazione di una successione di impulsi rettangolari secondo le leggi descritte nel testo

Con queste ipotesi assunte, la *somma* degli impulsi è un valore che dipende fortemente dalla scala. Le sue proprietà per  $T \gg \bar{\rho}$  sono *completamente diverse* dalle sue proprietà per  $T \ll \bar{\rho}$ .

Mandelbrot[73] propone<sup>3</sup> diversi modi di assicurarsi che la somma goda delle proprietà di scaling. La scelta più semplice è che la probabilità che una durata casuale  $\rho'$  superi il valore  $\rho$  sia:

$$P_{\tau}(\rho > \rho') \doteq \frac{1}{\rho} \quad (6.20)$$

e che l'intensità degli impulsi sia del tipo:

$$\Delta R = \pm \rho^{\frac{1}{\alpha}} \quad (6.21)$$

Mandelbrot definisce questo semplice impulso rettangolare “eco a futura cancellazione” in quanto l'impulso  $\Delta R$  iniziale viene cancellato dopo un tempo  $\rho$  da un impulso di entità esattamente opposta.

Le due relazioni (6.20) e (6.21) assicurano automaticamente le proprietà di scaling. Si noti che per una distribuzione di probabilità del tipo (6.20) il *valor medio*, diverge, ma questo fa sì che la somma  $\Delta R$  possa godere della proprietà di scaling.

Questo semplice modello scala con coefficiente  $H = 1/\alpha$  perché aumentando la scala delle lunghezze di un fattore  $\lambda$  :  $\rho^* = \lambda\rho$ , gli incrementi  $\Delta R$  variano come :

$$\Delta R = \lambda^{\frac{1}{\alpha}} \rho^{\frac{1}{\alpha}}$$

Scalano quindi di un fattore  $\lambda^{\frac{1}{\alpha}}$  .

Notiamo infatti che il numero di impulsi in un intervallo di tempo  $\tau$  la cui distanza è superiore a  $\rho'$  è :

$$\tau P_{\tau}(\rho > \rho') = \tau \rho^{-1}$$

che risulta invariante sotto le due trasformazioni di scala :

$$\tau^* \rightarrow \lambda\tau; \rho^* \rightarrow \lambda\rho \quad (6.22)$$

---

<sup>3</sup>Nel lavoro originale di Lovejoy e Mandelbrot (ref. [73]) la referenza bibliografica Mandelbrot(1984) non esiste!! Recita testualmente: B.B. Mandelbrot: *Fractal Sum of Pulses; new random variables and functions*, available from the author. Il presente autore ha richiesto per via epistolare l'informazione ma non ha ancora ricevuto risposta.



Per costruzione, gli incrementi  $\Delta R$  del processo sono iperboliche di esponente  $\alpha^4$ . Per quanto riguarda l'incremento  $\Delta R^*$  durante l'intervallo  $\tau$ , esso è sempre la somma di incrementi iperboliche e la "coda" della sua distribuzione è pure iperbolica.

La proprietà di scaling continua a sussistere anche se gli impulsi non sono semplicemente rettangolari, essi possono assumere qualsiasi forma regolare (a campana, conici, ecc). Basta che la loro estensione "scali" come  $\lambda$  e la loro intensità "scali" come  $\lambda^{1/\alpha}$ .

Una forma di impulso spesso usata è :

$$R \doteq \exp^{-\left(\frac{u}{\rho}\right)^{2s}} \quad (6.23)$$

Invece che  $R = k_i$  come nel caso di fig.6.8, nella (6.23)  $u$  è la distanza dal centro di un "eco" (o da una sorgente di potenziale o quant'altro). Con questa scelta matematica, la "forma" della (6.23) può essere aggiustata a piacere facendo variare il parametro  $s$ . Per  $s \rightarrow \infty$  la forma dello impulso diventa rettangolare.

## 6.6 Simulazione di FSP in una dimensione

La implementazione di un programma per una simulazione monodimensionale è abbastanza semplice. Proponiamoci di fare una simulazione con risoluzione  $\rho$ .

Assumiamo che :

1. la scala più piccola sia  $\rho_m = 1$  pixel (intervallo minimo=risoluzione massima )
2. la scala più grande sia  $\rho = \rho_M$ .

---

<sup>4</sup>Nel lavoro originale di Lovejoy e Mandelbrot: *Tellus*, 37A 209 (1985), il riferimento bibliografico recita testualmente: B. Mandelbrot *Fractal Sum of Pulses and new random variables and functions* available from the author. Il presente autore ha richiesto l'informazione per via epistolare ed è tuttora in attesa di riceverla.

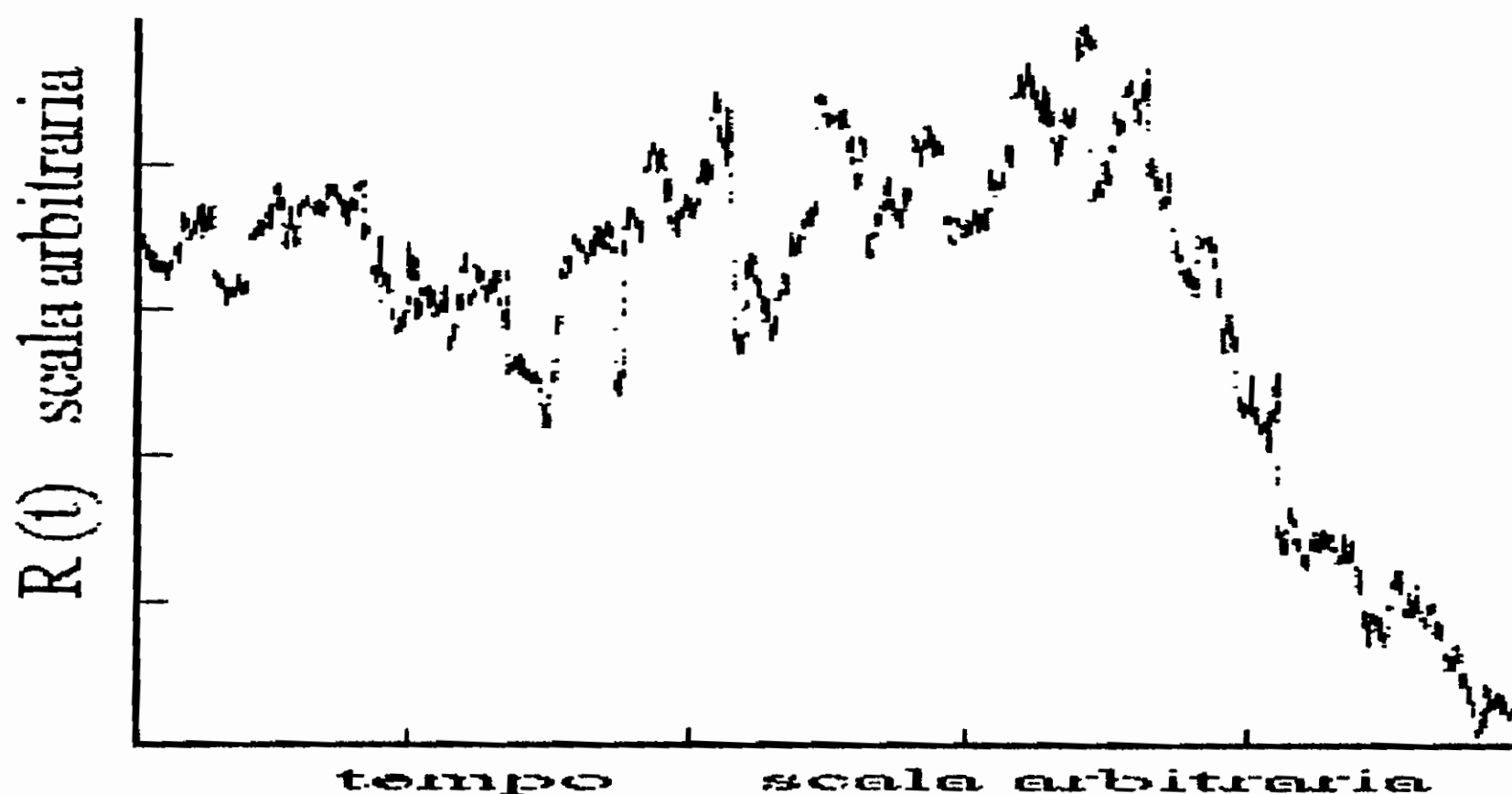


Figura 6.9: Generazione di un campione

Modelliamo il processo localizzando a caso i pixels, distribuiti uniformemente su un intervallo  $(0, T)$ , con frequenza  $\nu$  per unità di tempo, con ampiezza temporale distribuita secondo la (6.20):

$$P_r(\rho' > \rho) \doteq \frac{1}{\rho} \text{ per } \rho > 1, \quad \rho_m = 1 \text{ pixel}$$

L' intensità degli impulsi possono variare semplicemente come:

$$\Delta R = \pm \rho'^{\frac{1}{\alpha}}$$

I campioni generati in questo modo mostrano sicuramente degli "effetti di bordo" perché la probabilità di trovare un grande "salto di intensità" è minore ai confini dell' intervallo  $(0, T)$  che non al centro ( ciò è dovuto al fatto che il centro dell' eco della (6.21) per i "grossi salti" deve essere generalmente lontano dai bordi.

Tuttavia i "centri" di durata  $\tau < T$  scalano con parametro di scala  $H = 1/\alpha$  fino alla scala massima  $\rho_M = \nu T_M$ . Infatti, in media, questo è l' impulso più lungo che si può generare mediante il calcolatore con le assunzioni fatte.

Non vi sono limiti precisi da imporre a  $\tau$  e  $T$ .

In fig. 6.9  $\tau = 10000$  ;  $T = 20000$  ;  $\nu = 2.5$  ;  $\alpha = 5/3$ ; ( $H=3/5$ )  $\rho_M = 50000$  ( $\rho_M$  è preso abbastanza più grande di  $T$  per minimizzare gli effetti di bordo menzionati prima).

In sostanza si esegue la somma degli impulsi  $\Delta R$  generati e ci si ferma dopo un certo numero di generazioni.

## 6.7 La FSP in due dimensioni

Nella generazione di somma frattale di impulsi bidimensionali si può incontrare una maggiore varietà di situazioni ed una maggiore flessibilità di simulazione.

Si tratta di avere “salti” o incrementi di una funzione che dipende da due parametri  $x, y$  : cioè  $R(x, y)$ .

La forma più semplice di un impulso bidimensionale è un cilindro di area di base  $A$  ed altezza  $\Delta R$ .

In questo caso (ma anche nel caso in cui la forma non sia necessariamente cilindrica) l'area di base  $A$  dell'impulso è distribuita iperbolicamente come fatto nella eq.(6.20).

$$P_r(A > a) = a^{-1}$$

L'altezza dell'impulso viene assunta :  $\Delta R = \pm A^{1/\alpha}$ , come fatto nella eq.(6.21).

E' facile verificare che sezioni *monodimensionali* prese a caso di questi processi bidimensionali esattamente come accade per il caso trattato nel S6.5 sono processi FSP con impulsi di durata distribuita come  $\rho^{-1}$ .

I centri dei cerchi sono distribuiti uniformemente in un quadrato  $L \times L$  di cui viene usata solo la parte interna  $l \times l$  (con  $l \ll L$ ), così come prima si usava  $T \ll \rho_M$ . Il campo così ottenuto non può essere “immediatamente” interpretato come campo di pioggia perché, aumentando le dimensioni, aumenta la probabilità di trovare valori di  $R < 0$ .

Occorre introdurre una “soglia”  $R_s$  e misurare le variazioni di intensità piovosa come differenza  $R' = R - R_s$  ed occorre imporre  $\Delta R = 0$  se ( $\Delta R < 0$ ).

Per il modello quindi:  $R' = R - R_s$  se  $R > R_s$ ,  $R' = 0$  se  $R \leq R_s$ . Queste simulazioni sono ovviamente molto limitate: esse vengono curate

con diversi artifici, che qui non conviene discutere in dettaglio. I Modelli più usati sono:

1. Modello Gradiente

Si può assumere una forma di impulso:

$$\Delta R \div \exp^{-\left(\frac{u}{\rho}\right)^{2s}}$$

per cerchi di raggio  $\rho$  con  $u$ =distanza dal centro dei cerchi.

2. Invece che impulsi circolari di qualche forma si possono assumere impulsi a forma di “annulo” di raggio esterno  $\Lambda$  e raggio interno  $\Lambda^*$  e area  $\pi$ .

Cioè :

$$\Lambda^2 - \Lambda^{*2} = 1$$

da cui

$$\Lambda^* = \sqrt{\Lambda^2 - 1} \text{ raggio...}$$

$$\text{Raggio medio: } \delta = \frac{1}{2}(\Lambda^* + \Lambda); \text{ spessore } \sigma = \frac{1}{2}(\Lambda^* - \Lambda)$$

3. Lovejoy e Mandelbrot hanno usato una forma di impulso del tipo:

$$\Delta R e^{\left\{ \frac{-\left[ \frac{u^2}{(\rho')^2} - \delta^2 \right]}{\sigma^2} \right\}^{2s}}$$

Nel Capitolo 15 illustreremo l'applicazione del Modello F.S.P. a due casi concreti:

1. La distribuzione di diossina intorno allo stabilimento dell'industria ICMESA di Meda dopo che nel 1976 scoppiò un reattore chimico produttore di diserbanti;
2. La distribuzione di  $Cs^{137}$  nell'aria in Italia settentrionale conseguenza dell' incidente nucleare di Chernobyl del 1986.

## 6.8 Appendice: interpretare una figura

In questa appendice proponiamo un esercizio: quello di determinare i valori numerici dei punti del grafico rappresentato in figura (6.2b), che si riferisce all' articolo di ref. [38].

Nella suddetta sono rappresentati i valori delle fluttuazioni nel flusso della pioggia in un'area dell' Atlantico; gli intervalli fra le misure in essa rappresentate sono:  $\circ$  5 minuti,  $\bullet$  10 minuti,  $\nabla$  20 minuti,  $\blacktriangledown$  40 minuti.

I valori dei punti sono stati ottenendo elaborando il grafico dell'articolo tramite uno scanner ed ottenendone un'immagine in formato binario da manipolare col computer. Il grafico è realizzato in doppia scala logaritmica, una volta determinata le coordinate (x,y) in pixel di ciascun punto e considerando fattori di scala opportuni è stato possibile ottenere una stima dei valori del grafico.

Assegnando un errore del 10% a ciascuna misura, sono stati ottenuti valori del tipo: Implementando un algoritmo che tenga conto degli

$\circ$ 5 minuti	$\bullet$ 10 minuti	$\nabla$ 20 minuti	$\blacktriangledown$ 40 minuti
$x : 58 \pm 6$	$x : 58 \pm 6$	$x : 58 \pm 6$	$x : 60 \pm 6$
$y : 58 \pm 6$	$y : 48 \pm 5$	$y : 32 \pm 3$	$y : 27 \pm 3$

opportuni fattori di scala si ottengono i valori riportati nelle tabelle 6.1 e 6.2.

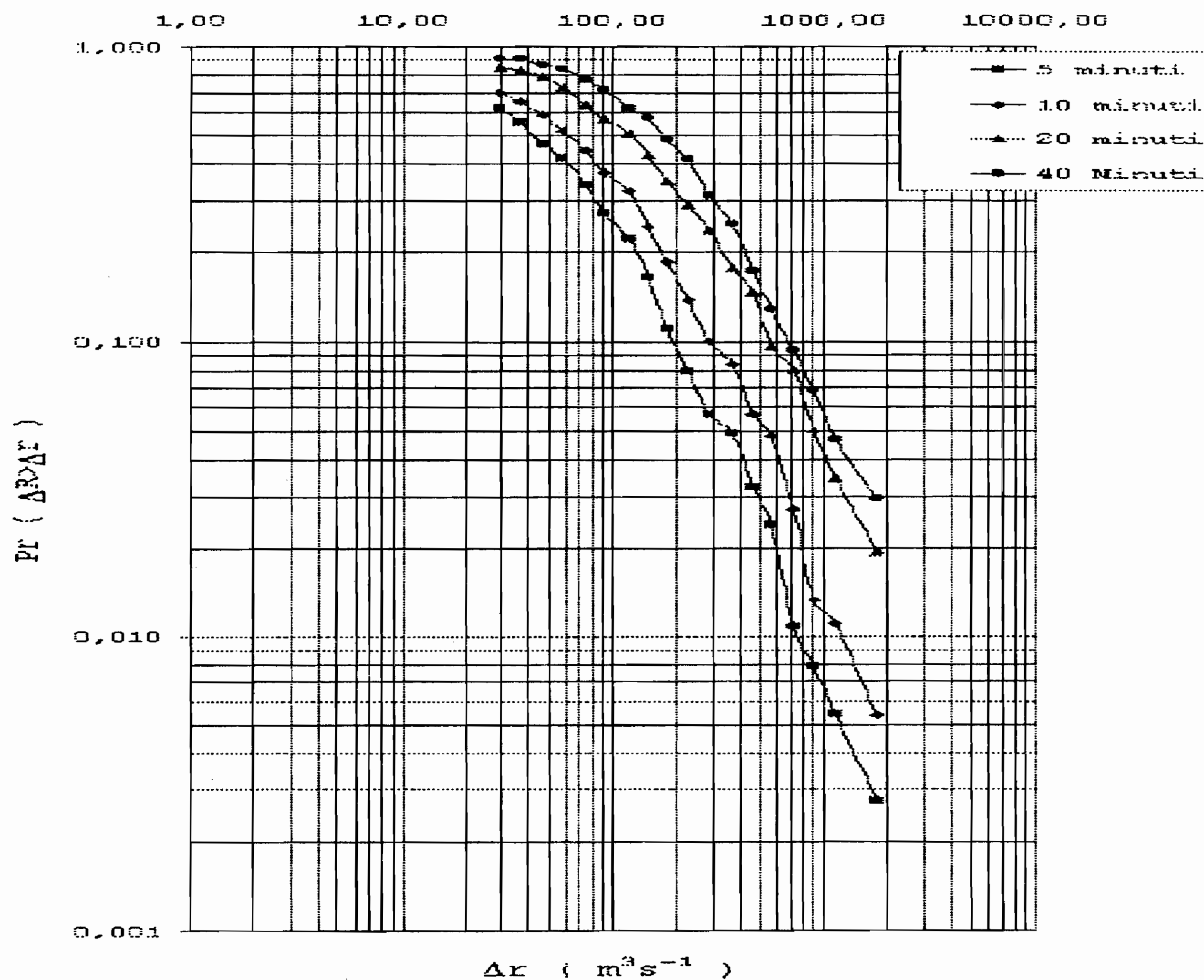


Figura 6.10: Riproduzione della fluttuazione del flusso di pioggia

Il programma in Fortran usato per la conversione delle coordinate:

```

real*4 ics(19),ips(19),uno
real*4  due,valox(19),valoy(19)
integer ndat,nout
integer scx,orx,ory,scy
character*12 filein
parameter (ndat=19,scx=190, orx=160, ory=207,scy=188)
PARAMETER (NOUT=22)
data ics / 58,76,96,117,136,153,172,191,211,228,246,
+ 264,284,302,321,339,357,378,399/
data ips / 32,34,38,45,56,65,74,88,105,120,136,
+ 160,176,210,225,263,294,341,364/

```

	○ 5 minuti		● 10 minuti	
1	29.05079	0.6202306	29.05079	0.7010430
2	36.57278	0.5554959	36.57278	0.6513730
3	46.60377	0.4679643	46.04240	0.5905771
4	59.38602	0.4191220	59.38602	0.5161381
5	74.76256	0.3403415	74.76256	0.4455907
6	91.86665	0.2730048	91.86665	0.3753774
7	119.9354	0.2216893	115.6532	0.3240696
8	147.3741	0.1652286	145.5988	0.2445107
9	181.0901	0.1102943	185.5330	0.1867569
10	227.9789	$7.9238482 \cdot 10^{-2}$	227.9789	0.1374985
11	287.0085	$5.6927107 \cdot 10^{-2}$	283.5513	0.1000000
12	361.3223	$4.9146131 \cdot 10^{-2}$	361.3223	$8.4242620 \cdot 10^{-2}$
13	454.8779	$3.2406956 \cdot 10^{-2}$	454.8779	$5.6927107 \cdot 10^{-2}$
14	558.9440	$2.3859402 \cdot 10^{-2}$	558.9440	$4.7956899 \cdot 10^{-2}$
15	712.2485	$1.0762542 \cdot 10^{-2}$	712.2485	$2.6968140 \cdot 10^{-2}$
16	896.6681	$7.9238461 \cdot 10^{-3}$	885.8667	$1.3253801 \cdot 10^{-2}$
17	1142.601	$5.4205381 \cdot 10^{-3}$	1115.240	$1.1029433 \cdot 10^{-2}$
18	1810.901	$2.7636893 \cdot 10^{-3}$	1810.901	$5.3545539 \cdot 10^{-3}$

Table 6.1: Valori numerici delle fluttuazioni del flusso di pioggia in un'area dell'Atlantico: valori ogni 5 e ogni 10 minuti.

```

do i=1,ndat
uno=2+((ics(i)-orx)/scx)
due=10**uno
valox(i)=due
print *,ics(i),due
end do
do i=1,ndat
uno=-1.0-((ips(i)-ory)/scy)
due=10**uno
valoy(i)=due
print *,ips(i),due
end do
filein='DATI'//'.DAT'
OPEN (UNIT=NOUT,FILE=FILEIN)
REWIND(NOUT)
DO I=1,ndat

```

	▽ 20 minuti		▼ 40 minuti	
1	29.050790	$8.528076 \cdot 10^{-1}$	29.76351	0.9066649
2	36.132230	$8.321714 \cdot 10^{-1}$	37.01870	0.9066649
3	46.042400	$7.923849 \cdot 10^{-1}$	47.17199	0.8633168
4	59.386020	$7.272808 \cdot 10^{-1}$	58.67067	0.8424263
5	74.762560	$6.356111 \cdot 10^{-1}$	74.76256	0.7732107
6	91.866650	$5.692711 \cdot 10^{-1}$	92.98676	0.7184275
7	115.653200	$5.098552 \cdot 10^{-1}$	119.9354	0.6202306
8	145.598800	$4.295154 \cdot 10^{-1}$	147.3741	0.5762863
9	85.532900	$3.487813 \cdot 10^{-1}$	185.5330	0.4854788
10	227.978900	$2.902458 \cdot 10^{-1}$	225.2328	0.4140199
11	283.551200	$2.385940 \cdot 10^{-1}$	297.6352	0.3123783
12	352.670000	$1.778279 \cdot 10^{-1}$	352.6700	0.2505741
13	449.398400	$1.461819 \cdot 10^{-1}$	466.0377	0.1735249
14	558.944000	$9.639234 \cdot 10^{-2}$	579.6393	0.1293309
15	03.669100	$8.021494 \cdot 10^{-2}$	720.9326	$9.2914835 \cdot 10^{-2}$
16	875.195900	$5.036487 \cdot 10^{-2}$	896.6681	$6.8407916 \cdot 10^{-2}$
17	1088.534000	$3.445356 \cdot 10^{-2}$	1115.240	$1.5541371 \cdot 10^{-2}$
18	1404.004000	$1.937466 \cdot 10^{-2}$	1438.450	$2.9382249 \cdot 10^{-2}$
19	1810.901000	$1.461819 \cdot 10^{-2}$	1810.901	$1.8675687 \cdot 10^{-2}$

Table 6.2: Valori numerici delle fluttuazioni del flusso di pioggia in un'area dell'Atlantico: valori ogni 20 e ogni 40 minuti.

```

WRITE(NOUT,FMT=*) I,ics(i),valox(i),ips(i),valoy(i)
ENDDO
CLOSE(NOUT)
STOP
END

```

Dai dati ottenuti si ricava il grafico in fig. 6.10.



# Capitolo 7

## I multifrattali stocastici

### 7.1 Introduzione

Il campo di applicazione dei concetti multifrattali si allarga enormemente con la introduzione dei multifrattali stocastici.

Un frattale geometrico -la curva di Peano- le traiettorie del moto browniano e quant'altro, hanno dimensione minore o uguale alla dimensione  $E$  dello spazio di immersione. Un frattale stocastico, come vedremo in questo Capitolo, non ha limiti. La sua dimensione può essere superiore a quella dello spazio di supporto. Il frattale stocastico non è una figura geometrica che al più può riempire tutto lo spazio geometrico che lo ospita; è una distribuzione di probabilità osservata per un determinato fenomeno naturale.

Verificatosi un fenomeno naturale, anche una sola volta, lo stesso può verificarsi  $n$  volte e non vi è, a priori, un limite al numero di volte che questo può avvenire, a meno che non vi siano limiti fisici intrinseci, come nel caso, ad esempio, della esplosione di buchi neri.

Si può pensare alla distribuzione della pioggia su tutta la Terra, giorno dopo giorno, si può pensare alla forma delle nubi su tutta la Terra, giorno dopo giorno. Non sempre piove ovunque, non sempre il

tempo è nuvoloso ovunque. Ogni pioggia è una *realizzazione stocastica* del fenomeno pioggia; ogni nube è una *realizzazione stocastica* dell'oggetto nube. Nel Capitolo 2 abbiamo analizzato soltanto qualche aspetto di fenomeni la cui dimensione frattale non era necessariamente la stessa al variare di un semplice parametro quale *la quota* a cui disegnare i contorni della Norvegia o della Grecia. Ciononostante, abbiamo scoperto interessanti proprietà frattali.

In questo Capitolo affrontiamo il problema in modo sufficientemente generale per arrivare a definire i multifrattali stocastici. Affrontiamo cioè il problema in modo alternativo: considerare campi comunque generici  $\epsilon$ , definiti su uno spazio  $S$  di supporto fisico o geometrico, e studiare le fluttuazioni a cui  $\epsilon$  può soggiacere, così liberandoci dai vincoli dei frattali strettamente geometrici.

Per capire come si possano realizzare configurazioni di  $\epsilon$  sullo spazio  $S$ , occorre porre attenzione ai processi in grado di generare possibili configurazioni del campo  $\epsilon$  nello spazio  $S$ .

Abbiamo già visto nel Capitolo 5 il processo moltiplicativo binomiale in grado di generare le cascate diaboliche definite su uno spazio frattale di dimensione  $D$ .

Dobbiamo tuttavia anteporre una serie di considerazioni sui concetti di dimensione e di codimensione di un insieme frattale.

## 7.2 Importanza della codimensione

La nozione di codimensione di un insieme frattale, ritenuta nel Capitolo 2 meno importante e significativa (o al più ugualmente significativa) di quella di dimensione nell'ambito dei multifrattali geometrici, si impone invece nel campo dei multifrattali stocastici, come proprietà fondamentale, perché, come si vedrà nel seguito, essa dipende dalle proprietà del campo, mentre la dimensione dipende *anche* dal modo con cui il campo viene analizzato.

Preoccupiamoci quindi di dare una definizione di codimensione in

modo da non mettere in conflitto la definizione data nel campo dei frattali geometrici con quella che serve nel campo dei frattali stocastici. Apparirà infatti presto chiaro che la definizione introdotta per i frattali geometrici si dimostra inadeguata ad una descrizione *completa* delle proprietà multifrattali del fenomeno (o del campo  $\epsilon$ ).

La definizione geometrica di codimensione è sostanzialmente quella accennata preliminarmente nel Cap. 2, nel caso lineare dei confini della Norvegia.

Sia  $A$ , contenuto in  $S$ , un insieme con dimensione frattale  $D_f$ , mentre  $D < E$  sia la dimensione (anch' essa eventualmente frattale) dello spazio di supporto  $S$  a sua volta contenuto in  $E$  appartenente allo spazio euclideo di dimensione  $E$ . La codimensione  $c$  di  $A$  è definita come:

$$c = D - D_f \quad (7.1)$$

ed è chiaro quindi che essa è sempre  $c \leq E$ .

In analogia, la definizione stocastica della codimensione viene formulata nel modo seguente. Sia  $B_\lambda$  una *bolla* di diametro  $\frac{\Delta}{\lambda}$ , dove  $\Delta$  è una lunghezza fissata sufficientemente grande e sia  $\lambda$  la risoluzione con la quale  $\Delta$  è misurata. La codimensione  $c$  dell'insieme  $A$ , contenuto in  $S$ , di dimensione frattale  $D_f$ , definito in uno spazio di supporto  $S$  (a sua volta contenuto in  $E$ , appartenente allo spazio euclideo di dimensione  $E$ ), è definita chiamando  $\lambda^{-c}$  la frazione di spazio occupato dall'insieme  $A$  nello spazio di supporto  $S < E$ , <sup>1</sup>. Cioè:

$$Pr(B_\lambda \cap A) \div \lambda^{-c}. \quad (7.2)$$

In altre parole,  $c$  è l'esponente che misura la frazione di spazio occupato dall'insieme frattale  $A$  nello spazio di supporto  $S < E$  usando come unità di misura la bolla  $B_\lambda$ .

---

<sup>1</sup>Si noti ancora una volta che, a risoluzione  $\lambda$ , un *volumetto elementare di integrazione* ha come misura  $\lambda^{-D}$  in quanto, se  $L$  è l'estensione di un intervallo e  $\lambda$  è il numero di intervallini in cui  $L(= 1)$  è suddiviso, ogni intervallino è lungo  $\delta = \frac{L}{\lambda} = \lambda^{-1}$ .

Nel caso stocastico, lo spazio dei parametri può anche essere infinito dimensionale in quanto è possibile aumentare indefinitamente il numero delle realizzazioni del processo o del fenomeno. È pertanto chiaro che  $c$  può assumere qualsiasi valore tra 0 e  $\infty$ .

Le due definizioni sono decisamente diverse per  $c > D$ , mentre coincidono quando  $c < D$ . Infatti basta scrivere esplicitamente la (7.2), ad una data risoluzione  $\lambda$ , come definizione operativa:

$$\lambda^{-c} \div Pr(B_\lambda \cap A) \div \frac{NumB_\lambda(A)}{NumB_\lambda(S)} \quad (7.3)$$

dove  $B_\lambda$  è la *misura dell'estensione della generica* bolla, a risoluzione  $\lambda$ ,  $Num B_\lambda(A)$  è in numero di *bolle* necessarie per ricoprire  $A$  e  $Num B_\lambda(S)$  è il numero di *bolle* necessarie per ricoprire  $S$ .

Il rapporto:  $\frac{NumB_\lambda(A)}{NumB_\lambda(S)}$ , stimato con la tecnica del *box counting*, fornisce come risultato:

$$Pr(B_\lambda \cap A) = \frac{\lambda^{D_f}}{\lambda^D} = \lambda^{D_f - D} = K\lambda^{-c} \div \lambda^{-c} \quad (7.4)$$

( $K$  costante) che è esattamente la definizione geometrica di codimensione.

Infatti: le misure degli insiemi  $A$  e  $S$  sono rispettivamente:

$$M_{D_f}(\delta) = \gamma(\delta)N_A(\delta)\delta^{D_f}$$

e

$$M_D(\delta) = \gamma(\delta)N_S(\delta)\delta^D.$$

Da queste si ricavano i due numeri  $N_A(\delta) = NumB_\lambda(A)$  e  $N_S(\delta) = NumB_\lambda(S)$ . Ciò fatto, si sostituisce nella (7.3) e si ottiene la (7.4), dopo avere notato che, quando  $\delta$  è molto piccolo,  $M_{D_f}(\delta)/M_D(\delta) \approx K$  costante.

La definizione stocastica è importante per i frattali stocastici nei quali essa misura la sparsità di un fenomeno e la sua rivelabilità su un campione fissato di realizzazioni anche non necessariamente stocasticamente indipendenti. Se infatti un fenomeno ha codimensione  $c$  minore della dimensione  $D$  dello spazio di supporto (cioè la dimensione  $D_f = D - c$  è definita), esso è abbastanza fitto da essere presente *quasi*<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Questo *quasi* può essere dotato di un preciso significato probabilistico.

sicuramente in una realizzazione del processo stocastico. Se invece la codimensione  $c$  è maggiore della dimensione  $D$  dello spazio di immersione (con il che  $D_f$ , negativa, *non* è definita), il fenomeno è troppo sparso e raro e *quasi* sicuramente non è presente in una singola realizzazione del processo. Tuttavia, su più realizzazioni, si possono ritrovare anche fluttuazioni con  $c$  maggiore di  $D$ .

Sia infatti  $N_s$  il numero di realizzazioni di un determinato processo stocastico, ognuna di esse definito su un supporto geometrico  $S$  di dimensione  $D$ . Se si osserva il fenomeno a risoluzione  $\lambda$ , detto  $N = \lambda^D$  il numero di *pixels* in cui lo spazio  $S$  è stato suddiviso, si hanno  $N \cdot N_s$  *pixels* da osservare ed analizzare. Si può inoltre definire per comodità un numero  $D_s$  tale che  $N_s = \lambda^{D_s}$ . Con ciò si ha che  $N \cdot N_s = \lambda^{D+D_s}$ .  $D_s$  si chiama *dimensione frattale del campione* di  $N_s$  realizzazioni<sup>3</sup>.

Ora, il numero  $D + D_s$  si comporta come se fosse una dimensione di un nuovo spazio di immersione  $S'$  comprendente tutti i campioni, nel senso che, se  $c$  è minore di  $D + D_s$  il fenomeno è sufficientemente fitto da essere *quasi* sicuramente rappresentato in uno degli  $N \cdot N_s$  pixels. La situazione è concettualmente illustrata in fig. 7.1, nella quale lo spazio fisico/geometrico nel quale il fenomeno avviene, viene rappresentato da piani *ortogonali* allo spazio delle probabilità, lungo il quale vengono rappresentate le singole realizzazioni del fenomeno (descritto nello spazio fisico/geometrico mediante l'ellisse A). Riprenderemo più avanti il concetto della *sample dimension*. Si noti che, mentre  $D$  non dipende da  $\lambda$ ,  $D_s$ , a fissato  $N_s$ , decresce al crescere di  $\lambda$ . Quindi, nel limite di  $\lambda \gg 1$  (pessima risoluzione), praticamente solo i fenomeni con  $c$  minore di  $D$  sono generalmente presenti nel campione  $N_s$ , perché  $D_s$  tende a zero. Alternativamente, si può dire che, fissata la codimensione  $c$  del fenomeno che si vuole studiare, al crescere di  $\lambda$  deve crescere anche il numero dei campioni  $N_s$  perché si abbia una buona probabilità che il segnale del fenomeno da studiare sia presente in modo significativo nei dati sperimentali.

---

<sup>3</sup> $s$  sta per *sample*.

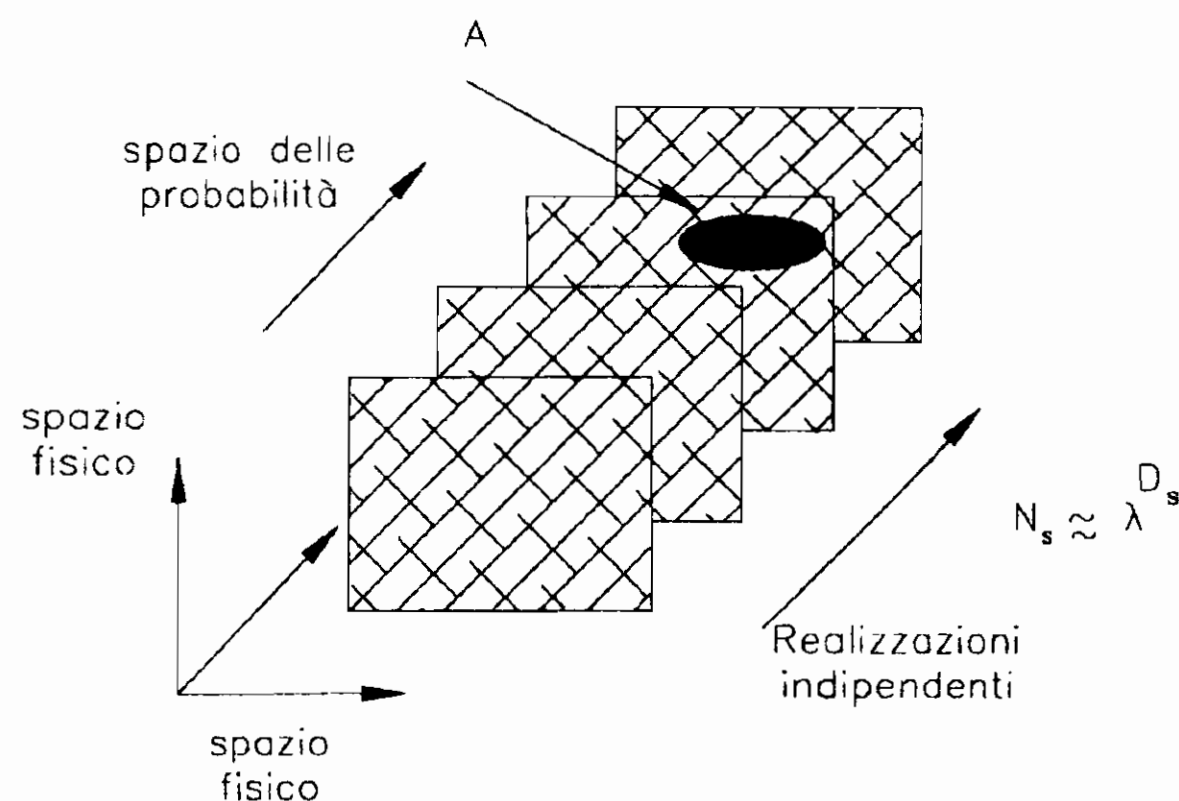


Figura 7.1: Rappresentazione ideale di realizzazioni statistiche di fenomeni casuali. Viene idealizzato uno spazio fisico bidimensionale nel quale può verificarsi un fenomeno nella regione indicata esplicitamente nella terza realizzazione stocastica.

### 7.3 Cascate e processi moltiplicativi

Prendiamo un supporto generico  $S$ , come un segmento, un quadrato o un qualsiasi altro spazio, *non* frattale, e caratterizziamolo attraverso due parametri  $\Delta$  e  $D$ : una *lunghezza caratteristica*<sup>4</sup> ( $\Delta$ ) e la dimensione (frattale o topologica)  $D$ . Abbiamo infatti visto nel Capitolo 3 che si può costruire un frattale su uno spazio di immersione che può essere sia un insieme euclideo di dimensione  $E$ , sia, a sua volta, un insieme frattale (per esempio la barra di Cantor) di dimensione  $D < E$ .

Su questo *spazio di supporto*  $S$  sia definita una funzione  $\epsilon_0$  a valore costante in ogni punto di  $S$  (questo è il livello *zero* di una cascata moltiplicativa).

Procediamo ora con un primo passo della cascata moltiplicativa scegliendo un numero  $\lambda$  -la risoluzione- e, dividendo  $\Delta$  in  $\lambda$  parti (ciascuno

<sup>4</sup>La lunghezza caratteristica è una qualsiasi lunghezza che definisce a grandi linee la estensione dello spazio  $S$ . Ad esempio, nel Capitolo 5, abbiamo assunto per un quadrato il lato, ma sarebbe potuta andare benissimo la diagonale; per un cerchio la lunghezza caratteristica è di solito il raggio, ma potrebbe andare benissimo anche la circonferenza o il diametro.

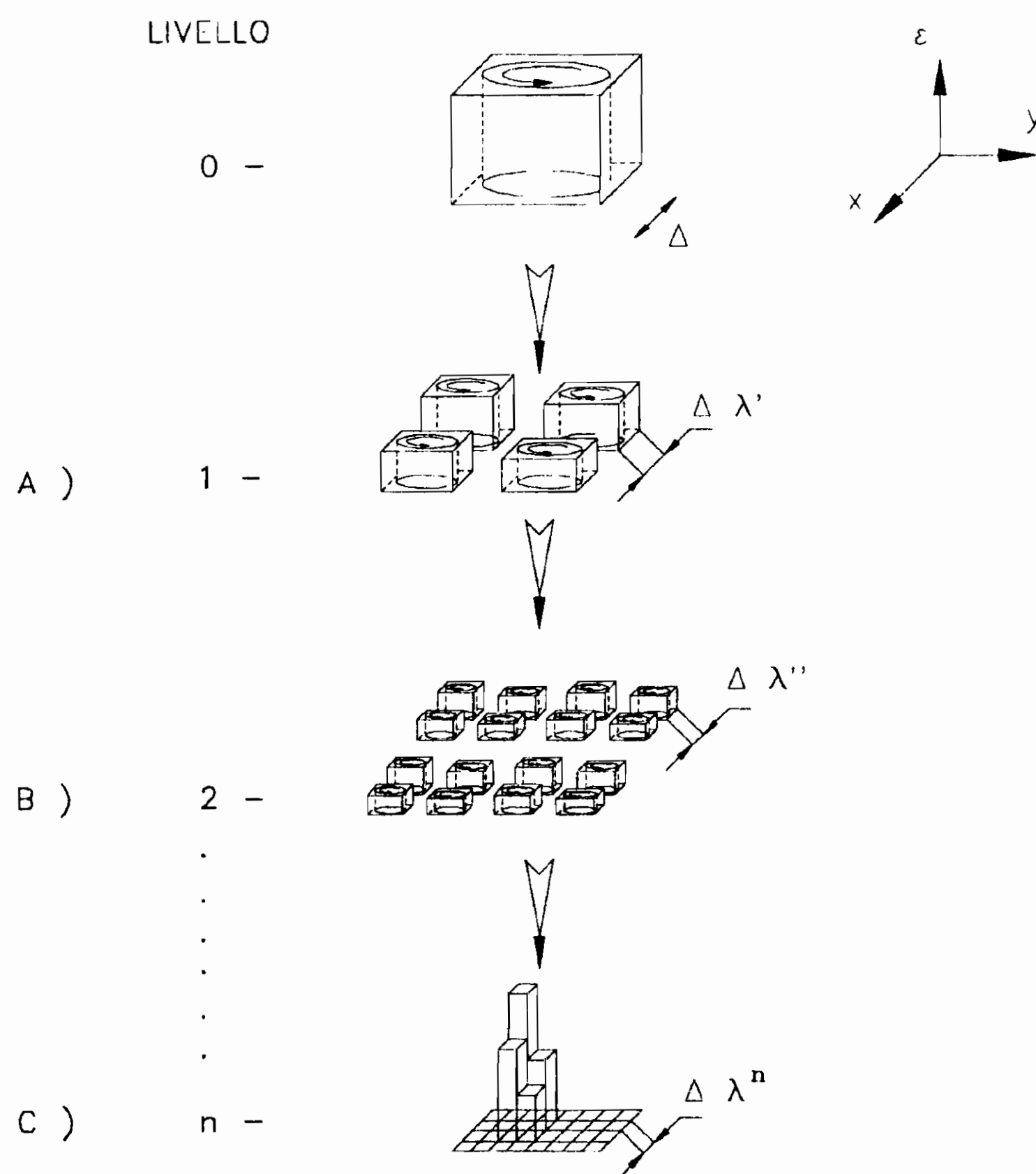


Figura 7.2: Rappresentazione ideale di cascata moltiplicativa da modello  $\alpha$ .

di lunghezza<sup>5</sup>  $\delta = \frac{\Delta}{\lambda}$  -ovvero dividendo  $S$  in  $\lambda^D$  volumetti (ognuno con misura  $\lambda^{-D}$ ). Per ognuno di questi volumetti si scelga un *fattore*  $\mu_1$  che moltiplichi la funzione  $\epsilon_0$  in modo da poter costruire una nuova funzione a gradini  $\epsilon_1$ , costante su ogni volumetto (abbiamo applicato il primo passo di una cascata moltiplicativa). Il passo successivo della cascata consiste nell'applicare la stessa procedura ad ogni volumetto del *livello 1*, scegliendo un nuovo *fattore*  $\mu_2$ . Si ottengono così  $(\lambda^D)^2$  volumetti, a risoluzione  $\lambda^2$ , su cui il campo  $\epsilon_2$  è costante.

Reiterando  $n$  volte il procedimento, raggiungiamo il livello  $n$ -esimo della cascata, in cui  $S$  risulta suddiviso in  $\lambda^{nD}$  volumetti, in ognuno dei quali la funzione  $\epsilon_n$  risulta costante di valore  $\epsilon_n = \mu_n \epsilon_{n-1}$ . Il

<sup>5</sup>E' chiaro che se si assume, come fatto nei primi Capitoli, per semplicità:  $\Delta = 1$ ,  $\delta = \frac{1}{\lambda}$ .

procedimento è idealmente schematizzato in fig. 7.2, nella quale si è assunto  $\lambda = 4$ .

Abbiamo costruito una cascata moltiplicativa *discreta* (perchè la risoluzione  $\lambda$  varia in modo discreto) a  $n$  stadi, del tutto generica in quanto non abbiamo per nulla specificato alcun vincolo sui fattori moltiplicativi  $\mu_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Porre dei vincoli sui fattori  $\mu_i$  introduce una classificazione delle cascate in varie classi.

Nel prossimo paragrafo analizziamo in modo specifico una cascata moltiplicativa detta *Modello  $\alpha$*  molto utile per generare multifrattali stocastici.

## 7.4 I modelli moltiplicativi

### 7.4.1 Il modello $\beta$

Viene indicato con il nome di *modello  $\beta$*  un modello estremante nel quale la distribuzione di probabilità  $\rho(x)$  in ciascuno degli intervallini di ampiezza  $\delta$  è o zero (stato *morto*, *dead*) o  $k$ , una determinata, prefissata frazione di  $\int_0^\Delta \rho(x)dx$  (stato *vivo*, *alive*). Per semplicità assumiamo  $\rho(x)$  normalizzata a uno:  $\mu(\Delta) = \int_0^\Delta \rho(x)dx = 1$ . Il modello  $\beta$  presenta due stati:

$$\begin{aligned} Pr(\varepsilon = \lambda^{-c}) &= \lambda^{-c} && \textit{stato vivo} \\ Pr(\varepsilon = 0) &= 1 - \lambda^{-c} && \textit{stato morto} \end{aligned}$$

dove  $\lambda > 1$  è il fattore di scala;  $\varepsilon$  è una variabile aleatoria con distribuzione binomiale<sup>6</sup> per la quale vale  $\bar{\varepsilon} = 1$  (infatti è immediato vedere che:  $\bar{\varepsilon} = \lambda^c \cdot \lambda^{-c} + 0 \cdot (1 - \lambda^{-c}) = 1 + 0 = 1$ ). Ad ogni passo successivo, gli stati sopravvissuti decrescono di un fattore  $\beta = \lambda^{-c}$  (da cui il nome di *modello  $\beta$* ). Dopo  $n$  passi, il numero medio di stati vivi  $\overline{N}$ , a risoluzione  $\Lambda = \lambda^n$ , in uno spazio di immersione di dimensione  $D$  (che può anche essere frattale) è:

$$\overline{N(\Lambda)} = \Lambda^D \Lambda^{-c} = \Lambda^{D-c} = \Lambda^{D'}$$

---

<sup>6</sup>si veda il Capitolo 8.



dove  $D' = (D - c)$  è la dimensione frattale degli stati vivi (basti ricordare l'insieme di Cantor) e  $c$  si conferma essere la codimensione frattale dello stesso insieme.

Il campo prodotto da un modello  $\beta$  è rappresentato da una serie di valori sempre più sparsi, pur mantenendo la proprietà  $\bar{\varepsilon} = 1$ . Il risultato mostra proprietà semplici per cui basta un solo parametro ( $\beta$  o  $c$ ) per descriverne le proprietà di scaling.

### 7.4.2 Il modello $\alpha$

Il *modello*  $\alpha$  è più articolato e flessibile, anche se rimane ancora un modello pedagogico. La sua importanza scaturisce dalla considerazione delle cascate moltiplicative dominate da distribuzioni di probabilità iperboliche.

Possiamo generalizzare la distribuzione di probabilità iperbolica di Mandelbrot del Capitolo 5 al caso arbitrario per il quale, scelta una soglia  $\varepsilon_{th}$ , la probabilità che il generico campo  $\varepsilon$ , esaminato alla scala (o risoluzione)  $\lambda$ , segua una legge del tipo della (7.2):

$$Pr(\varepsilon \geq \varepsilon_{th}) \sim \lambda^{-c}$$

con  $c$  esponente di intermittenza, esponente di scala o, se si vuole, infine, codimensione frattale.

Per comodità assumiamo anche qui  $\bar{\varepsilon} = 1$ . È molto utile legare il valore della soglia alla risoluzione (o fattore di scala). Basta porre:  $\varepsilon_{th} = \lambda^\gamma$ , ovvero  $\varepsilon_{th} = e^{\gamma \log \lambda}$ . Si ottiene immediatamente:

$$\log \varepsilon_{th} = \gamma \log(\lambda) ; \quad \gamma = \frac{\log \varepsilon_{th}}{\log \lambda}. \quad (7.5)$$

Il fattore  $\gamma$  è detto **ordine o grado di singolarità**.

Con queste notazioni formuliamo un *modello*  $\alpha$  per delle cascate moltiplicative in un modo più elaborato rispetto a quanto fatto nel paragrafo precedente.

Più precisamente, cerchiamo di generalizzare le considerazioni delle cascate monofrattali di Mandelbrot del Capitolo 5 al caso in cui la

codimensione (o l'esponente di scala) possa cambiare con la soglia; o meglio -con la nostra nuova parametrizzazione- possa cambiare con l'ordine di singolarità. Per fare questo, cerchiamo di costruire una cascata nella quale  $\gamma$  possa cambiare ad ogni passo, cioè al variare di  $\lambda$ . Partiamo quindi da un caso semplice, approfittando della illustrazione schematica tracciata in fig. 7.2 di §7.3, in cui una distribuzione *piatta* di probabilità  $\epsilon$  ha un valore dato sul dominio  $S$  che è lo spazio di immersione. La distribuzione rappresenta il nostro *campo* di probabilità  $\epsilon$  che, nello stato iniziale può pensarsi caratterizzato da un grado di singolarità  $\gamma^0$ .

Eseguiamo due passi consecutivi di una cascata moltiplicativa suddividendo il dominio  $S$  in  $4(2 \times 2)$  sottoinsiemi raggiungibili mediante il seguente processo:

- vi siano due possibilità: a)- che il campo cresca e b)- che il campo decresca;
- indichiamo con  $\gamma^+$  (fattore di crescita) un ordine di singolarità accresciuto rispetto a quello iniziale e con  $-\gamma^-$  (fattore di decrescita) un ordine di singolarità diminuito rispetto a quello iniziale;
- valga la legge di scala:

$$Pr(\epsilon > \lambda^{-\gamma}) \sim \lambda^{-c}; \quad (7.6)$$

- se la probabilità di crescita è  $Pr(\epsilon \geq \lambda^{\gamma^+}) \sim \lambda^{-c}$ , la probabilità di decrescita, per la conservazione della probabilità è:  $Pr(\epsilon \geq \lambda^{-\gamma^-}) = (1 - \lambda^{-c})$ .

Nel costruire i due passi cui si è accennato all'inizio, si hanno quattro possibilità: a)- due consecutivi fattori di crescita; b)- due consecutivi fattori di decrescita; c)- un fattore di crescita seguito da un fattore di decrescita; d)- un fattore di decrescita seguito da un fattore di crescita. Le due ultime possibilità coincidono.

Si raggiungono quindi quattro configurazioni (di cui due identiche) di campo differente, come illustrato nella fig. 7.2.

Le probabilità che si verifichino le diverse configurazioni in due passi consecutivi sono:

$$Pr(\epsilon \geq \lambda^{2\gamma^+}) = \lambda^{-c}\lambda^{-c} = \lambda^{-2c};$$

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon \geq \lambda^{(\gamma^+ - \gamma^-)}) &= 2\lambda^{-c}(1 - \lambda^{-c}) = 2\lambda^{-c} - 2\lambda^{-2c}; \\ Pr(\epsilon \geq \lambda^{-2\gamma^-}) &= (1 - \lambda^{-c})^2 = 1 - 2\lambda^{-c} + \lambda^{-2c}. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Riscriviamo ora il processo come se fosse stato ottenuto raggiungendo la medesima situazione dei tre stati della (7.7) con un passo solo e quindi con un rapporto di scala  $\Lambda = \lambda^2$ .

Le tre probabilità si possono riscrivere per semplice sostituzione come:

$$\begin{aligned} Pr(\epsilon \geq \Lambda^{\gamma^+}) &= \Lambda^{-c}; \\ Pr(\epsilon \geq \Lambda^{\frac{\gamma^+ - \gamma^-}{2}}) &= 2(\Lambda^{-\frac{c}{2}} - \Lambda^{-c}); \\ Pr(\epsilon \geq \Lambda^{-\gamma^-}) &= 1 - 2\Lambda^{-\frac{c}{2}} + \Lambda^{-c}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Queste ultime probabilità corrispondono evidentemente ad un processo ottenuto con un singolo passo di un modello  $\alpha$  a tre stati con rapporto di scala  $\Lambda$ .

## 7.5 Scaling Multiplo delle distribuzioni

Iterando la procedura  $n$  volte (stadio C di fig. 7.2), chiamiamo per comodità  $\gamma_k$  il fattore risultante dalle applicazioni combinatorie di  $k$  fattori di crescita e di  $(n - k)$  fattori di decrescita:

$$\gamma_k = \frac{k\gamma^+ - (n - k)\gamma^-}{n}; \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

Dopo  $n$  passi, si ottiene facilmente la legge di scala del campo risultante come probabilità binomiale:

$$Pr(\epsilon \geq \lambda^{\gamma_k}) = \binom{n}{k} \lambda^{-ck} (1 - \lambda^{-c})^{(n-k)}. \quad (7.9)$$

La (7.9) non è altro che la distribuzione di probabilità del campo originale (situazione A di fig. 7.2) analizzato a risoluzione  $\lambda^n$  (alla scala  $\delta_n = \lambda^{-n}$ ) invece che a risoluzione  $\lambda^1$  (alla scala  $\delta = \lambda^{-1}$ ).

Chiamiamo ancora:

$$\epsilon_{\lambda^n} = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \quad (7.10)$$

il campo *somma* dei diversi campi  $\epsilon_i$ , ovvero il campo frattale alla scala  $\delta_n = \lambda^{-n}$ .

Possiamo scrivere la legge di scala per  $\epsilon_{\lambda^n}$  come:

$$Pr(\epsilon_{\lambda^n} \geq [\lambda^n]^{\gamma_i}) = \sum_j p_{ij} (\lambda^n)^{-c_{ij}}. \quad (7.11)$$

I termini  $p_{ij}$  sono fattori di tipo binomiale e si chiamano *sottomoltiplicità* ed i termini  $c_{ij}$  si chiamano *sub-codimensioni* relative alle diverse singolarità  $\gamma_i$  definite in precedenza. Notiamo che, a causa del vincolo di conservazione  $\bar{\epsilon} = 1$  a tutte le scale, i gradi di singolarità  $\gamma_i$  non possono avere tutti lo stesso segno; alcuni sono positivi ma altri debbono essere negativi; tuttavia, a causa del modo con cui sono stati introdotti i fattori  $\gamma^+$  e  $-\gamma^-$ , il modello  $\alpha$  ha gradi di singolarità intermedi:  $-\gamma^- \leq \gamma_i \leq \gamma^+$ .

Compresa la generalizzazione ad  $n$  passi del processo a cascata moltiplicativa, possiamo applicare lo schema di rinormalizzazione, invece che da  $\lambda$  a  $\Lambda = \lambda^2$ , da  $\lambda$  a  $\lambda^n$ ,  $n$  volte, e sostituire così una cascata a  $n$  passi, due stati, rapporto di scala  $\lambda$ , con una cascata ad un passo singolo,  $(n + 1)$  stati, rapporto di scala  $\lambda^n$ .

Analizzando la (7.11), ci accorgiamo che, al crescere di  $n$ , il termine dominante della sommatoria di campo (7.10) è quello che corrisponde al valore minimo dei  $c_{ij}$ .

Introduciamo allora la notazione:

$$c(\gamma_i) = c_i = \min\{c_{ij}\} \quad (7.12)$$

cosicchè eliminiamo l'indice inessenziale  $j$  e lasciamo sopravvivere solo l'indice  $i$  che indica *il passo* intermedio (che va da 1 a  $n$ ) usato per passare dalla scala  $\lambda$  alla scala  $\lambda^n$ . Possiamo allora approssimare la (7.11) con una nuova espressione valida per  $\lambda$  generico (cioè sostituendo un generico continuo  $\lambda$  ai valori discreti  $\lambda_n$ ):

$$Pr(\epsilon_{\lambda^n} \geq \lambda^{\gamma_i}) = p_i \lambda^{-c_i} \quad (7.13)$$

dove  $p_i$  è un fattore moltiplicativo (detto pre-fattore) e  $c_i$  è la codimensione *corrispondente* alla singolarità  $\gamma_i$ .

Giunti a questo punto, passando decisamente al continuo, possiamo omettere qualsiasi dipendenza dagli indici, permettere che l'ordine di singolarità  $\gamma_i$  possa assumere qualunque valore finito  $\gamma$ . Ovviamente, anche i pre-fattori  $p_i$  diventano una funzione  $p(\gamma)$  dell'ordine di singolarità e possiamo scrivere:

$$Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) = p(\gamma)\lambda^{-c(\gamma)}. \quad (7.14)$$

La funzione  $c(\gamma)$  prende il nome di *funzione codimensione*. Così facendo, abbiamo generalizzato la legge di scaling ai multifrattali stocastici continui.

Trascurando il pre-fattore  $p(\gamma)$ , si può scrivere sinteticamente, senza perdere di generalità, la legge di *scaling multiplo* riferita ad un campo multifrattale che offre una (co)dimensione frattale variabile al variare del valore della soglia utilizzata per investigare il campo stesso (si ricordi, per esempio, la dimensione frattale non solo delle coste della Norvegia o della Grecia, bensì di qualsiasi *curva di livello*, qualsiasi isoipsa per ogni altitudine  $\epsilon_{th}$  del campo *altitudine* del Paese da studiare).

Questa forma semplificata ed al tempo stesso più generale è dunque:

$$Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \propto \lambda^{-c(\gamma)} \quad (7.15)$$

che coincide formalmente con la legge di scaling per un monofrattale o per una cascata monofrattale “alla Mandelbrot” (vedi Capitolo 5).

La legge(7.15) si chiama **Probability Distribution Multiple Scaling** (PDMS): scaling multiplo delle distribuzioni di probabilità.

A rigore,  $\gamma$  prende il nome di *ordine di singolarità* soltanto per  $\gamma > 0$ , in quanto è solo per  $\gamma > 0$  che si possono incontrare divergenze;  $\epsilon_\lambda$  diverge per  $\gamma \rightarrow \infty$ , quando  $\lambda \rightarrow 0$ .

È importantissimo sottolineare che  $c(\gamma)$  è definita come coefficiente statistico e pertanto in modo del tutto indipendente dalla dimensione  $D$  dello spazio (fisico o geometrico) sul quale viene definito il campo multifrattale in esame.

La (7.15) è la principale relazione che caratterizza i processi multifrattali a cascata, dominati dalla funzione codimensione  $c(\gamma)$  che

fornisce la distribuzione di probabilità di  $\epsilon_\lambda$  e, allo stesso tempo, stabilisce una precisa relazione di *scaling multiplo* tra le intensità del campo  $\epsilon_\lambda$  e la sua probabilità di essere osservato, in dipendenza dalla risoluzione con la quale viene indagato. La presenza di  $c(\gamma)$  permette pertanto di pensare in modo naturale che le distribuzioni di probabilità possono essere diverse per le diverse soglie stabilite<sup>7</sup>.

## 7.6 Proprietà della funzione $c(\gamma)$

Nel paragrafo precedente abbiamo raggiunto l'obiettivo massimo che si possa raggiungere partendo da un semplice modello  $\alpha$ . La funzione codimensione  $c(\gamma)$  assume pertanto un ruolo importantissimo nell'intero campo dei multifrattali. È perciò necessario studiare (per quanto possibile) le proprietà geometrico-analitiche che la funzione  $c(\gamma)$  possiede, ricordando che essa proviene dai parametri  $c_{ij}$  e dalla loro approssimazione attraverso la (7.12).

1. La prima proprietà è che la funzione cresce indefinitamente con  $\gamma$ , cioè che la sua derivata  $c'(\gamma)$  è positiva. Ciò si può dedurre da come  $c(\gamma)$  è stata costruita. Abbiamo infatti scelto nella (7.12)  $c(\gamma_i)$  delle cascate discrete come il valore minimo dominante nella costruzione di un campo multifrattale, somma di campi frattali  $\epsilon_i$  della (7.10). Il termine scelto è dominante sì, ma ad esso si aggiungono in realtà diversi altri contributi. Allora  $c(\gamma)$  è una funzione crescente dell'ordine di singolarità. Questo esprime chiaramente il fatto che i valori più alti del campo  $\epsilon_\lambda$  sono pur sempre i valori più rari.
2. Abbiamo normalizzato (per comodità) il campo  $\epsilon_\lambda$  al suo valore medio assumendo  $\bar{\epsilon}_\lambda = 1$ . Se chiamiamo  $\gamma_1$  l'ordine di singolarità

---

<sup>7</sup>Ricordiamo che la (co)dimensione delle coste della Norvegia (altitudine  $h = 0$ ) è completamente diversa dalla (co)dimensione frattale della isoipsa ad altitudine  $h \neq 0$ . Addirittura, per  $h = h_{max}$ , altezza della più alta montagna norvegese, la isoipsa si riduce ad un punto di dimensione nulla.

del campo medio, si ottiene che, per definizione è:

$$\bar{\epsilon}_\lambda = \lambda^{\gamma_1} \cdot Pr(\epsilon_\lambda = \lambda^{\gamma_1}) = \lambda^{\gamma_1} \lambda^{-c(\gamma_1)} = 1$$

ovverossia:  $\lambda^{\gamma_1 - c(\gamma_1)} = 1$ , da cui segue immediatamente:  $\gamma_1 = c(\gamma_1)$ . L'ordine di singolarità di campo medio  $c(\gamma_1)$  viene indicato semplicemente con  $C_1$ . Esso rappresenta anche il grado di singolarità del momento statistico del primo ordine.

Pertanto  $c(\gamma)$  possiede un *punto fisso*:

$$c(C_1) = C_1 \quad (7.16)$$

e quindi  $C_1$  è anche la codimensione del campo medio.

Una nota importante è la seguente: se studiamo il campo  $\epsilon$  in uno spazio di dimensione secondo Hausdorff e Besicovitch  $D < E$ ,  $C_1$  non può eccedere  $D < E$ . Deve pertanto essere:

$$C_1 < D.$$

Ricordiamo infatti che la codimensione è, per la (7.1), per i frattali geometrici di Capitolo 1, il complemento alla dimensione, per cui, se fosse  $C_1 = D < E$ , la dimensione frattale del campo medio sarebbe nulla, il che implicherebbe che il campo è nullo ovunque (caso evidentemente degenere).

3. Al fine di studiare ulteriormente le proprietà di  $c(\gamma)$ , differenziamo la distribuzione di probabilità rispetto a  $\gamma$ . Posto cioè:  $f(\gamma) = \lambda^{-c(\gamma)}$  otteniamo:

$$f'(\gamma) = \frac{d}{d\gamma} [\lambda^{-c(\gamma)}] = \log\left(\frac{1}{\lambda}\right) c'(\gamma) \lambda^{-c(\gamma)}.$$

Scopriamo così che  $c(\gamma)$  è adatta a rappresentare *anche* la *densità di probabilità* del campo  $\epsilon_\lambda$ . Infatti, riprendendo l'assunzione di comodo (7.5), possiamo sempre considerare:

$$\epsilon_\lambda = \lambda^\gamma \quad (7.17)$$

per cui la *densità di probabilità*, a risoluzione  $\lambda$ , nella variabile  $\gamma$ , costituisce la *densità di probabilità* del campo  $\epsilon_\gamma$  visto in *unità diverse*. La (7.17) ci suggerisce quindi che ogni valore del campo stesso  $\epsilon_\lambda$  corrisponde ad una singolarità di ordine  $\gamma$  e di codimensione  $c(\gamma)$ .

**Possiamo pertanto usare, per indicare il campo, indifferentemente sia  $\epsilon_\lambda$  che  $\lambda^\gamma$ .**

La (7.17) ci permette di fare alcune importanti considerazioni: partendo dalla (7.17), è facile scrivere, in un punto  $x$  dello spazio di immersione:

$$\gamma_\lambda(\mathbf{x}) = \frac{\log \epsilon_\lambda(\mathbf{x})}{\log \lambda} \quad (7.18)$$

e possiamo chiamare  $\gamma_\lambda(\mathbf{x})$  singolarità incipiente nel punto  $\mathbf{x}$ . È chiaro che per  $\lambda \rightarrow \infty$ ,  $\epsilon_\lambda(\mathbf{x})$  può divergere e  $\gamma_\lambda(\mathbf{x})$  può seguire un cammino del tutto aleatorio senza ammettere un limite superiore  $\gamma_\infty(\mathbf{x})$ .

Ciò non può accadere per i multifrattali geometrici perché i valori delle singolarità sono “assegnati a priori” e quindi per assunzione non possono divergere.

4. La funzione  $c(\gamma)$  è convessa. Per dimostrarlo sfruttiamo la definizione di convessità in un intervallo:  $c(\gamma)$  è convessa in un intervallo  $I$  se, presi  $\gamma_1$  e  $\gamma_2$  qualsivoglia in  $I$  (si assuma che per comodità sia  $\gamma_1 \leq \gamma_2$ ), e per ogni  $z > 1$  si ha:

$$c[z\gamma_1 + (1-z)\gamma_2] \leq [zc(\gamma_1) + (1-z)c(\gamma_2)]. \quad (7.19)$$

Si vedrà nel paragrafo 7.8 che la  $c(\gamma)$  può essere scritta [(cfr. l'equazione (7.28)]:

$$c(\gamma) = \max_x \{\gamma x - f(x)\}, \quad (7.20)$$

e quindi il primo membro della (7.19) diventa:

$$\max_x \{z\gamma_1 x + (1-z)\gamma_2 x - f(x)\}. \quad (7.21)$$

Aggiungendo e sottraendo a quest'ultima  $zf(x)$ , otteniamo:

$$\max_x \{z\gamma_1 x - zf(x) + (1-z)\gamma_2 x - (1-z)f(x)\}. \quad (7.22)$$



A questo punto, sfruttando la (7.20) per riscrivere anche la (7.19), otteniamo la disuguaglianza:

$$\begin{aligned} \max_x \{z\gamma_1 x - zf(x) + (1-z)\gamma_2 x - (1-z)f(x)\} \leq \\ z \max_x \{\gamma_1 x - f(x)\} + (1-z) \max_x \{\gamma_2 x - f(x)\} \end{aligned} \quad (7.23)$$

che è sicuramente vera per ogni  $z$  e per ogni  $\gamma_1, \gamma_2$  appartenenti al dominio di definizione della  $c(\gamma)$ <sup>8</sup>.

5. Esiste un' altra importante proprietà che non possiamo ancora discutere non avendo ancora in mano tutti gli elementi. Essa è connessa con le proprietà dei momenti statistici che verranno discussi nel prossimo paragrafo.

La fig. 7.3 illustra qualitativamente l'andamento tipico di una funzione codimensione  $c(\gamma)$  al variare dell'ordine di singolarità  $\gamma$ .

Come si possano eccedere le dimensioni dello spazio di supporto  $D < E$ , mediante processi casuali è illustrato qualitativamente nella figura 7.1 e verrà spiegato nel paragrafo seguente. L'analisi in termini di multifrattali stocastici viene effettuata nello spazio delle probabilità, mentre lo spazio fisico (o quello geometrico) di supporto è uno spazio del tutto indipendente. Per chiarezza, nella figura 7.1 è stato indicato, nello spazio fisico, un dominio  $A$  che è lo spazio di supporto del fenomeno, mentre "ortogonalmente" è stata indicata la successione delle realizzazioni stocastiche. Lo spazio fisico ha dimensione euclidea ( $E = 2$  nella figura), ma lo spazio delle probabilità si può estendere indefinitamente in ben altra direzione.

## 7.7 Dimensione stocastica del campione

Si può dare una interpretazione "geometrica" a  $c(\gamma)$  quando  $c(\gamma) < D$ .

Definiamo, in accordo con la (7.1), una *funzione dimensione*  $D(\gamma)$  come complemento alla dimensione di Hausdorff dello spazio di supporto

---

<sup>8</sup>Analogia dimostrazione si può trovare nella ref. [42]. La stessa concavità si ritrova facilmente anche nel §7.9

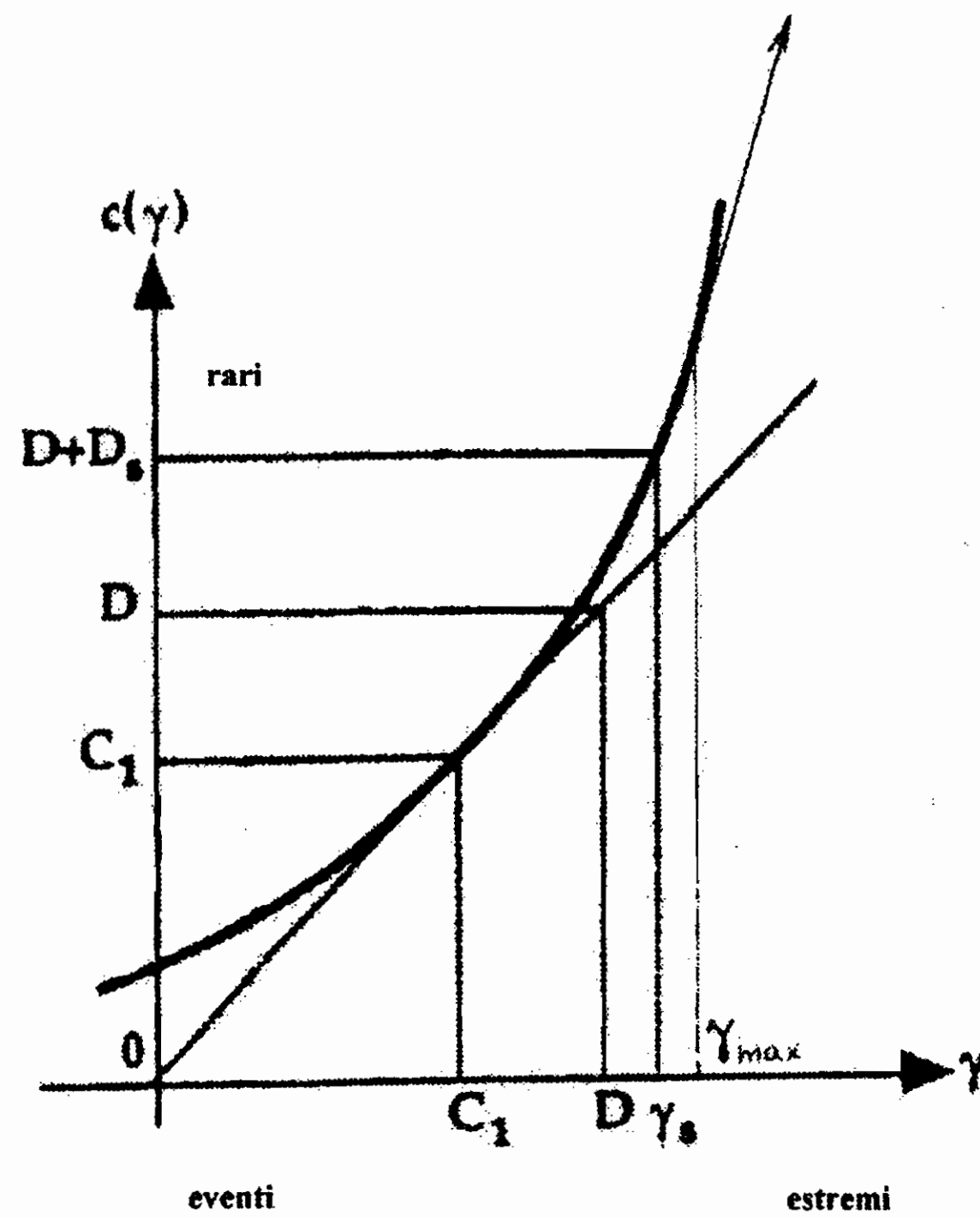


Figura 7.3: Comportamento qualitativo della codimensione  $c(\gamma)$  al variare dell'ordine di singolarità  $\gamma$ .

(ed eventualmente anche  $D = E$ ):

$$D(\gamma) = D - c(\gamma).$$

Una sola realizzazione (un evento) di dimensione  $D$  può esplorare soltanto singolarità  $\gamma$  con  $D(\gamma) > 0$  e quindi anche con  $c(\gamma) < D$ . Queste singolarità, di codimensione minore delle dimensioni dello spazio di immersione si chiamano *calme*. Strutture casuali con  $D(\gamma) < 0$ , ovvero con  $c(\gamma) > D$ , dette *singolarità selvagge*, non sono raggiungibili con una sola realizzazione.

È allora lecito porsi la domanda di quale singolarità  $\gamma_s$  si possa raggiungere con un campione di  $N_s$  realizzazioni (come indicato qualitativamente nella figura 7.1 da una serie di “piani paralleli” rappresentanti ciascuno una realizzazione del fenomeno che avviene nello spazio fisico o geometrico).

Il massimo ordine di singolarità si ottiene stimando la probabilità massima  $Pr(\epsilon_\lambda \equiv \lambda^{\gamma_s})$ . Ciò avviene se “tutte le  $N_s$  realizzazioni” cadono in un solo intervallo “a risoluzione  $\lambda$ ”. Per questo, la probabilità è per definizione uguale a 1. Pertanto, l’unità è il prodotto di  $Pr(\epsilon_\lambda \equiv \lambda^{\gamma_s})$  per il numero delle realizzazioni  $N_s$ , per il “volume”  $\lambda^D$  dell’intervallino (nel quale tutte le realizzazioni cadono) nello spazio di immersione di dimensione  $D \leq E$ , a risoluzione  $\lambda$  (il volume di definizione è, per esempio, nello spazio fisico di dimensione  $E$ ). Si ha cioè:

$$1 = Pr(\epsilon_\lambda \equiv \lambda^{\gamma_s}) \cdot N_s \cdot \lambda^D.$$

Per la (7.15) è:

$$Pr(\epsilon_\lambda \geq \lambda^\gamma) \approx \lambda^{-c(\gamma)}$$

per cui:

$$1 = N_s \cdot \lambda^D \cdot \lambda^{-c(\gamma_s)}.$$

Possiamo pertanto definire per comodità:

$$N_s = \lambda^{D_s} \tag{7.24}$$

e chiamare  $D_s$  *sample dimension*, dimensione del campione, verificando immediatamente che la definizione è appropriata in quanto risulta:

$$D_s = \frac{\log N_s}{\log \lambda} \tag{7.25}$$

che è formalmente identica alla (1.8) di Cap. 2.

Si può quindi scrivere:

$$1 = \lambda^{D_s + D - c(\gamma_s)} \quad ; \quad D_s + D - c(\gamma_s) = 0$$

da cui si ricava immediatamente:

$$c(\gamma_s) = D + D_s \tag{7.26}$$

(questo valore è riportato nella figura 7.3) con il che si è mostrato come un campione di  $N_s$  realizzazioni stocasticamente indipendenti permette

di eccedere le dimensioni topologiche  $E$  dello spazio euclideo nel quale è definito lo spazio di supporto del fenomeno. Questa possibilità è assolutamente inibita per i frattali geometrici per loro stessa natura e definizione. Riprendiamo la proprietà 2) del  $S$  precedente  $C_1 < D < E$ . Nella fig. 7.3 è stato indicato un punto  $x(D,D)$  sulla tangente a  $c(\gamma)$  nel punto  $C_1$ , con  $\gamma > C_1$ . Ora, se il valore della singolarità  $\gamma_s$  del campione statistico analizzato è  $\gamma_s > D$ , il valore di  $c(\gamma) = D + D_s$  eccede la dimensione frattale dello spazio di supporto ed anche, eventualmente, la dimensione  $E$  dello spazio di immersione.

Nella figura 7.3 si possono quindi localizzare gli eventi “estremi” o “eccezionali”, sull’asse delle ascisse, a grandi valori di  $\gamma$ , mentre gli eventi “rari” trovano collocazione sull’asse delle ordinate a grandi valori di  $c(\gamma)$ . Noi possiamo riempire lo spazio delle probabilità con un numero arbitrario  $N_s$  di realizzazioni indipendenti.  $N_s$ , ad esempio, è il *campione statistico* di eventi di un certo tipo che rappresenta una popolazione infinita non accessibile ad una analisi dei dati.

## 7.8 Scaling dei momenti statistici

Dalla relazione (7.15) è possibile costruire e calcolare il momento statistico  $\overline{\epsilon_\lambda^q}$  di ordine  $q$  del campo  $\epsilon_\lambda$ <sup>9</sup>:

$$\begin{aligned}\overline{\epsilon_\lambda^q} &= \int \epsilon_\lambda^q dPr = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{q\gamma} \lambda^{-c(\gamma)} d\gamma \\ &= \int e^{-\log \lambda [q\gamma - c(\gamma)]} d\gamma\end{aligned}\tag{7.27}$$

(qui abbiamo indicato semplicemente con  $dPr$  il differenziale  $\rho(\epsilon_\lambda)d\epsilon_\lambda$  con  $\rho(\epsilon_\lambda)$  densità di probabilità del campo).

Esiste un metodo di integrazione detto *metodo del valico*[43] che permette di approssimare l’integrale “per  $\lambda$  sufficientemente grande” con la espressione:  $\lambda^{\max_\gamma [q\gamma - c(\gamma)]}$ , cioè:

$$\overline{\epsilon_\lambda^q} = \lambda^{\max_\gamma [q\gamma - c(\gamma)]}.\tag{7.28}$$

<sup>9</sup>si veda il Cap. 8, II parte, interamente dedicato a richiami di statistica

Ponendo:

$$K(q) = \max_{\gamma} [q\gamma - c(\gamma)] \quad (7.29)$$

si può scrivere la legge di scaling dei momenti statistici come:

$$\overline{\epsilon_{\lambda}^q} = \lambda^{K(q)} \quad ; \quad \text{per } \lambda \text{ grande.} \quad (7.30)$$

Questa relazione permette di affermare empiricamente che anche i momenti statistici di qualsiasi ordine  $q$  scalano secondo una funzione  $K(q)$  che prende il nome di **funzione di scaling dei momenti**.

Esiste un teorema matematico[44] dovuto a Legendre grazie al quale, data una funzione  $J(x)$  e posto  $p = \frac{dJ(x)}{dx}$ , è possibile trovare una funzione  $\Psi = \Psi(p)$ , trasformata di Legendre della prima, che è equivalente a  $J(x)$ , nel senso che la stessa operazione  $J \rightarrow \Psi$  può essere applicata a  $\Psi = \Psi(p)$  per riprodurre  $J(x)$ . La (7.29) ci dice pertanto che  $K(q)$  è la trasformata di Legendre della funzione codimensione  $c(\gamma)$ , dal che discende immediatamente, poichè la trasformazione di Legendre si può invertire:

$$c(\gamma) = \max_q [q\gamma - K(q)]. \quad (7.31)$$

Esiste pertanto una corrispondenza biunivoca tra l'ordine delle singolarità  $\gamma$  e l'ordine dei momenti  $q$ .

Nel §7.9 commenteremo sul significato delle trasformazioni di Legendre.

Possiamo ora finalmente discutere la proprietà della  $c(\gamma)$  lasciata in sospenso nel §7.6.

Chiamiamo  $\gamma_q$  il valore di  $\gamma$  che massimizza rispetto a  $\gamma$  la funzione:

$$f(q, \gamma) = q\gamma - c(\gamma). \quad (7.32)$$

Deve essere:

$$f'(q, \gamma_q) = \left[ \frac{df}{d\gamma} \right]_{\gamma_q} = 0 = q - c'(\gamma_q)$$

da cui segue:

$$q = c'(\gamma_q) = \frac{dc(\gamma)}{d\gamma}. \quad (7.33)$$

Analogamente chiamiamo  $q_\gamma$  il valore di  $q$  che massimizza rispetto a  $q$  la funzione:

$$g(q, \gamma) = q\gamma - K(q) \quad (7.34)$$

trasformata di Legendre della eq. (7.32). Risulta analogamente:

$$g'(q_\gamma, \gamma) = \left[ \frac{dg}{dq} \right]_{q_\gamma} = 0 = \gamma - K'(q_\gamma)$$

da cui segue:

$$\gamma = K'(q_\gamma) = \frac{dK(q)}{dq}. \quad (7.35)$$

Abbiamo inoltre visto, per la seconda proprietà studiata nel paragrafo precedente, che  $c(\gamma_1) = \gamma_1$ , per cui  $C'_1 = c'(\gamma_1) = 1$ .

Quindi  $c(\gamma)$  è tangente alla bisettrice  $c(\gamma) = \gamma$ . In fig. 7.3 abbiamo riportato la bisettrice tangente alla curva  $c(\gamma)$  nel punto  $(C_1, C_1)$ .

## 7.9 Proprietà della funzione $K(q)$

Studiamo ora, parallelamente, le proprietà della funzione di scaling dei momenti  $K(q)$ .

- Anche  $K(q)$  stabilisce una relazione di *scaling multiplo* per i momenti statistici. È immediato che  $K(0) = 0$ . Poiché abbiamo assunto per comodità  $\bar{\epsilon} = 1$ , anche  $K(1) = 0$ .
- Quando, come nel modello  $\alpha$ , le singularità sono limitate, esiste un valore  $\gamma_{max}$  per cui  $\gamma < \gamma_{max}$ . Quindi, poichè, per la (7.33)  $q = c'(\gamma_q)$ , si ha anche che esiste  $q_{max} = c'(\gamma_{max})$  tale per cui  $K(q)$  diventa lineare in  $q$  per  $q > q_{max}$  come mostrato qualitativamente nella fig. 7.4:

$$K(q) = q\gamma_{max} - c(\gamma_{max}); \quad \text{per } q > q_{max}$$

- La funzione  $K(q)$  è una funzione convessa. Basta dimostrare che la derivata seconda di  $K(q)$  fatta rispetto a  $q$  è positiva. Derivando

la (7.30)  $\overline{\epsilon_\lambda^q} = \lambda^{K(q)}$ , segue immediatamente:

$$\frac{dK(q)}{dq} = \frac{1}{\log \lambda} \frac{d}{dq} \overline{(\epsilon_\lambda^q)} \quad (7.36)$$

e anche:

$$\frac{d^2K(q)}{dq^2} = \frac{1}{\log \lambda \overline{(\epsilon_\lambda^q)}} \left[ \frac{d^2(\overline{\epsilon_\lambda^q})}{dq^2} - \left( \log \lambda \frac{dK(q)}{dq} \right)^2 \overline{(\epsilon_\lambda^q)} \right]. \quad (7.37)$$

Ora la derivata prima di  $\overline{\epsilon_\lambda^q}$  è:

$$\frac{d(\overline{\epsilon_\lambda^q})}{dq} = \overline{(\epsilon_\lambda^q \log \epsilon_\lambda)}$$

per cui si ha:

$$\frac{d^2K(q)}{dq^2} = \frac{1}{\log \lambda} \left[ \frac{\overline{(\epsilon_\lambda^q)(\epsilon_\lambda^q \log^2 \epsilon_\lambda)} - \overline{(\epsilon_\lambda^q \log \epsilon_\lambda)}^2}{\overline{(\epsilon_\lambda^q)}^2} \right]. \quad (7.38)$$

Dalla diseuguaglianza di Schwartz:

$$\int f^2(x)dx \cdot \int g^2(x)dx \geq \left( \int f(x)g(x)dx \right)^2$$

segue che, nella (7.38):

$$\overline{(\epsilon_\lambda^q)(\epsilon_\lambda^q \log^2 \epsilon_\lambda)} \geq \overline{(\epsilon_\lambda^q \log \epsilon_\lambda)}^2.$$

Pertanto, poichè anche  $\log \lambda$  è positivo,  $\frac{d^2K(q)}{dq^2} \geq 0$ .

Dalla convessità di  $K(q)$  segue facilmente anche la convessità di  $c(\gamma)$ . Infatti, possiamo ricordare che, la (7.33) ci dice che:  $\frac{dc(\gamma)}{d\gamma} = q$  e la (7.35) dice che  $\frac{dK(q)}{dq} = \gamma$ ; quindi:

$$\frac{d^2c(\gamma)}{d\gamma^2} = \frac{d}{d\gamma} \frac{dc(\gamma)}{d\gamma} = \frac{dq}{d\gamma} = \frac{dq}{d \left[ \frac{dK(q)}{dq} \right]} \geq 0 \quad (7.39)$$

in quanto  $d \left[ \frac{dK(q)}{dq} \right] = \frac{d^2K(q)}{dq^2} dq$ .

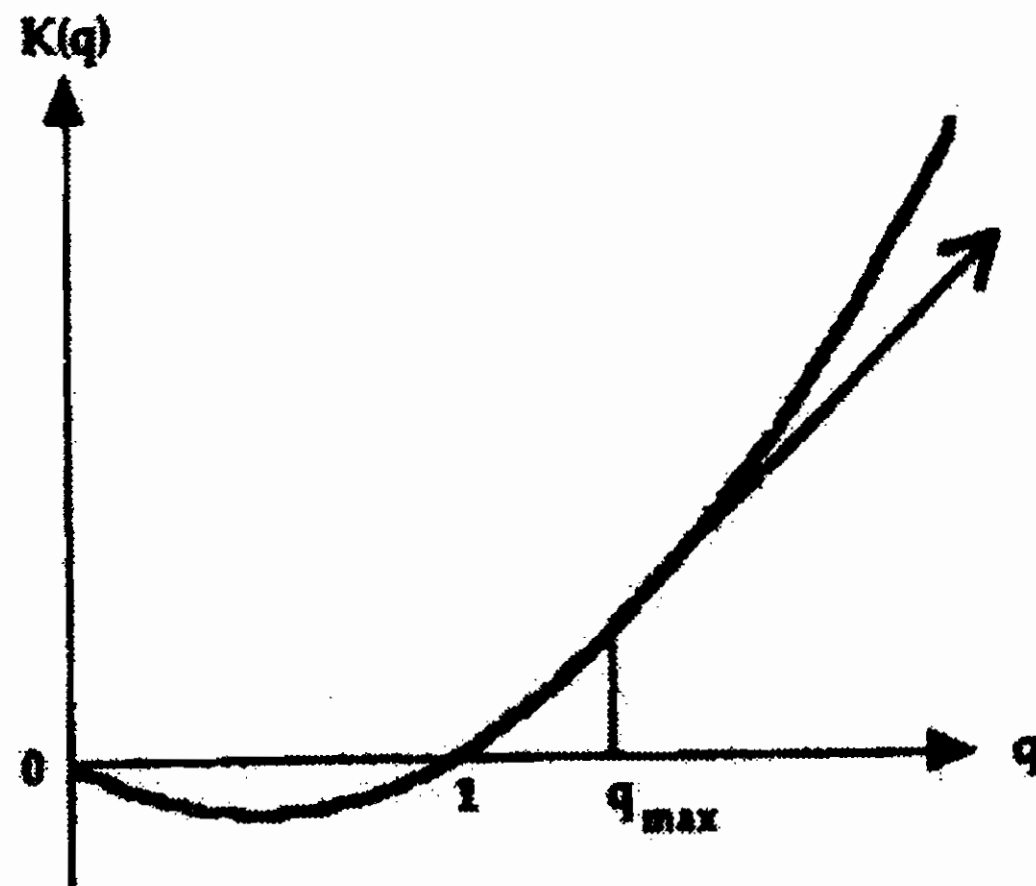


Figura 7.4: Comportamento qualitativo della funzione di scaling dei momenti  $K(q)$  al variare dell'ordine  $q$  del momento statistico.

La figura 7.4 illustra le proprietà più elementari di  $K(q)$ . Al fine di comprendere meglio le proprietà appena descritte, conviene illustrare il significato delle trasformazioni di Legendre (7.32) e (7.34), aiutandoci con le fig. 7.5a) e b).

Mentre la figura 7.4a illustra i due punti  $K(0)=K(1)=0$  ed indica qualitativamente la posizione di un  $q_{max}$ , le fig. 7.5a e b, indicano il significato geometrico delle trasformazioni di Legendre. L'eq. (7.32) “ricerca” la massima differenza (distanza verticale) tra la retta  $c^*(\gamma) = q\gamma$  e la funzione  $c(\gamma)$  disegnate in fig. 7.5a, mentre la (7.34) “ricerca” la massima differenza (distanza verticale) tra la retta  $K^*(q) = q\gamma$  e la funzione  $K(q)$  disegnate nella figura 7.5b. Si noti che la pendenza della retta di fig. 7.5a fornisce l'ordine  $q$  del momento statistico, mentre la pendenza della retta di fig. 7.5b fornisce l'ordine di singolarità.

Facciamo ora una ulteriore considerazione che verrà ripresa nei capitoli successivi: ricordiamo la (7.26) di §7, che ci permette di ricavare, mediante la fig. 7.3, il massimo ordine di singolarità  $\gamma_s$  (singolarità del campione) per il quale  $c(\gamma_s) = D + D_s$ . Grazie a questa, siamo in grado di calcolare anche il massimo ordine del momento raggiungibile con un insieme di  $N_s$  eventi utilizzando la relazione (7.33)  $q_s = c'(\gamma_{q_s})$ .



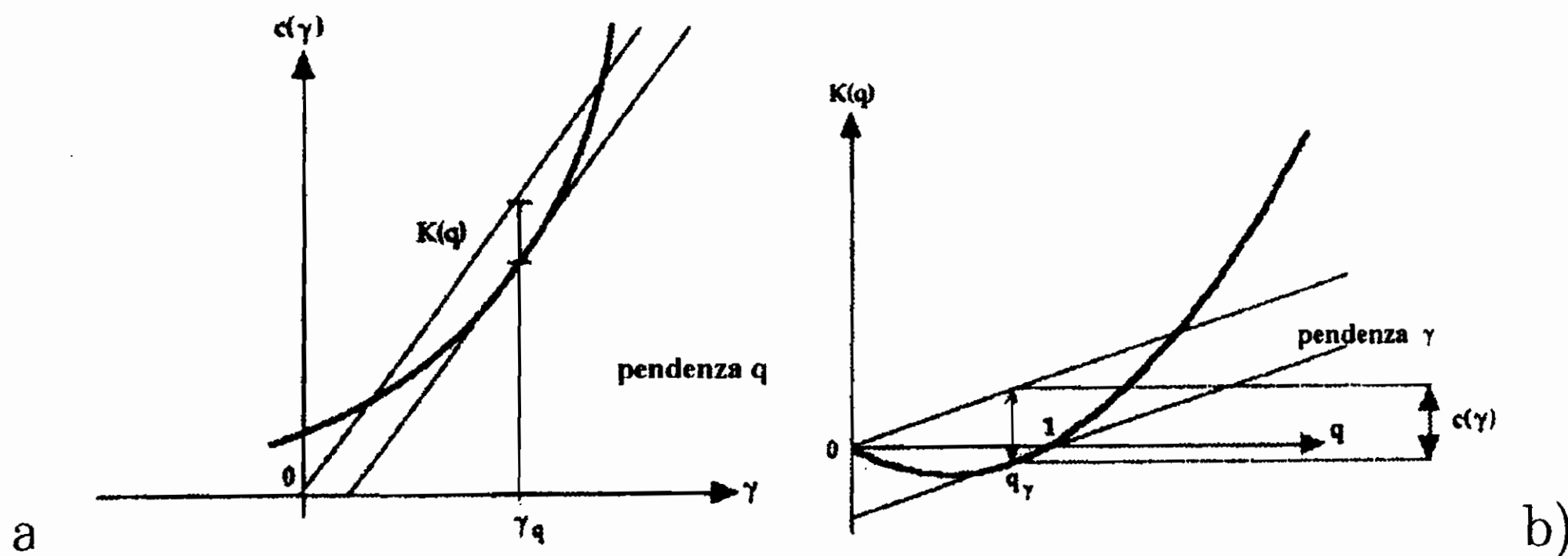


Figura 7.5: Illustrazione della trasformazione di Legendre: a)- della funzione  $c(\gamma)$  per il calcolo della funzione  $K(q)$ ; b) della funzione  $K(q)$  per il calcolo della funzione  $c(\gamma)$ .

Dal momento che il massimo valore di  $\gamma_s$  dipende dalla estensione del campione  $N_s$ , un calcolo di  $\gamma_s$  fornisce una stima del massimo ordine  $q_s$ . Questo rende conto solamente dell'effetto dell'insieme limitato, ma non è sufficiente. Per capire appieno il ruolo giocato dai momenti statistici nell'analisi multifrattale occorre discutere (e lo si farà nel §11 di questo Capitolo) di come l'integrazione, eseguita ad una risoluzione finita  $\lambda$ , sia influenzata dalle fluttuazioni *selvagge* che possono accadere a risoluzioni più fini non raggiungibili in una analisi. Esse determinano la divergenza dei momenti statistici di larga scala poichè sono troppo violente per essere eliminate dal processo di integrazione. Un semplice esempio chiarisce questo aspetto particolare: la produzione multipla di particelle elementari in collisioni tra quarks di altissima energia, avviene in tempi dell'ordine di  $\simeq 10^{-23}$  secondi ed a distanze ben inferiori al fermi ( $10^{-15}$  m). Nessun esperimento è in grado nemmeno lontanamente di avvicinare risoluzioni spaziali di tale entità in quanto le risoluzioni spaziali non possono direttamente scendere -seppure molto ottimisticamente- al di sotto del decimo di micron, ovvero di  $10^{-7}$  m.

È particolarmente importante sottolineare che le proprietà statistiche di un campo multifrattale, ad una risoluzione finita  $\lambda$ , o equivalentemente il comportamento di  $c(\gamma)$  o  $K(q)$ , dipende in modo molto critico dal *modo* con cui il campo è stato generato.

## 7.10 La codimensione duale dei momenti

Una funzione molto utile per la trattazione dei campi multifrattali si chiama *codimensione duale* dei momenti statistici  $C(q)$  ed è definita per comodità come:

$$C(q) = \frac{K(q)}{q-1}. \quad (7.40)$$

Sappiamo che  $K(0) = K(1) = 0$ ; pertanto se  $(q-1)$  è la coordinata ordine dei momenti “dopo il primo”, essa parte nella zona sicuramente positiva dei momenti (si veda la fig. 7.4. Per definizione quindi (si veda ancora la fig. 7.4),  $C(q)$  è la pendenza media di  $K(q)$  nel tratto  $(q-1)$ .

A causa della convessità della funzione  $K(q)$  quindi,  $C(q)$  è una funzione sempre crescente di  $q$ . Se eseguiamo il limite per  $q \rightarrow 1$  di  $C(q)$ , tenendo presenti le (7.35) e (7.16) otteniamo:

$$\lim_{q \rightarrow 1} C(q) = C(1) = K'(1) = \gamma_1 = C_1.$$

La relazione (7.40) è molto usata nelle applicazioni pratiche.

## 7.11 Prima classificazione di Multifrattali

La considerazione dei multifrattali stocastici generati mediante cascate moltiplicative del tipo del modello  $\alpha$  ci permettono di giungere ad una loro prima classificazione

È chiaro che anche la semplice scelta di una cascata moltiplicativa binaria con due *pesi statistici*  $\mu_1$  e  $\mu_2$  tali che  $\mu_1 + \mu_2 = 1$  permette di raggiungere situazioni diverse, dopo  $n$  applicazioni della cascata binaria, in dipendenza delle *modalità* con cui i pesi vengono assegnati.

Dato  $\epsilon$ , definito sul supporto  $\Delta$ :

- se le operazioni di attribuzione si effettuano *deterministicamente*, sempre nello stesso ordine (il primo sotto-insieme che cresce crescerà sempre, ad esempio), si costruisce un *frattale geometrico*;

- se si sceglie a caso l'ordine con cui vengono usati i due pesi  $\mu_1$  e  $\mu_2$  (o  $\gamma^+$  e  $\gamma^-$  usati nel §4) ed entrambi i pesi sono utilizzati a ciascun passo (se cioè si sceglie una qualsiasi “permutazione” dei pesi), il multifrattale che si ottiene si dice *microcanonico* (nel senso che, a ciascun passo si conserva la probabilità  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ ) perché il campo medio è conservato ad ogni passo della cascata;
- se i due pesi vengono scelti del tutto indipendentemente, estraendo a caso ciascuno di essi dall'insieme  $\{\mu_1, \mu_2\}$ , così rendendo possibili più volte combinazioni  $(\mu_1\mu_1)$  e  $(\mu_2\mu_2)$  -come abbiamo fatto nel §4- il multifrattale che si ottiene si dice *canonico* in quanto il campo  $\epsilon$  è conservato in media;
- si possono addirittura inventare scelte nelle quali il campo  $\epsilon$  non è per nulla conservato (o meglio è conservato in modo molto approssimativo), nel qual caso il multifrattale si dice *macrocanonico* o *gran-canonico*.

In questo contesto i multifrattali geometrici, i quali “ripetono esattamente” uno schema, vengono detti *locali*. Sono stati introdotti da Parisi e Frisch[45] senza fare alcun riferimento a modelli a cascata. Essi sono sostanzialmente delle *funzioni matematiche* anche se non sempre ortodosse.

I multifrattali stocastici, microcanonici e/o canonici, al contrario, non sono funzioni bensì *densità di misure*. La misura del campo frattale  $\epsilon_{\lambda_n}$  effettuata a risoluzione  $\lambda_n$  su una qualsiasi porzione del suo supporto, non ammette un limite definito; essa è soggetta ad un percorso aleatorio che ne impedisce la convergenza (delocalizzazione). La distinzione tra carattere microcanonico e canonico che può assumere un multifrattale stocastico risulta chiara se pensata in termini del campo nell'intervallo  $\delta_n = \frac{\Delta}{\lambda_n}$ , all'ennesimo passo di una cascata moltiplicativa.

Chiamiamo *contenuto  $\epsilon\delta$  del campo* il prodotto del valore del campo ( $\epsilon$ ) per l'ampiezza ( $\delta$ ) dell'intervallo cui esso appartiene e consideriamo cosa accade al *contenuto del campo* dell'intervallo  $\delta$  quando quest'ultimo

viene suddiviso in sotto-intervalli e, contemporaneamente, il campo viene moltiplicato per un fattore peso (come fatto nella costruzione della cascata moltiplicativa):

1)- nel caso geometrico il contenuto viene semplicemente suddiviso tra i sotto-intervalli in cui  $\delta$  viene suddiviso. La ripartizione segue sempre *esattamente* lo stesso ordine. La somma dei contenuti dei sotto-intervalli è uguale al contenuto dell'intervallo iniziale:

$$\sum_i \epsilon_i \delta_i = \epsilon \delta; \quad (7.41)$$

2)- nel caso microcanonico, il contenuto viene ancora ripartito tra i sotto-intervalli in cui  $\delta$  viene suddiviso, ma ora la ripartizione segue un ordine casuale (legato alle due probabilità  $\mu_1$  e  $\mu_2$  nel caso della cascata binaria). La somma dei contenuti dei sotto-intervalli è uguale al contenuto dell'intervallo iniziale come in eq. (7.41);

3)- nel caso canonico, al contrario, sommando i contenuti dei sotto-intervalli -contenuti che sono stati generati indipendentemente- si possono ottenere valori maggiori o minori del contenuto dell'intervallo iniziale:

$$\sum_i \epsilon_i \delta_i > \epsilon \delta \quad \text{o} \quad \sum_i \epsilon_i \delta_i < \epsilon \delta. \quad (7.42)$$

Infatti nel caso canonico il contenuto di un intervallo si conserva "soltanto" sulla media delle realizzazioni effettuate (*ensemble average*)<sup>10</sup>.

La nomenclatura usata nel presente Capitolo viene ampiamente mutuata dalla Meccanica Statistica. Dato un sistema di  $n$  particelle microscopiche e che possenga una energia totale  $E = \sum_{i=1}^n E_i$ , è proprio della Meccanica Statistica considerare tre condizioni di conservazione: microcanonica, canonica e macrocanonica (o gran-canonica).

Nel caso *microcanonico* ciascun elemento dell'insieme statistico che costituisce il sistema conserva strettamente l'energia; in più, il numero

---

<sup>10</sup>La somma dei contenuti dei sotto-intervalli di un intervallo è un primo esempio di una quantità che verrà illustrata più avanti: il *flusso* del campo attraverso l'intervallo  $\delta$

delle particelle è rigorosamente conservato. Con il che il sistema fisico è isolato, completamente chiuso. Una condizione molto restrittiva.

Nel caso *canonico*, il numero delle particelle del sistema viene conservato ma il sistema, nelle diverse realizzazioni stocastiche, può scambiare energia con l'esterno (cederne una parte in una realizzazione, acquistarne una parte in un'altra realizzazione successiva) per cui la energia risulta conservata in media nell'insieme delle realizzazioni.

Nel caso *gran-canonico* o *macrocanonico* un sistema fisico può scambiare con l'esterno, in ogni singola realizzazione, sia un certo numero di particelle, sia una certa quantità di energia. Con il che, il numero di particelle del sistema è conservato *in media* e l'energia è conservata *in media* sull'insieme di tutte le realizzazioni.

La situazione è schematicamente illustrata nelle fig. 7.6a) e fig. 7.6b).

Sulla base di queste motivazioni la terminologia della Meccanica Statistica è stata mutuata dalla trattazione dei multifrattali stocastici per etichettare i diversi tipi di cascate moltiplicative.

Chiamiamo  $\mu_i$  i pesi usati nel §3 e sia  $D < E$ :

- sono chiamate cascate *microcanoniche* quelle per le quali esiste una esatta conservazione (ad ogni passo) del flusso  $\epsilon_n \delta_n$  e per le quali:

$$\sum_{i=1}^{\lambda^D} \mu_i = \lambda^D;$$

- sono chiamate cascate *canoniche* quelle per le quali il flusso si conserva *globalmente* come *ensemble average* del flusso  $\epsilon_n \delta_n$  e per le quali:

$$\overline{\sum_{i=1}^{\lambda^D} \mu_i} = \lambda^D;$$

- sono chiamate cascate *macrocanoniche* o *gran-canoniche* quelle per le quali la conservazione è globale, *non* su un fissato sottoinsieme del supporto, ma su un sottoinsieme "medio". Nel caso canonico lo *ensemble average* del flusso è conservato per ogni sottoinsieme  $\delta \in \Delta$ ; nel caso macrocanonico la *ensemble average* del flusso è conservato per un sottoinsieme  $\delta$  medio.

## 7.12 Proprietà bare e dressed: il flusso

Se si esamina, ad una scala finita  $\lambda_k$  (con  $\lambda < \infty$ ) un campo (fenomeno) multifrattale prodotto da un processo a cascata, sviluppata completamente, cioè fino a  $\lambda \rightarrow \infty$ , si è costretti ad *integrare* il campo su sottoinsiemi dello spazio di supporto che hanno una dimensione finita. Questa operazione (chiamata in fisica *resummation*) consiste infatti nello aggregare in un tutt'uno i contributi di tutti gli intervallini  $\delta = \frac{1}{\lambda}$ , fino a che si conta il contributo del campo all'intervallo  $\delta_k = \frac{1}{\lambda_k}$ , con  $\lambda_k < \lambda$ , quindi con  $\delta_k > \delta$ .

Ora, non è detto che i valori che si ottengono mediante questo processo di "risommazione" della cascata coincidano con i valori che si sarebbero ottenuti se la cascata fosse stata fermata al passo  $k$  di risoluzione  $\lambda_k$ . Infatti, ad ogni passo, variano in modo aleatorio i pesi statistici della cascata e ci si potrebbe trovare nella situazione nella quale *tutti i sottoinsiemi dell'insieme  $\lambda_k$*  vengano ad avere valori del campo sempre aumentati (o sempre diminuiti).

Nella terminologia dei multifrattali stocastici si definiscono le seguenti quantità (o si attribuiscono i seguenti aggettivi ai processi):

- *quantità bare* (pura): la quantità che è stata prodotta direttamente dalla cascata moltiplicativa, sia a risoluzione  $\lambda_k$  che a risoluzione  $\lambda \rightarrow \infty$ . Cioè la quantità, il campo, nudo e crudo: quello che è;

- *quantità dressed* (vestita): ogni quantità che è stata ottenuta integrando ad una risoluzione finita  $\lambda_k$  il campo completamente sviluppato dalla cascata (fino a  $\lambda \rightarrow \infty$ );

- *quantità finitely dressed* (parzialmente vestite): ogni quantità ottenuta integrando ad una risoluzione finita  $\lambda_k$  il campo sviluppato fino ad una risoluzione  $\lambda' > \lambda_k$  più fine, seppure sempre finita.

I termini *bare* e *dressed* sono mutuati dalla terminologia della Teoria dei Campi (elettrone "nudo" ed elettrone "vestito") e sono giustificati dal fatto che, anche qui, le quantità *bare* trascurano le interazioni a piccola scala ( $< \lambda^{-1}$ ), mentre le quantità *dressed* ne tengono conto.

In definitiva, il comportamento delle quantità nude è condizionato

soltanto dagli incrementi moltiplicativi propri del processo a cascata, solo alle scale meno “fini” (o alle risoluzioni minori) rispetto a quelle alle quali viene analizzato il campo. Il comportamento delle quantità vestite –o parzialmente vestite– invece, è influenzato anche dallo sviluppo della cascata a risoluzioni più fini rispetto a quella alla quale il campo viene analizzato.

L’aver a che fare con quantità nude o vestite dipende allora in pratica dalla scelta della grandezza che si adotta per analizzare il campo multifrattale.

L’esempio tipico di grandezza vestita è il *flusso*  $\Phi$  del campo  $\epsilon$  attraverso un sottoinsieme  $A_\lambda$  dello spazio  $A$  di supporto  $D$ -dimensionale (ed anche il supporto potrebbe essere a sua volta frattale). Poniamo  $\lambda = \lambda_k$  per comodità e definiamo quindi:

$$\Phi_\infty(A_\lambda) = \Phi_D(A_\lambda) = \int_{A_\lambda} \epsilon_\lambda d^D x. \quad (7.43)$$

(Se ci rifacciamo alla fig. 7.1, lo spazio di supporto ha  $D = 2$ ,  $A$  è rappresentato dall’ellisse disegnata;  $d^D x = d^2 x$  è un quadratino; in  $A$  prendiamo -per esempio- un quadrato  $A_\lambda$  ed integriamo  $\epsilon$  nella direzione ortogonale, lungo l’asse delle probabilità, sull’area  $A_\lambda$ ).

La grandezza (7.43) è chiaramente influenzata dai valori che  $\epsilon$  ha assunto a scale  $\lambda \rightarrow \infty$  per cui è una quantità vestita per definizione.

È chiaramente possibile definire il flusso *parzialmente vestito* usando, per l’integrazione, i valori del campo  $\epsilon_{\lambda'}$  non sviluppato completamente, bensì soltanto fino ad una scala  $\lambda' > \lambda$  finita:

$$\Phi_{D,\lambda'/\lambda}(A_\lambda) = \int_{A_\lambda} \epsilon_{(\lambda')} d^D x.$$

## 7.13 I Trace Moments o momenti di traccia

Da quanto visto nel §7.12, il flusso del campo (vestito o parzialmente vestito), è una grandezza che si ricorda del campo  $\epsilon$  sviluppato a risoluzione più fina di quella adottata per osservare il campo.

Scriviamo il valore medio della  $q$ -esima potenza del flusso attraverso un sotto-insieme  $A'$  dello spazio  $A$  di supporto del campo  $\epsilon$ :

$$\overline{\Phi^q(A')} = \overline{\left[ \int_{A'} \epsilon d^D x \right]^q}. \quad (7.44)$$

Quando  $q \geq 1$  e  $D$  è intero, la (7.44) si scrive esplicitamente:

$$\overline{\left[ \int_{A'} \epsilon d^D x \right]^q} = \overline{\underbrace{\int_{A'} \int_{A'} \cdots \int_{A'} \epsilon(x_1) \epsilon(x_2) \cdots \epsilon(x_q) d^D x_1 \cdot d^D x_2 \cdots d^D x_q}_{q \text{ volte}}}. \quad (7.45)$$

Il fatto che  $\epsilon$  sia definito positivo suggerisce di introdurre il *trace moment* o *momento di traccia* definito prendendo  $x_1 = x_2 = \cdots = x_q$ , come flusso di  $\overline{\epsilon_\lambda^q}$  attraverso il sotto-insieme particolare  $A_\lambda$  di  $A$  costituito da “quadrantini” presi lungo la bisettrice dello spazio di supporto. Con ciò:

$$d^D x_1 \cdot d^D x_2 \cdots d^D x_q = d^{qD} x. \quad (7.46)$$

Il dominio di integrazione  $A_\lambda$  deriva dall'insieme  $A$  a risoluzione  $\lambda$  ed il momento di traccia è, per definizione:

$$TM_{A_\lambda}(\epsilon_\lambda^q) = \int_{A_\lambda} \overline{\epsilon_\lambda^q} d^{qD} x. \quad (7.47)$$

Se sostituiamo l'integrale con una sommatoria, a risoluzione  $\lambda$ , e teniamo presente che, per la (7.30),  $\overline{\epsilon_\lambda^q} = \lambda^{K(q)}$  e che la areolina di integrazione  $d^D x$ , alla risoluzione  $\lambda$ ,  $\lambda = \frac{1}{\delta}$ , diventa  $d^D x = \lambda^{-D}$  e quindi:

$$d^{qD} \rightarrow \delta^{qD} = \lambda^{-qD}$$

otteniamo:

$$TM_{A_\lambda}(\epsilon_\lambda^q) = \sum_{A_\lambda} \overline{\epsilon_\lambda^q} \delta^{qD} = \sum_{A_\lambda} \lambda^{K(q)} \lambda^{-qD}.$$

Per come è stato definito l'insieme di integrazione  $A_\lambda$ ,  $\sum_{A_\lambda}$  equivale a sommare  $\lambda^D$  addendi identici, per cui si ottiene:

$$TM_{A_\lambda}(\epsilon_\lambda^q) = \lambda^D \cdot \lambda^{K(q)} \cdot \lambda^{-qD} = \lambda^{K(q) - (q-1)D}. \quad (7.48)$$



La (7.48) mostra che i momenti di traccia scalano e che quindi possono a buon diritto essere usati per caratterizzare le proprietà del campo  $\epsilon$ .

I momenti di traccia sono definiti per  $q > 0$ . Se si considera che  $(\sum x^q)^{\frac{1}{q}}$  è una funzione decrescente di  $q$ , si può affermare che i momenti di traccia: • risultano *maggioranti* dei momenti statistici di ordine  $q$  se  $q > 1$ ; • risultano *minoranti* dei momenti statistici di ordine  $q$  se  $q < 1$ ; cioè:

$$TM(\epsilon_\lambda^q > \overline{\epsilon_\lambda^q}) \text{ per } q < 1;$$

$$TM(\epsilon_\lambda^q < \overline{\epsilon_\lambda^q}) \text{ per } q > 1.$$

## 7.14 Classificazione di fluttuazioni e di processi

La legge di scala dei momenti di traccia (7.48) è molto istruttiva in quanto ci permette di puntualizzare meglio la differenza tra grandezze *bare* e *dressed*. Analizziamo infatti il comportamento del termine di scala nella (7.48): esso diverge se  $K(q) \geq (q-1)D$ . Ricordiamo la definizione (7.40) della codimensione duale dei momenti:

$$C(q) = \frac{K(q)}{q-1}$$

e riscriviamo la (7.48) come:

$$TM_{A_\lambda}(\epsilon_\lambda^q) = \lambda^{(q-1)[C(q)-D]}. \quad (7.49)$$

Si vede immediatamente che i momenti di traccia *convergono* se  $C(q) > D$ , per  $q > 1$ , mentre *divergono* se  $C(q) < D$  per  $q < 1$ .

Ne consegue, per  $q > 1$ , che se divergono i momenti di traccia, a maggior ragione divergono i momenti statistici.

Si può pertanto definire un *valore critico*  $q_D$  mediante la equazione:

$$C(q_D) = D \quad (7.50)$$

per individuare i valori di  $q > q_D > 1$  per i quali i momenti statistici divergono.

Poichè  $K(q)$  cresce con  $q$  più che linearmente, per  $q > 1$  anche  $C(q)$  cresce con  $q$ . Pertanto anche  $q_D$  cresce con  $D$ , il che significa che maggiore è la dimensione dello spazio di supporto  $D$  e più alto è il numero di momenti statistici che *non* divergono.

Se la codimensione duale non ammette limite superiore, cioè se  $C(\infty) = +\infty$ , per quanto grande si prenda  $D$ , esiste sempre un valore  $q_D$  al di sopra del quale i momenti statistici divergono. I multifrattali stocastici che presentano questa caratteristica si chiamano *inconditionally hard*.

Se invece la codimensione duale ammette limite superiore  $C(\infty)$  finito, le divergenze avvengono solamente se  $D < C(\infty)$ . I multifrattali che presentano questa caratteristica si chiamano *conditionally hard*.

Se la codimensione duale ammette limite superiore  $C(\infty)$  finito ed è inoltre  $C(\infty) < D < \infty$ , non ci sono singolarità e tutti i momenti statistici convergono (se, beninteso,  $D > C(\infty)$ ). I multifrattali che presentano questa caratteristica si chiamano *conditionally soft*.

Infine, i multifrattali stocastici per i quali *non* si ha divergenza dei momenti statistici per alcun valore positivo di  $q$ , indipendentemente dalla dimensione  $D$  dello spazio di supporto, si chiamano *inconditionally soft*.

Per questi ultimi e per tutti i multifrattali stocastici, quando  $q < q_D$ , le grandezze *bare* e *dressed* coincidono tra loro.

Il modello  $\alpha$  che abbiamo illustrato nel §7.4.2 genera quindi un multifrattale *conditionally soft/hard*.

È chiaro che una grandezza (o un estimatore statistico) *bare* non è in grado di inferire se un processo è *hard*, cioè caratterizzato da momenti statistici che divergono per ordine maggiore di un dato valore  $q_D$ . È ora anche chiaro che l'origine della divergenza dei momenti statistici risiede nelle singolarità di ordine  $\gamma$  superiori alla dimensione (di Hausdorff e Besicovitch) dello spazio di definizione delle variabili dalle quali dipende il campo multifrattale stocastico  $\epsilon$ . Si arricchisce quindi il parco delle osservazioni sulle caratteristiche della funzione  $c(\gamma)$  che abbiamo studiato nel §7.6.

Riprendiamo allora la (7.50) che definisce l'ordine critico  $q_D$  dei momenti e ricordiamo quanto fatto nel §7.8, discutendo le relazioni che esitano tra  $c(\gamma)$  e  $K(q)$ ; in particolare le (7.33) e (7.35)

$$q = c'(\gamma_q) \quad ; \quad \gamma = K'(q_\gamma).$$

Se abbiamo definito  $q_D$ , possiamo anche definire:

$$\gamma_D = K'(q_D) = \left. \frac{dK(q)}{dq} \right]_{q_D} \quad (7.51)$$

che prende il nome di *ordine critico di singolarità*. Usando la codimensione duale (7.40) scritta come:

$$K(q) = C(q)(q - 1)$$

ed introdottala nella (7.51), si ottiene:

$$K'(q) = C(q) + (q - 1)C'(q).$$

Ma poichè, per la (7.50),  $C(q_D) = D$ , la (7.51) diventa:

$$\gamma_D = D + (q - 1)C'(q_D). \quad (7.52)$$

Nelle fig. 7.6a,b possiamo quindi riclassificare un processo multifrattale in funzione dei valori che può assumere l'ordine di singolarità  $\gamma$  o l'ordine dei momenti  $q$ . Nella fig. 7.6a viene ripresa la vecchia fig. 7.3. Il grado di singolarità  $\gamma^g$  dei multifrattali geometrici non può superare  $C_1 = \gamma_{max}^g$ . Quindi, qualsiasi punto della curva  $c(\gamma)$ , con  $\gamma \leq C_1$  e con  $c(\gamma) \leq C_1$  rappresenta frattali geometrici. Per il punto fisso  $\{C_1, C_1\}$  passa la bisettrice  $c(\gamma) = \gamma$  che è tangente a  $c(\gamma)$  in  $C_1$ .

Sull'asse delle ascisse è indicato il massimo valore di  $\gamma^m$  dei multifrattali microcanonici (per il quale  $c(\gamma) = D$ ); i punti della curva, con  $C_1 \leq \gamma \leq D$  rappresentano processi microcanonici soggetti a fluttuazioni *calme*.

Sull'asse delle ascisse è indicato il valore  $\gamma_D$  dato dalla (7.51) e dalla (7.52); i punti della curva, con  $D \leq \gamma \leq \gamma_D$  rappresentano

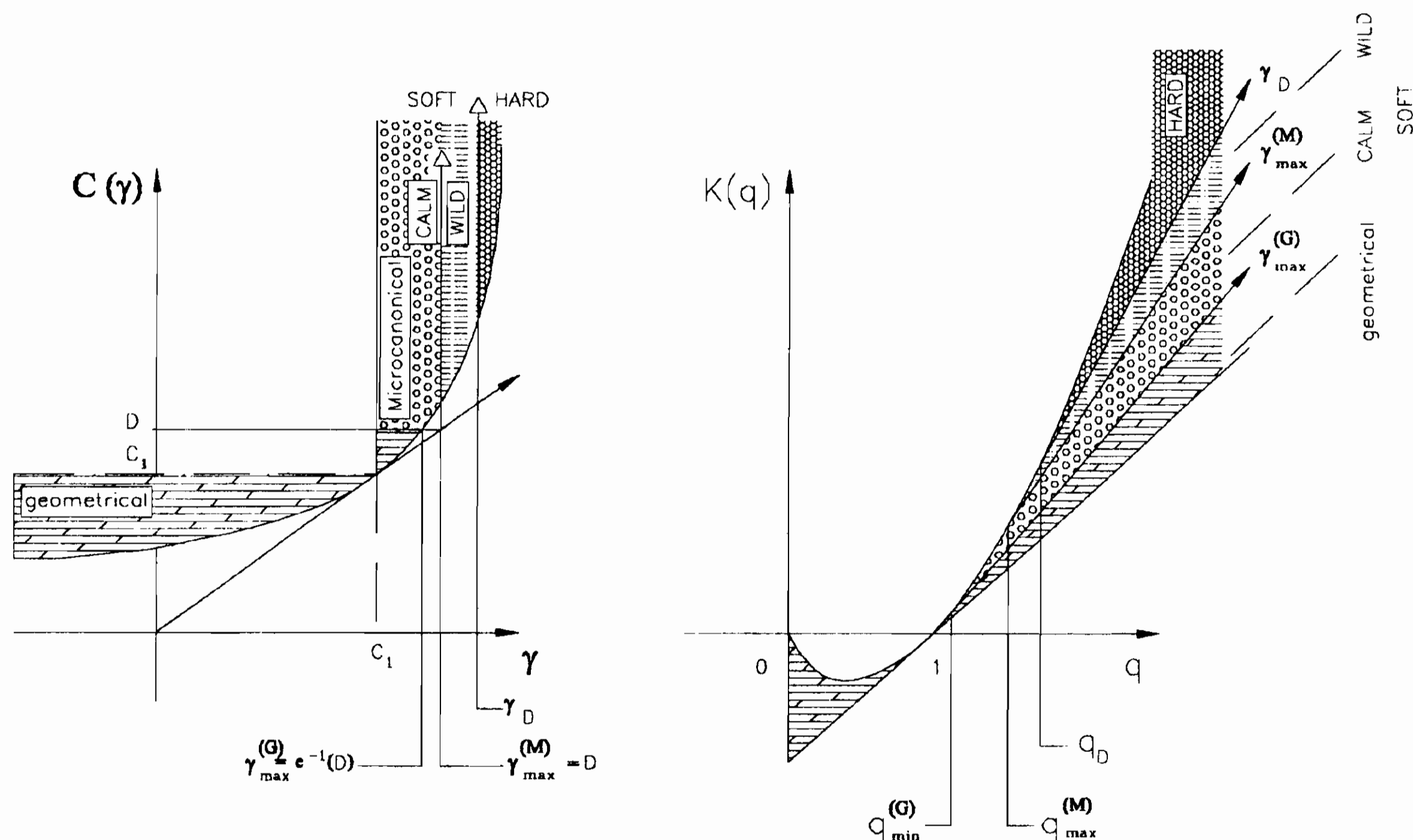


Figura 7.6: Riclassificazione in chiave statistica delle fluttuazioni e dei processi stocastici: a) a sinistra in funzione dei valori dell'ordine di singolarità  $\gamma$ ; b) a destra in funzione dei valori dell'ordine  $q$  dei momenti statistici.

processi microcanonici soggetti a fluttuazioni *selvagge*; i punti della curva, con  $\gamma < \gamma_D$  rappresentano processi *soft*, mentre quelli con  $\gamma > \gamma_D$  rappresentano processi *hard*.

Analogamente in fig. 7.6b riclassifichiamo gli stessi processi per i diversi valori di  $q$ . I valori limite sono dati dai valori massimi per i frattali geometrici  $q_{max}^g$ , per i processi microcanonici  $q_{max}^m$  e da  $q_D$  discusso or ora. Al di sopra di quei valori, la funzione  $K(q)$  diventa lineare in  $q$ . Il punto  $q = 1$  definisce il limite inferiore per i frattali geometrici. Per i processi soggetti a fluttuazioni *calme*  $K(q)$  segue la curva fino al punto  $q = q_{max}^g$  e poi aumenta lungo la tangente in  $q = q_{max}^g$ . Per i processi soggetti a fluttuazioni *selvagge*,  $K(q)$  segue la curva fino al punto  $q = q_{max}^m$ , poi aumenta lungo la tangente in  $q = q_{max}^m$ . Infine il punto  $\gamma_D$  definisce il limite a cominciare dal quale  $K(q)$  aumenta lungo la tangente per i processi *hard*. Per  $q < q_D$  i processi sono *soft*.

## 7.15 Modello $\alpha$ e momenti statistici

Avendo acquisito in questo capitolo la sostanziale equivalenza tra la conoscenza della distribuzione di probabilità e la conoscenza di tutti i momenti statistici dell'insieme stocastico in esame, è estremamente utile riformulare un *modello*  $\alpha$  in termini di momenti statistici.

Consideriamo pertanto il caso semplice monodimensionale di una funzione densità di probabilità  $\rho$  definita su un intervallo  $\Delta$  di una variabile fisica. Questa può essere: la densità di pioggia nel tempo, l'impulso di una particella, l'energia di un vortice, la velocità delle molecole dell'aria, ovvero la distribuzione di probabilità di qualsiasi variabile  $x$  definita in  $\Delta$  ( $x \in \Delta$ ).

Prendiamo l'intervallo  $\Delta$  e dividiamolo in  $n$  intervalli di ampiezza

$$\delta_n = \Delta/n;$$

chiamiamo  $w$  la variabile aleatoria di densità  $\rho$ , distribuita nell'intervallo  $\Delta$ . Siano infine  $\bar{w}$  il valor medio e  $\overline{w^2}$  la varianza,  $\overline{w^3}$  la skewness,  $\overline{w^4}$  la kurtosi ed in generale  $\overline{w^q}$  il momento statistico  $M_q$  di ordine  $q$ :

$$M_q = \overline{w^q} = \frac{1}{\Delta} \int_{\Delta} w^q dx \approx \frac{1}{\Delta} \sum w_i^q \delta_i.$$

Per comodità centriamo a 1 il valor medio :  $\bar{w} = 1$ .

Produciamo ora una “*cascata moltiplicativa*” aleatoria procedendo nel modo seguente:

- sia  $\rho(\delta)$  la densità di probabilità con cui  $w$  è distribuita nei diversi intervallini di ampiezza  $\delta$ ;
- dividiamo l'intervallo iniziale  $\Delta$  in  $n$  intervallini  $\delta_i$ ;
- moltiplichiamo la densità di ciascuno degli  $n$  intervallini per un valore  $w_i$  scelto a caso (attribuiamo cioè un peso  $w_i$  ad ogni  $\delta_i$ );
- ripetiamo  $\nu$  volte la operazione di suddivisione dell'intervallo  $\Delta$  e la moltiplicazione per un peso  $w_j$  scelto a caso. I pesi  $w_j$  ad ogni

passo  $\nu$  sono scelti a caso, pertanto in modo del tutto indipendente dalle scelte effettuate al passo  $\nu - 1$  precedente.

Al termine della procedura, l'intervallo iniziale  $\Delta$  risulta suddiviso in  $n^\nu$  intervallini, ciascuno di ampiezza  $\delta_\nu = \Delta/n^\nu$ . A questo intervallo viene attribuita, per costruzione, una densità:

$$\rho_{1,2,\dots,\nu}^{(1)}(\delta_\nu) = \rho(\Delta)w_1w_2\dots w_\nu \quad (7.53)$$

dove  $w_i$  è il *peso arbitrario* scelto nell' $i$ -esimo passo della cascata aleatoria. La (7.53) rappresenta il risultato di un *esperimento stocastico*.

Ripetiamo allora lo stesso esperimento un numero arbitrario  $k$  di volte, ottenendo  $\rho^{(2)}, \rho^{(3)}, \rho^{(4)}, \dots, \rho^{(k)}$  densità arbitrarie.

L'intervallino  $i$ -esimo ha associata una densità di probabilità ogni volta diversa, ma la densità media di probabilità è:

$$\overline{\rho_\nu(\delta_\nu)} = \overline{\rho(\Delta)w_1w_2\dots w_k}.$$

Se invece della densità (7.53) calcoliamo i momenti statistici  $M_q$  di ordine  $q$ , della medesima distribuzione di densità di probabilità modificata dalla cascata per i  $\nu$  esperimenti stocastici, otteniamo i momenti statistici:

$$M_q = \overline{\rho^q(\delta_\nu)} = \overline{\rho^q(\Delta)w_1^qw_2^q\dots w_i^q\dots w_\nu^q}. \quad (7.54)$$

Chiamiamo per semplicità  $\{w_\nu\}^q$  il prodotto  $w_1^qw_2^q\dots w_i^q\dots w_\nu^q$ . Poichè, come abbiamo detto, la scelta dei  $w_i$  è stata indipendente ad ogni passo, per costruzione, vale la proprietà di fattorizzazione per cui si può scrivere:

$$M_q = \overline{\rho^q(\delta_\nu)} = \overline{\rho_\nu^q(\Delta)} \overline{\{w^q\}^\nu}. \quad (7.55)$$

Nella statistica (cfr. Cap. A) i momenti statistici vengono spesso *normalizzati* alla potenza  $q$ -esima del valor medio:

$$\mathbf{M}_q = \frac{M_q}{\overline{w^q}} = \frac{\overline{\rho^q}}{\overline{\rho^q}}. \quad (7.56)$$

Nel nostro caso possiamo definire un indicatore statistico:

$$\mathbf{Z}_q = \frac{\overline{\rho_\nu^q(\delta_\nu)}}{\overline{\rho_\nu(\delta_\nu)}^q} = \frac{\overline{\rho_\nu(\Delta)}^q}{\overline{\rho_\nu(\Delta)}^q} \frac{\overline{\{w_\nu^q\}^\nu}}{\overline{\{w\}^{q\nu}}} \quad (7.57)$$

ovvero, con la nostra assunzione di comodità  $\bar{w} = 1$ , se anche la distribuzione di probabilità  $\rho(\Delta) = 1$ , si ottiene semplicemente:

$$\mathbf{Z}_q = \{w^q\}^\nu. \quad (7.58)$$

Liberandoci dalle assunzioni di comodo si può pertanto sempre scrivere:

$$\mathbf{Z}_q \simeq \{w^q\}^\nu. \quad (7.59)$$

Riscriviamo ora la (7.59) in funzione dell'ampiezza degli intervallini  $\delta_n$ , riscrivendo  $\{w^q\}^\nu$  come:

$$\{w^q\}^\nu = e^{\log\{w^q\}^\nu} = e^{\nu \log\{w^q\}}.$$

Applichiamo un artificio scrivendo:

$$\{w^q\}^\nu = e^{\nu \log\{w^q\} \frac{-\log n}{-\log n}} = e^{-\nu \log n \left[ \frac{\log\{w^q\}}{-\log n} \right]} = e^{(\log n)^{-\nu} \left[ -\frac{\log\{w^q\}}{\log n} \right]}. \quad (7.60)$$

Ora, usando la relazione tra  $\delta_\nu$ ,  $\Delta$  ed  $n$ , si può scrivere:

$$e^{(\log n)^{-\nu}} = \frac{1}{n^\nu} = \frac{\delta_\nu}{\Delta},$$

per cui:

$$\{w^q\}^\nu = \left( \frac{\delta_\nu}{\Delta} \right)^{-\frac{\log\{w^q\}}{\log n}}.$$

Ora, se poniamo:

$$\Phi_\nu^q = \frac{\log\{w^q\}}{\log n} \quad (7.61)$$

possiamo a buona ragione chiamare  $\Phi_\nu^q$  *esponente di intermittenza* e scrivere, in modo del tutto empirico, una **LEGGE DI SCALING DEI MOMENTI** come:

$$\{w^q\}^\nu \doteq \delta_\nu^{-\Phi_\nu^q} \quad (7.62)$$

ritrovando una dipendenza funzionale iperbolica che è ben nota.

La (7.62) descrive come variano i momenti statistici di ordine  $q$  nei processi di cascata aleatoria moltiplicativa del tipo del modello  $\alpha$ . Il

coefficiente di intermittenza dipende dal numero di volte  $\nu$  in cui abbiamo applicato la cascata aleatoria.

Tuttavia, per le applicazioni pratiche, abbiamo ancora un parametro che ci disturba: il parametro  $n$ . Per eliminarlo basta un artificio: introduciamo il momento del secondo ordine  $\Phi_2$ : cioè rinormalizziamoci alla varianza, momento di ordine 2.

Dalla (7.61) si ottiene facilmente:

$$\frac{\Phi_q}{\Phi_2} = \frac{\log \{w_q\}}{\log n} \frac{\log n}{\log \{w_2\}} = \frac{\log \{w_q\}}{\log \{w_2\}} \doteq \delta_\nu^{-\Phi_q}. \quad (7.63)$$

Nel prossimo Capitolo dovremo fare dei richiami essenziali di elementi di statistica che spesso non sono coperti nei corsi introduttivi, essenziali per poter introdurre, nel Capitolo 9, i Multifrattali Universali.

Con queste nozioni saremo finalmente pronti ad affrontare in modo abbastanza sistematico le applicazioni concrete che verranno svolte in una seconda parte del volume.



# Capitolo 8

## Multifrattali Universali

### 8.1 Introduzione

Gli unici vincoli che sono stati imposti a priori sulle funzioni  $c(\gamma)$  e  $K(q)$  del Cap. 7 sono quelli di essere funzioni monotone e di essere convesse. Per il resto queste due funzioni possono assumere infinite forme le quali possono -ovviamente- essere specificate solamente attraverso un numero infinito di parametri. Sarebbe chiaramente una notevole semplificazione se si riuscisse a scovare qualche proprietà universale condivisa dalle funzioni multifrattali.

La universalità è una peculiarità di alcune classi di sistemi dinamici (cfr. il Cap. 9) e di modelli matematici. Essa consiste concettualmente nel fatto che, sotto determinate condizioni, all'interno della ampia classe dei parametri (al limite infiniti) significativi, che in genere caratterizzano un modello, soltanto pochi possono essere considerati prevalenti o predominanti. I modelli a pochi parametri verso cui convergono i generici modelli, vengono detti *modelli con attrattori universali* (cfr. Cap. 9).

La riduzione del numero dei parametri avviene spesso quando si passa dai modelli ideali a più realistiche costruzioni soggette a perturbazioni e/o ad autointerazioni ripetitive.

Un esempio classico di universalità è quello che si presenta per un cammino casuale monodimensionale discreto, nel quale pertanto esiste un passo minimo non nullo. Tale cammino casuale può ovviamente dipendere da innumerevoli parametri: tanti quanti il modellista vuole introdurre in quanto non esistono limitazioni alla sua fantasia. Ciononostante, qualora *addensiamo* il cammino diminuendo il passo minimo, sotto ipotesi abbastanza deboli, il processo converge ad un semplice moto browniano, cioè il cammino gaussiano individuato soltanto dalla media e dalla varianza degli spostamenti (cfr. cap. 4).

Gli attrattori strani dei modelli additivi possono essere usati per calcolare gli attrattori strani dei processi moltiplicati (cfr. Cap. 9). Infatti moltiplicare due campi  $\epsilon_\lambda$  equivale (per una determinata scala) a sommare i loro due esponenti  $\gamma$ .

Tuttavia le questioni matematiche insite nella definizione dei multifrattali universali che verranno trattati nel presente capitolo, non sono affatto semplici per cui è utile anteporre alcuni ulteriori commenti generali sui multifrattali, oltre quelli già proposti nel Cap. 7.

E' ormai chiaro, da quanto discusso in quel capitolo, che per specificare in modo completo lo scaling multiplo di un arbitrario campo multifrattale è necessario conoscere un insieme infinito di parametri di scala: cioè conoscere *tutta* la funzione  $c(\gamma)$  o *tutta* la funzione  $K(q)$ .

Questo costituisce un grosso handicap sia dal punto di vista teorico che dal punto di vista sperimentale. Tuttavia è utile ripetere che, se una classe di fenomeni mostra alcune proprietà universali, allora il grandissimo numero di parametri può ridursi ad un numero ragionevolmente basso. Il punto di interesse diventa quindi quello di trovare una classe di multifrattali che esibiscano tali proprietà universali.

D. Schertzer e S. Lovejoy in un fondamentale lavoro[46], hanno dimostrato che, con una appropriata normalizzazione del prodotto di processi multifrattali indipendenti, il campo risultante mostra proprietà universali, indipendentemente dalla complessità dei singoli processi e dalle relazioni non lineari che possono intervenire tra di loro. In

questo caso *universalità* significa che le proprietà statistiche del sistema dipendono da un numero finito, e spesso piccolo, di parametri (come succede nella statistica classica con distribuzioni gaussiane in cui due parametri,  $\mu$  e  $\sigma$ , determinano in maniera completa la distribuzione). In altre parole, il calcolo di un numero limitato di parametri può completamente descrivere la statistica di un processo multifrattale.

La universalità è ottenuta ad un rapporto di scala fissato ( $\Lambda < \infty$ ) aumentando il numero di processi interagenti indipendenti ( $n \rightarrow \infty$ ).

Il contributo fondamentale di Schertzer e Lovejoy è consistito nella generalizzazione delle cascate discrete descritte nei §7.3, 7.4, 7.5 di Cap. 7, introducendo le cascate continue. Dal punto di vista pratico, le cascate continue aumentano la flessibilità delle simulazioni con calcolatore in quanto non soggette alle variazioni discrete del tipo di quelle usate nel Cap. 3. (e delle quali lo stesso Mandelbrot riconosce -nel suo articolo originale- i limiti), bensì beneficiano di una varietà continua di scale. Più precisamente, al posto di una sequenza di risoluzioni  $\lambda_n$  di Cap. 7 ricorrono ad una variazione continua di risoluzioni.

Il passaggio dalle cascate discrete a quelle continue avviene attraverso un procedimento di *addensamento* delle cascate discrete che permette di esprimere le funzioni fondamentali, cioè la funzione codimensione  $c(\gamma)$  definita nella (7.15) e la funzione di scaling dei momenti  $K(q)$  definita dalla (7.30) di Cap. 7, in una forma che dipende soltanto dal parametro  $\alpha$  di Lévy, definito nell'App. A e dalla codimensione del campo medio  $C_1$  definita dalla (7.16) di Cap. 7.

Schertzer e Lovejoy hanno mostrato nel loro lavoro che, anche partendo da cascate discrete, costruendo processi moltiplicativi con metodi detti di *non linear mixing*, si arriva a formulare i multifrattali universali.

Nel campo dei frattali geometrici, la generalizzazione a cascate continue è stata fatta da Grassberger[33], da Hentschel e Procaccia[27] e Hasley, Jensen, Kadanov, Procaccia e Shraiman[47] ma noi non ce ne occupiamo qui, rinviando il lettore agli articoli originali citati.

## 8.2 Multifrattali Universali Conservativi

Appare chiara la utilità di caratterizzare la statistica di un processo stocastico, sia esso multifrattale o meno, mediante pochi parametri. La semplificazione è indubbiamente notevole.

Il procedimento dettagliato per la costruzione di cascate stocastiche continue è molto complesso. Poichè tuttavia, il risultato che si ottiene finalmente è particolarmente semplice, riteniamo inopportuno -dal punto di vista dell' equilibrio costi/benefici- svolgere in dettaglio la costruzione delle cascate stocastiche continue. Ci limitiamo ad illustrare la strategia di fondo seguita dagli autori e ad illustrarne il risultato. Per fare ciò torna molto utile il concetto di funzione generatrice di una distribuzione di probabilità introdotto nell'App. A.

La strategia è quella di usare un generatore statistico soprattutto in grado di garantire la natura altamente *erratica* dei processi frattali che fanno capo a variabili aleatorie di tipo iperbolico, ovvero a campi  $\epsilon_\lambda$  che seguono leggi di probabilità di scala del tipo della (7.2) o della (7.4) di Cap. 7. La procedura è applicata quindi ai momenti statistici di un campo multifrattale.

Dato un campo stocastico -non negativo-  $\epsilon_\lambda$ , per il quale  $\bar{\epsilon}_\lambda = 1$ , esaminato a risoluzione  $\lambda$  e per il quale  $Pr(\epsilon_\lambda) = \lambda^{-c}$ , definiamo una funzione generatrice  $G_\lambda = \log \epsilon_\lambda$  così che sia:

$$\epsilon_\lambda = e^{G_\lambda}. \quad (8.1)$$

Si ottiene come conseguenza, per esempio, che:

$$\overline{\epsilon_\lambda^q} = \overline{e^{qG_\lambda}} = e^{K_\lambda(q)} \quad (8.2)$$

dove la funzione  $K_\lambda(q)$  è la seconda funzione caratteristica di Laplace di  $G_\lambda$ . Pertanto si può porre:

$$K_\lambda(q) = K(q) \log \lambda$$

e quindi:

$$\overline{\epsilon_\lambda^q} = e^{K_\lambda(q)} = e^{K(q) \log \lambda} = \lambda^{K(q)} \quad (8.3)$$

Se ora consideriamo il prodotto di due cascate indipendenti, alla risoluzione  $\lambda$ , cioè un campo  $\epsilon_\lambda^* = \epsilon_{1,\lambda}\epsilon_{2,\lambda}$ , il generatore di  $\epsilon_\lambda^*$  è:

$$G_\lambda^* = G_{1,\lambda} + G_{2,\lambda} \quad (8.4)$$

e quindi segue che:

$$K_\lambda^* = K_{1,\lambda} + K_{2,\lambda} \quad (8.5)$$

Cioè: *la seconda funzione generatrice di Laplace della somma di generatori indipendenti è uguale alla somma delle seconde funzioni generatrici di Laplace dei generatori.* La costruzione pertanto procede eseguendo un prodotto di  $n$  campi, analizzandoli a risoluzioni di pochissimo diverse tra loro. La struttura della cascata continua sviluppata nei lavori originali di Schertzer e Lovejoy, viene discussa in più riprese in diversi articoli cui rimandiamo per i dettagli[46]. La struttura della costruzione possiede le seguenti proprietà:

- la seconda funzione caratteristica di Laplace  $K_\lambda(q) = K(q)\log\lambda$  della generatrice  $G_\lambda$  diverge logicamente con la risoluzione;
- la generatrice  $G_\lambda$  rappresenta un *rumore aleatorio* a banda limitata all' intervallo  $1 \leq x \leq \lambda$ . Da ciò segue la sua regolarità anche per scale  $y < \lambda^{-1}$ ;
- per fluttuazioni positive  $G_\lambda > 0$ , la densità di probabilità  $\rho(\epsilon_\lambda)$  di  $G_\lambda$  deve annullarsi ad ogni passo abbastanza velocemente per  $\lambda$  grande, per garantire la convergenza di  $K(q)$  per  $q > 0$ . Infatti:

$$\lambda^{K(q)} = \int e^{qG_\lambda} \rho(G_\lambda) dG_\lambda$$

- a causa della condizione di media unitaria  $\overline{\epsilon_\lambda} = 1$ , il generatore deve essere normalizzato; deve cioè essere  $K_\lambda(1) = 0$ .

A questo punto e con queste condizioni, Schertzer e Lovejoy esprimono la funzione generatrice di un campo vettoriale  $\mathbf{x}$ ,  $G(\mathbf{x})$  come integrale (somma) di ampiezze aleatorie. Ne danno cioè una rappresentazione armonica come integrale di Fourier, tra 1 e  $\lambda$  dei numeri d'onda  $\mathbf{k}$  ( $1 \leq |\mathbf{k}| \leq \lambda$ ). scrivendo:

$$G_\lambda(\mathbf{x}) = \int_1^\lambda f(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k} \quad (8.6)$$

Questa struttura è indubbiamente non semplice:  $f(\mathbf{x})$  è una funzione reale detta *filtro reale non aleatorio*;  $\gamma(\mathbf{k})$  è un *rumore stazionario* peraltro arbitrario. Tuttavia, si può introdurre la (8.6) nella (8.5) e scrivere:

$$e^{K_\lambda(q)} = \overline{e^{q \int_1^\lambda f(\mathbf{x})\gamma(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}}} \quad (8.7)$$

Scegliendo opportunamente le funzioni  $f(\mathbf{x})$  e  $\gamma(\mathbf{k})$ , Schertzer e Lovejoy sono riusciti a risolvere la (8.7) arrivando, con l' aiuto della (8.1), alla forma *parametrica universale* della funzione di scaling dei momenti definita nella (7.30) di Cap. 7:

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1}{\alpha-1}(q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \log q & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8.8)$$

per  $q > 0$  e  $0 \leq \alpha \leq 2$ .

Utilizzando le trasformate di Legendre (7.29) e (7.31) di Cap. 7, si arriva ad esprimere la funzione codimensione  $c(\gamma)$  definita nella (7.15) di Cap. 7 come:

$$c(\gamma) = \begin{cases} C_1 \left[ \frac{\gamma(\alpha-1)}{C_1 \alpha} + \frac{1}{\alpha} \right]^{\frac{\alpha}{\alpha-1}} & \alpha \neq 1 \\ C_1 e^{\left(\frac{\gamma}{C_1} - 1\right)} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8.9)$$

Le formule (8.8) e (8.9) vengono normalmente scritte in forma un po' più semplice introducendo un altro parametro  $\alpha'$ , legato ad  $\alpha$  dalla semplice relazione:

$$\left[ \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'} \right] = 1 \quad (8.10)$$

(da cui si ricava  $\alpha' = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ ). Esse assumono la forma:

$$K(q) = \begin{cases} \frac{C_1 \alpha'}{\alpha} (q^\alpha - q) & \alpha \neq 1 \\ C_1 q \log q & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8.11)$$

e:

$$c(\gamma) = \begin{cases} C_1 \left[ \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right]^{\alpha'} & \alpha \neq 1 \\ C_1 e^{(\frac{\gamma}{C_1} - 1)} & \alpha = 1 \end{cases} \quad (8.12)$$

L'indice di Lévy  $\alpha$ , è chiamato anche *grado di multifrattalità*. Come visto al §A.2.7 dell'App. A,  $\alpha$  può assumere solo valori compresi nell'intervallo  $0 \leq \alpha \leq 2$  ed è il parametro più significativo. Il parametro  $C_1$  è sempre il punto fisso della funzione di codimensione definita dalla (7.16) del §7.6 di Cap. 7: [ $c(C_1) = C_1$ ] e rappresenta la codimensione delle singolarità che contribuiscono alla intensità media del campo. Possiamo allora qui

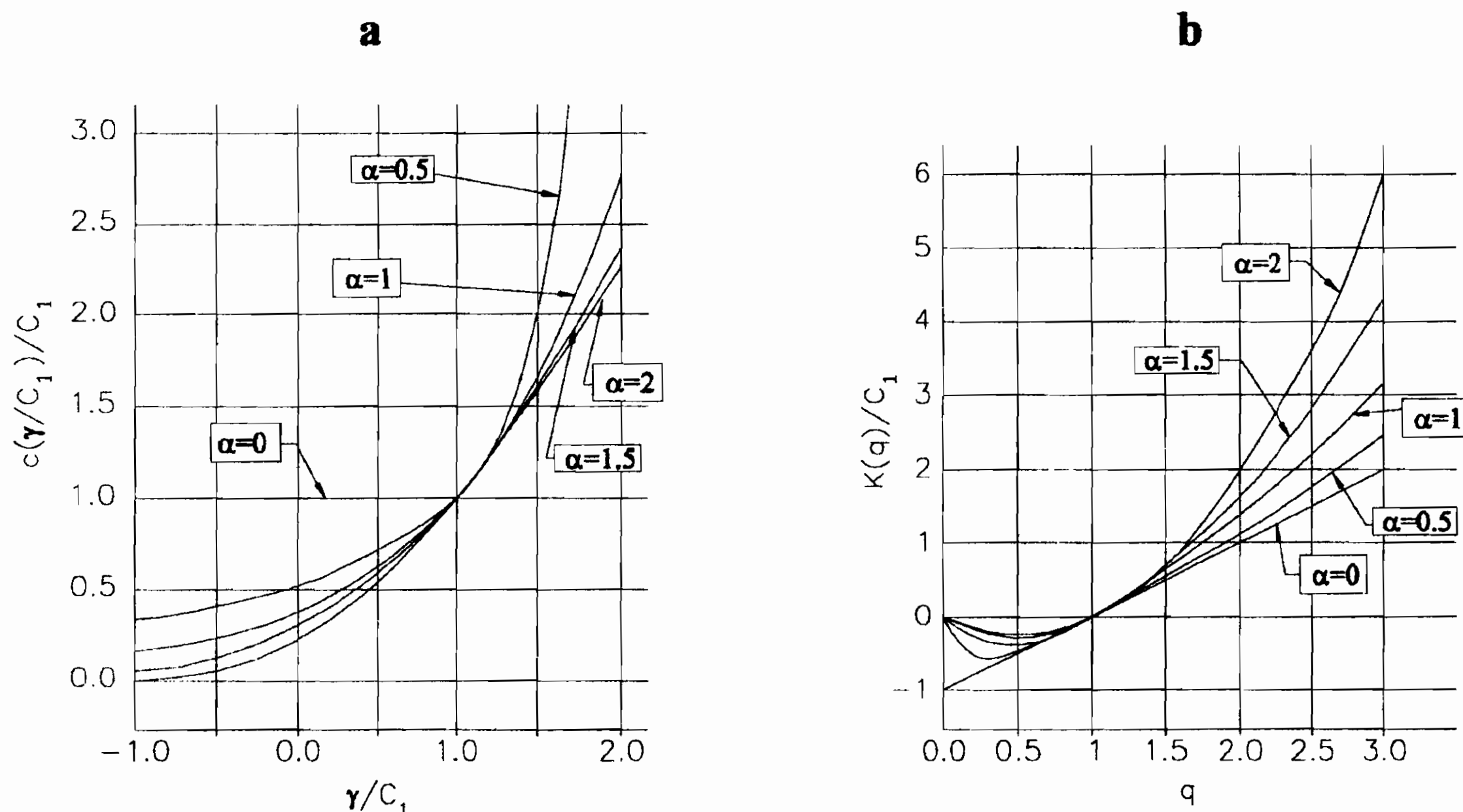


Figura 8.1: Variazione delle funzioni multifrattali in termini di frattali universali: a) variazione della funzione  $c(\gamma/C_1)$  al variare di  $\gamma/C_1$ ; b) variazione della funzione  $K(q)/C_1$  al variare di  $q$ .

riprendere le fig. 7.3 di §7.6, la fig. 7.4 di §7.9 e le fig. 7.6 di §7.14 del Cap. 7 e riproporre come le funzioni  $c(\gamma)$  e  $K(q)$  variano al variare del grado di multifrattalità  $\alpha$ . Le loro variazioni sono riportate nelle fig. 8.1a,b. La fig. 8.1a mostra come varia  $c(\gamma)$  al variare di  $\alpha$  e la fig. 8.1b mostra come varia  $K(q)$  al variare di  $\alpha$ . Per comodità le funzioni sono state rinormalizzate al valore  $C_1$  della codimensione di campo medio usando pertanto le funzioni  $\frac{c(\gamma)}{C_1}$  e  $\frac{K(q)}{C_1}$  e, limitatamente alla fig. 8.1a, la variabile normalizzata  $\gamma/C_1$ .

Con ciò, in fig. 8.1a, se  $\alpha = 0$ ,  $c(\gamma) = C_1$  è una retta orizzontale; la funzione è monofrattale per cui la codimensione coincide con la codimensione media del campo. Analogamente, poichè il processo è monofrattale, la funzione di scaling dei momenti  $K(q) = q$  coincide con l'ordine del momento.

Nelle figure 8.1a,b è indicata esplicitamente anche l'altra condizione estremante  $\alpha = 2$ , insieme con le 3 condizioni intermedie:  $\alpha = 0,5$ ,  $\alpha = 1$  e  $\alpha = 1,5$ . Di aiuto è anche la schematizzazione illustrata nella fig. 8.2.

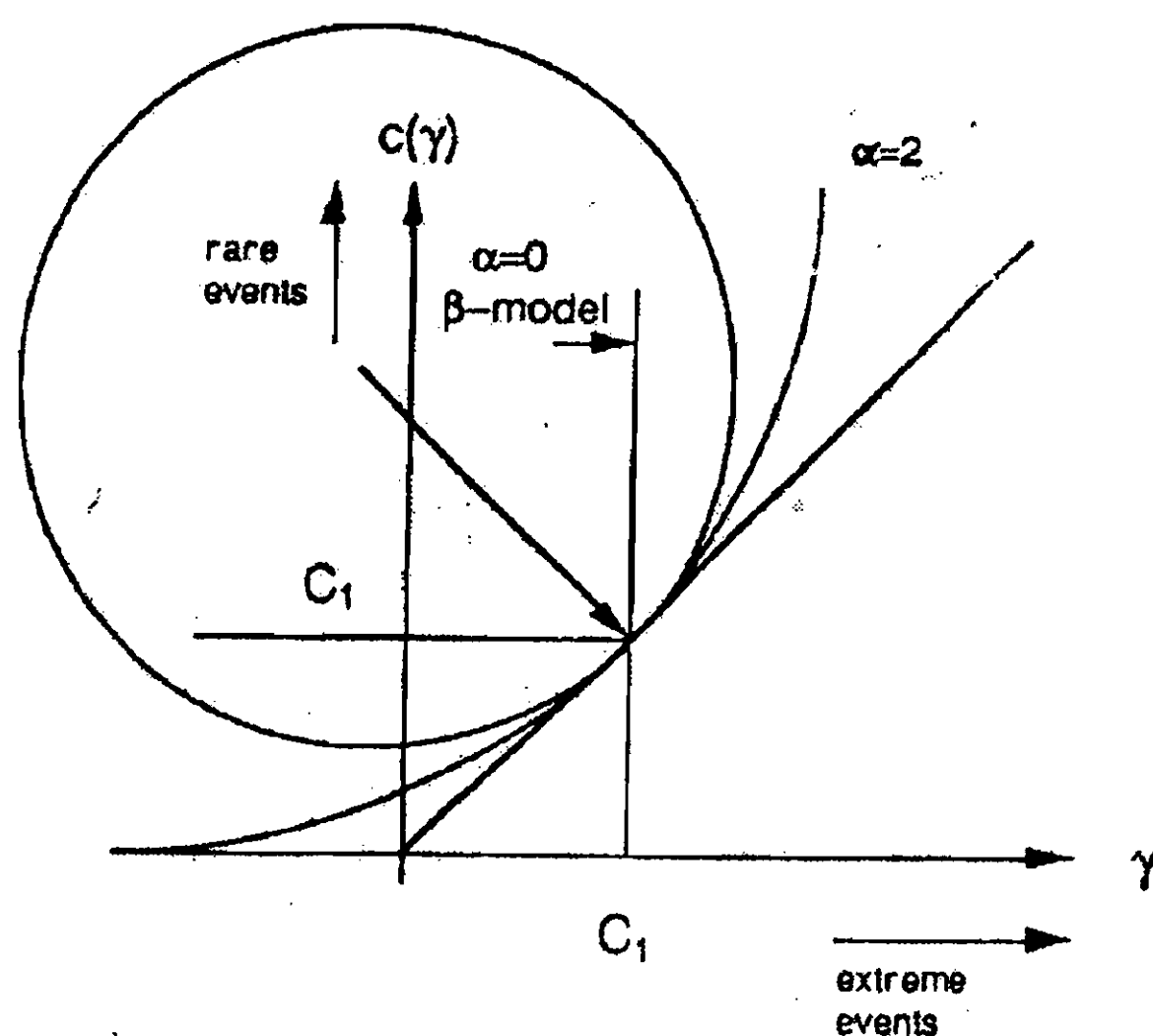


Figura 8.2: Illustrazione schematica di come la curva  $c(\gamma)$  può essere caratterizzata localmente nei pressi della singolarità media  $C_1$ , grazie al cerchio osculatore disegnato per comodità.

Un modello  $\beta$  del tipo trattato al §7.4.1 di Cap. 7 è caratterizzato da una retta verticale passante per  $C_1$ , in quanto tutto risulta congelato dalle



probabilità iniziali. Anche qui è indicato per comodità il caso estremante  $\alpha = 2$ .

Occorre sottolineare che le considerazioni fatte nel Cap. 7 rimangono valide tuttavia, lette nella nuova chiave, i processi moltiplicativi universali vengono diversamente classificati: quelli che hanno  $0 < \alpha < 1$  sono processi multifrattali con singolarità limitate generati da variabili con distribuzione di probabilità iperboliche. Essi sono definiti come processi **multifrattali soffici o condizionatamente duri**: in essi l'ordine di divergenza critico  $q_D$  è infinito per  $D$  sufficientemente grande. Il valore  $\alpha = 1$  definisce un processo con un generatore di Cauchy (quindi a varianza infinita), mentre valori di  $\alpha$  nell'intervallo  $1 < \alpha < 2$  definiscono processi con generatori di Lévy e singolarità non limitate e sono definiti come processi **multifrattali incondizionatamente duri**: in essi l'ordine di divergenza critico  $q_D$  resta finito per ogni valore di  $D$ .

### 8.3 Multifrattali non conservativi

Le (8.11) e (8.12) valgono per multifrattali detti da Schertzer e Lovejoy multifrattali universali *conservativi*. Ciò avviene quando il campo  $\epsilon_\lambda$  ha un valore medio costante al variare di  $\lambda$ .

Abbiamo infatti visto che nella (8.6), con la quale sono state costruite le funzioni generatrici del processo multifrattale *quasi* continuo, compaiono due funzioni arbitrarie: un *rumore stazionario*  $\gamma(\mathbf{k})$  e un *filtro reale non aleatorio*  $f(\mathbf{k})$ . La (8.6) peraltro, rappresenta la funzione generatrice di un processo a cascata costituito da una *somma* di infiniti termini nei quali  $\mathbf{k}$  può variare continuamente da 1 fino alla risoluzione  $\lambda$ .

E' quindi chiaro il meccanismo con cui Schertzer e Lovejoy arrivano alle cascate continue: un processo moltiplicativo del tipo (8.1) che si può ovviamente scrivere come:

$$\epsilon_\lambda^* = \prod_i e^{G_\lambda^{(i)}} = e^{\sum_i G_\lambda^{(i)}}. \quad (8.13)$$

La equazione (8.7), generalizzando la (8.13), costruisce un campo  $\epsilon_\lambda^*$  che è in realtà il prodotto di campi con risoluzione  $\mathbf{k}$  variabile tra 1 e  $\lambda$ :

$$\epsilon_\lambda^* = e^{\int_1^\lambda f(\mathbf{k})\gamma(\mathbf{k})e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}d\mathbf{k}} \quad (8.14)$$

Nella (8.7) vi è un ampio margine di scelta sia della funzione  $f(\mathbf{k})$  che della funzione  $\gamma(\mathbf{k})$ . E' quindi facile introdurre una fase arbitraria, ma peraltro costante, nella funzione oscillante  $e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}$ . Una tale fase fa in modo che  $\bar{\epsilon}_\lambda$  non si mantenga più costante con il variare di  $\lambda$ .

Un campo non conservativo  $\psi_\lambda$  è allora legato ad un campo conservativo  $\epsilon_\lambda$  dalla semplice relazione:

$$\psi_\lambda = \epsilon_\lambda \lambda^{-Z} \quad (8.15)$$

dove  $Z$  prende il nome di *grado di non conservazione*. E' bene notare come si capisca subito il *gioco* di  $Z$  nella (8.14) in quanto la (8.15) si può riscrivere come:

$$\psi_\lambda = \epsilon_\lambda e^{-Z \log \lambda} \quad (8.16)$$

Dalla (8.16) si capisce quindi che il termine  $-Z \log \lambda$  è un termine semplicemente aggiunto all'esponente della (8.14).

Per i campi non conservativi, le (8.11) e (8.12) non cambiano per  $\alpha = 1$  -il quale costituisce un caso degenere che si rifà al generatore di Cauchy- e cambiano solo leggermente per  $\alpha \neq 1$ .

$$K(q) + qZ = \frac{C_1 \alpha'}{\alpha} (q^\alpha - q) \quad q > 0 \quad \alpha \neq 1 \quad (8.17)$$

$$c(\gamma - Z) = C_1 \left[ \frac{\gamma}{C_1 \alpha'} + \frac{1}{\alpha} \right]^{\alpha'} \quad \alpha \neq 1 \quad (8.18)$$

L'ulteriore parametro  $Z$  permette di allargare il concetto di universalità anche ai processi multifrattali nei quali non si conserva, durante la cascata di passi successivi, il valore medio del campo  $\epsilon_\lambda$ . Ciò significa che, indipendentemente dalla complessità dei sistemi caotici interagenti, il processo che ne risulta appartiene ad una chiara e specifica

*classe di probabilità* -specificata dal valore numerico che assume il parametro  $\alpha$  di Lévy- che ne rappresenta il *bacino di attrazione* (cfr. Cap. 9).

Per raggiungere le caratteristiche di universalità si può assumere un generatore iperbolico del *rumore*[46]a-d -come introdotto nella (8.6)- che soddisfi al teorema generalizzato del limite centrale della statistica illustrato nell'App. A.

La fig. 8.2 illustra chiaramente come si può passare dal caso non conservativo, al caso conservativo, mediante una semplice traslazione dell'origine lungo l'asse del grado di frattalità  $\gamma$ , come ben illustrato dalla equazione (8.18). La curva  $c(\gamma)$  in funzione di  $\gamma$  colloca il suo punto fisso  $C_1 - Z$  sulla tangente alla retta parallela alla bisettrice; l'intersezione con l'asse delle  $\gamma$  fornisce il valore numerico (cambiato di segno) del *grado di non conservazione*  $Z$ . Il problema della determinazione del valore di  $C_1$  si riduce alla determinazione del punto di tangenza della curva  $c(\gamma)$  con una parallela alla bisettrice. È evidente che l'errore sperimentale in questa ricerca può diventare in alcuni caso non piccolo. Come conseguenza non è piccolo l'errore su  $\alpha$  ricavato dalla (8.18).

## 8.4 I momenti a doppia traccia: DTM

Il problema di determinare sperimentalmente il parametro  $\alpha$  di Levy e  $C_1$  [si vedano le (8.11) e le (8.12)] é quello di trovare un estimatore statistico "robusto".

La tecnica dei momenti a doppia traccia[48] risolve molti problemi delle piú comuni tecniche per la determinazione dei parametri caratteristici dei multifrattali universali, fornendo una stima statisticamente robusta del parametro  $\alpha$  di Levy e di  $C_1$ .

Si può definire l' $\eta$ -flusso:

$$\Pi_{\Lambda, D}^{(\eta)}(B_\lambda) = \int_{B_\lambda} \epsilon_\Lambda^\eta d^D x \quad (8.19)$$

come generalizzazione della definizione di flusso (7.43), ad una arbitraria potenza  $\eta$  del campo  $\epsilon_\Lambda$ , a risoluzione  $\Lambda > \lambda$ . I momenti a doppia traccia

sono definiti come:

$$Tr(\Pi_{\Lambda,D}^{(\eta)}(B_\lambda)^q) = \langle \sum_A \Pi_{\Lambda,D}^{(\eta)}(B_\lambda)^q \rangle \quad (8.20)$$

e costituiscono una generalizzazione dei momenti di traccia, considerando i campi  $\epsilon^\eta$ , con  $\eta \neq 1$ . In analogia con la legge di scaling:

$$Tr_q^\eta = Tr_{(A_\lambda)}(\epsilon_\Lambda)^q = \Lambda^{K(q)-(q-1)D} \quad (8.21)$$

abbiamo:

$$Tr_q^\eta = Tr_{(A_\lambda)}(\Pi_{\Lambda,D}^{(\eta)}(B_\lambda)^q) = \Lambda^{K(q,\eta)-(q-1)D} \quad (8.22)$$

Per i multifrattali vale l'utile fattorizzazione che mantiene le proprietà di scaling:

$$K(q, \eta) = \eta^\alpha K(q, 1) \quad (8.23)$$

Mantenendo  $q$  fissato (ma diverso dai valori "speciali" 0 e 1) e studiando le proprietà di scaling dei DTM per vari valori di  $\eta$ , è possibile determinare  $K(q, \eta)$  come funzione di  $\eta$ : ciò può essere fatto riscrivendo la (8.22) come:

$$\log Tr_q^\eta = [K(q, \eta) - (q-1)D] \log \Lambda. \quad (8.24)$$

Considerando che dalla (8.23) si ottiene:

$$\log K(q, \eta) = \alpha \log \eta + \log K(q, 1). \quad (8.25)$$

Il parametro  $\alpha$  può essere determinato dalla pendenza del grafico di  $\log K(q, \eta)$  in funzione di  $\log \eta$ . L'accuratezza della stima può essere verificata ripetendo l'operazione per vari valori di  $q$ ; la tecnica dei DTM è quindi uno strumento molto potente per la determinazione del grado di multifrattalità  $\alpha$ . È importante sottolineare che la (8.25) vale per momenti bare con  $N_s \rightarrow \infty$ ; per campioni di misura finita e momenti dressed oltre la soglia di divergenza, il criterio di validità per la formula è rappresentato da  $\max(\eta, q\eta) < \min(q_D, q_s)$ .

Per la stima del parametro  $C_1$ , si ottiene, dalle formule di definizione di  $\alpha$ , per campi conservativi ( $Z=0$ ):

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{(\alpha - 1)K(q)}{q^\alpha - q} & \alpha \neq 1 \\ C_1 &= \frac{K(q)}{q \log q} & \alpha = 1 \end{aligned} \quad (8.26)$$

È ovvio che l'accuratezza sul valore di  $C_1$  dipende da quella sul valore di  $\alpha$  o viceversa.

Per campi non conservativi la fig. 8.2 risulta traslata orizzontalmente verso destra di una quantità  $Z$ . Pertanto questo ultimo parametro si ottiene semplicemente intersecando la bisettrice, traslata fino al punto di tangenza  $C_1$ , con l'asse delle ascisse  $\gamma$  nella fig. 8.2.

In definitiva, sta al fisico stabilire cosa è più conveniente misurare. È possibile infatti misurare  $C_1$  mediante il punto di tangenza della curva  $c(\gamma)$  con la bisettrice -eventualmente traslata- e ricavare  $\alpha$  dalle formule e piuttosto seguire il percorso inverso, misurando  $\alpha$  mediante i DTM e derivando  $C_1$  dalle formule. La strategia più corretta è quella di determinare i due parametri indipendentemente e valutare gli errori dal confronto dei due risultati. Ma questo è un metodo che si impara con l'esperienza (come è noto, *misurare* il punto di tangenza a curve che variano lentamente comporta errori generalmente grandi).

Nei Capitoli dedicati rispettivamente al caso di Seveso e di Chernobyl (che si trovano più avanti nel volume) i due approcci vengono usati entrambi da gruppi diversi.

## 8.5 considerazioni conclusive

Nel Capitolo 6 abbiamo visto le caratteristiche frattali della estensione geometrica della aree di pioggia e delle formazioni nuvolose, determinandone una dimensione frattale comune dallo studio della relazione area-perimetro ed abbiamo verificato le proprietà di scaling

delle serie di pioggia in località e condizione fortemente diverse. Uno studio degli stessi fenomeni in termini di multifrattali universali[49] fornisce i valori:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.4 - 0.6 & (8.27) \\ C_1 &= 0.9 - 1.1\end{aligned}$$

per la caduta della pioggia (particolati pesanti) ed i valori:

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.4 - 0.6 & (8.28) \\ C_1 &= 0.9 - 1.1\end{aligned}$$

per la formazione delle nubi (sospensione di goccioline leggere). Questi dati saranno utili per un confronto con i risultati dello studio degli incidenti di Seveso e di Chernobyl fatti nei Capitoli 13 e 14.

# Capitolo 9

## Il Caos e gli Attrattori Strani

### 9.1 Introduzione

Lo scopo di questo capitolo è duplice: da una parte mostrare cosa si intende per moto caotico in Meccanica Classica, dall'altra sottolineare la connessione tra frattali e caos, mostrando come l'introduzione del concetto di insieme di dimensione frattale sia essenziale quando si voglia fornire una rappresentazione geometrica del moto di alcuni sistemi caotici.

Caos e frattali sono intimamente legati. Come si è visto nei primi Capitoli, utilizzando semplici regole, si possono definire insiemi molto irregolari e complessi. Allo stesso modo in Meccanica Classica, sistemi semplici, definiti da un numero limitato di variabili, possono avere un comportamento estremamente complesso e non prevedibile, se non per un intervallo di tempo molto limitato. Come i frattali nascono applicando (ed ampliando) gli usuali metodi della Geometria, così il caos nasce dalla applicazione e dall'ampliamento degli usuali metodi della Meccanica classica[50] .

Se da una parte l'esistenza del caos fa cadere la pretesa deterministica di poter prevedere, date le condizioni iniziali, l'evoluzione temporale di un qualunque sistema classico, dall'altra l'esistenza del caos amplia il

campo di indagine della Meccanica Classica permettendo di applicare i suoi metodi anche a fenomeni complessi.

Il comportamento dei sistemi caotici può essere utilizzato come modello per innumerevoli fenomeni naturali, che sono per lo più complessi e caotici: si pensi ad esempio ai fenomeni atmosferici, alla turbolenza nei fluidi o ai sistemi di molti corpi interagenti, come il sistema solare, gli ammassi stellari e le galassie.

Il Capitolo ha a priori dei limiti inevitabili. Infatti di norma, le Teorie del caos deterministico e della complessità (e qui ignoriamo volutamente tutto quanto può riguardare il caos quantistico) costituiscono, per formalismo, metodo matematico ed approccio sistematico, un argomento che abbondantemente copre un intero corso universitario annuale di livello superiore e che si intreccia con gli elementi più avanzati della meccanica statistica e della analisi numerica.

Ci proponiamo tuttavia di arrivare -impiegando un numero limitato di paragrafi ed introducendo il solo formalismo indispensabile alla definizione ed alla comprensione dei concetti, insieme con il minimo possibile delle dimostrazioni- a mostrare come l'**attrattore strano** di Lorenz possiede una dimensione frattale.

In questo Capitolo ci limitiamo pertanto allo studio dei sistemi caotici, cercando di utilizzare un punto di vista astratto, studiando i sistemi dinamici attraverso le caratteristiche delle loro equazioni del moto.

Si analizza in modo approfondito un particolare sistema: quello determinato dalle equazioni di Lorenz. Tale sistema riveste una notevole importanza storica in quanto è stato il primo il cui comportamento caotico è stato studiato in dettaglio. Il sistema di Lorenz offre inoltre l'opportunità di studiare un affascinante oggetto per il quale la connessione tra caos e dimensione frattale è esemplare: l'**attrattore strano**.

Anche nello studio di sistemi di equazioni differenziali non lineari si giunge alla individuazione di insiemi di punti (insiemi di valori di variabili, soluzioni delle equazioni differenziali) che presentano



proprietà tipicamente frattali. Anche nello studio di sistemi di equazioni differenziali non lineari, l'uso di potenti calcolatori elettronici è indispensabile e lo stesso studio dei sistemi di equazioni differenziali non lineari sarebbe impossibile se non si ricorresse abbondantemente ai metodi della analisi numerica e delle approssimazioni numeriche per le cui simulazioni l'impiego dei calcolatori è insostituibile.

Al fine di rendere più evidente l'importanza dei frattali in fisica, mostreremo non solo il comportamento dei parametri caratterizzanti gli stati fisici nello spazio delle fasi, ma anche come le soluzioni del sistema di Lorenz influiscono sul comportamento del fluido che governano nello spazio vero in funzione del tempo.

Va detto che questo capitolo non sarebbe mai nato in assenza della testardaggine del dott. (al tempo studente) Luca Celardo che, con l'aiuto della dott.ssa Valentina Pusceddu, ne ha curato la stesura e, soprattutto, la produzione delle numerose figure peraltro indispensabili.

## 9.2 Introduzione ai Sistemi Dinamici

Lo stato di un sistema dinamico è determinato dai valori che assumono le sue grandezze. Queste si possono esprimere in funzione di un certo numero di variabili dinamiche indipendenti. Con l'aggettivo *dinamico* si intende sottolineare che il valore di queste variabili muta col tempo. La specificazione dei valori di queste variabili dinamiche all'istante  $t$  specifica lo stato del sistema a quell'istante.

In questo Capitolo ci limitiamo a studiare i sistemi dinamici *deterministici*, ossia quelli per i quali gli stati successivamente assunti dal sistema durante la sua evoluzione sono univocamente determinati dallo stato iniziale. Per stato iniziale si intende l'insieme dei valori assunti dalle variabili dinamiche del sistema all'istante  $t_0$ . L'evoluzione nel tempo può avvenire in modo continuo, nel qual caso si parla di sistemi continui, o per salti discreti, nel qual caso si parla di sistemi discreti. Le equazioni del moto determinano la dipendenza delle variabili dinamiche dal tempo.

Per i sistemi continui, detto  $\vec{x}(t)$  l'insieme delle variabili dinamiche del sistema, le equazioni del moto per un sistema deterministico si possono scrivere nella forma vettoriale:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \frac{d\vec{x}(t)}{dt} = \vec{F} = F[\vec{x}(t)] \quad (9.1)$$

$\vec{F}$  è una funzione vettoriale ad un valore della variabile vettoriale  $\vec{x}$ , continua e derivabile in tutte le sue variabili. Se  $\vec{x} \equiv (x_1, x_2, x_3)$ ,  $\vec{F} = [F_1(x_1, x_2, x_3), F_2(x_1, x_2, x_3), F_3(x_1, x_2, x_3)]$ . La condizione di differenziabilità è essenziale in quanto garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione; se questa non fosse unica il sistema non sarebbe deterministico [51]. Le variabili da cui  $\vec{F}$  dipende definiscono *lo spazio delle fasi* del sistema, come succede per le variabili  $q_i$  e  $p_i$  nelle equazioni di Hamilton. Lo stato del sistema si può quindi rappresentare come un punto nello spazio delle fasi e l'insieme di stati  $\vec{x}(t)$  assunti dal sistema nel corso della sua evoluzione temporale può essere rappresentato come una traiettoria nello spazio delle fasi. La soluzione delle equazioni del moto (9.1), date le condizioni iniziali  $\vec{x}(0)$ , determina completamente la traiettoria del sistema.

L'evoluzione di un sistema dinamico continuo (flusso) si può dare anche in un'altra forma:

$$\vec{x}(t) = \vec{f}^t = f^t[\vec{x}(0)] \quad (9.2)$$

con  $\vec{f}^t$  operatore di evoluzione temporale. L'operatore di evoluzione temporale è a sua volta continuo, derivabile e tale che  $\vec{f}^0$  coincide con l'identità e  $\vec{f}^{t+s} = \vec{f}^t \vec{f}^s$ .

Per sistemi discreti, sistemi che evolvono per salti discreti, le equazioni si scrivono:

$$\vec{x}_{n+1} = \vec{f}_n(\vec{x}_0) \quad (9.3)$$

$\vec{f}_n$  è la mappa (funzione ad un valore) che porta i valori al tempo  $n$  nei valori al tempo  $n + 1$ . Applicando la mappa  $\vec{f}$  a  $\vec{x}_0$  si ottiene  $\vec{x}_1$  da cui, applicando ancora  $\vec{f}_1 = \vec{f} \cdot \vec{f}$  si ha  $\vec{x}_2$  e così via fino a determinare tutti i valori assunti nei successivi tempi dalla variabile  $\vec{x}$ . Poichè l'evoluzione

temporale del sistema si ottiene iterando più volte la mappa, questi tipi di sistema vengono chiamati *mappe iterative*.

Come esempio di mappa iterativa si consideri il semplice sistema dinamico unidimensionale:

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (9.4)$$

Come si vede immediatamente, conoscendo il valore  $x_0$  della variabile al tempo  $t = 0$  si può determinare il valore di  $x$  al tempo  $n$  iterando più volte la mappa:

$$x_n = \underbrace{f \cdot f \cdots f}_{n \text{ volte}} x_0. \quad (9.5)$$

L'evoluzione temporale si può anche determinare graficamente nel modo seguente: essendo  $f$  una funzione della  $x$ , la si può rappresentare nel piano  $[f(x), x]$  come una curva. Conoscendo  $x_0$  si determina graficamente la traiettoria con la procedura seguente (vedi fig.9.1):

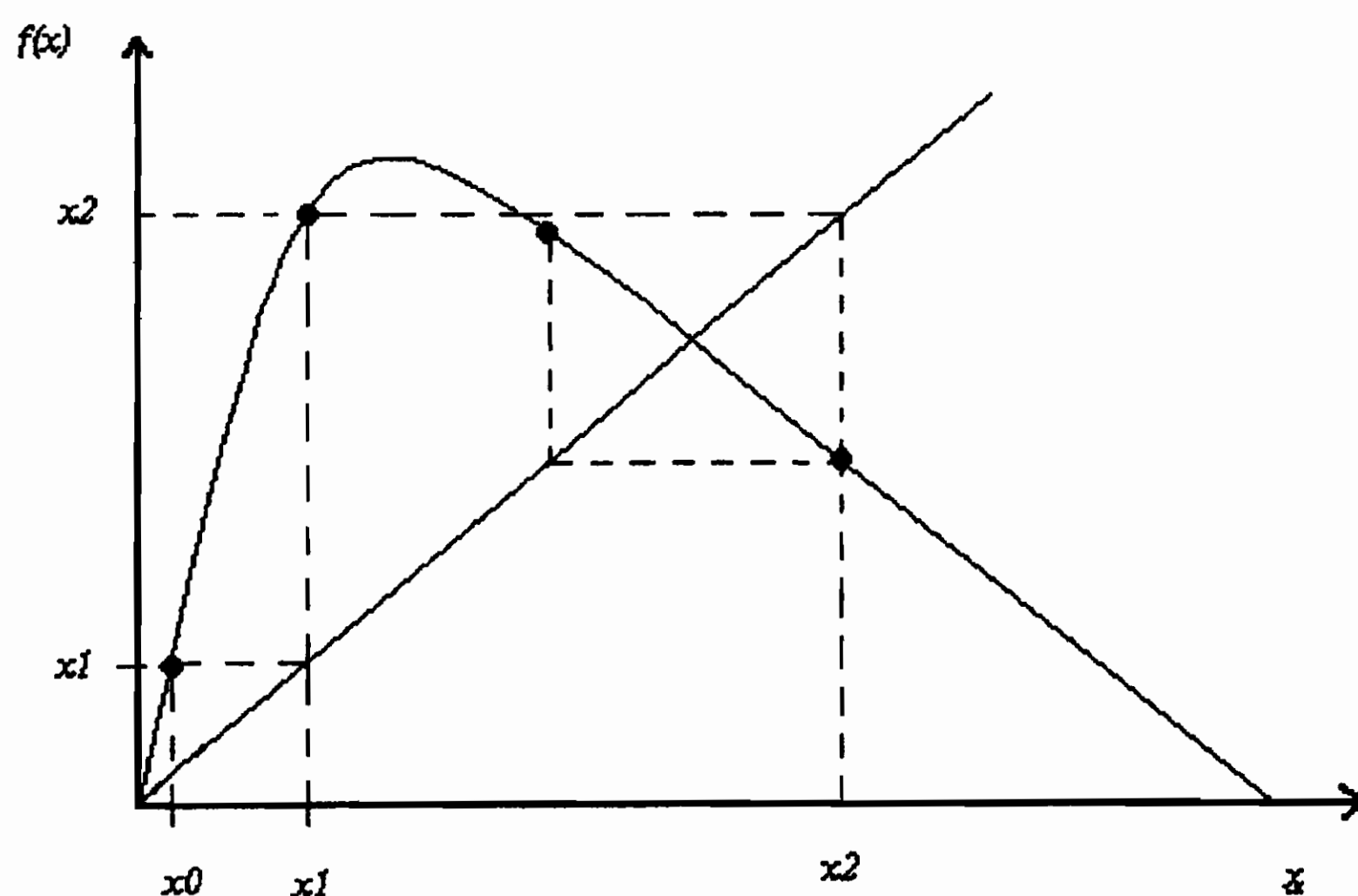


Figura 9.1: Rappresentazione di una mappa unidimensionale

a- Partendo da  $x_0$  si salga fino ad incontrare la curva determinando così  $x_1 = f(x_0)$ .

b- Si dovrebbe trasferire  $x_1$  sull'asse  $x$  e poi risalire fino alla curva, questo è equivalente ad andare fino alla bisettrice  $[f(x) = x]$  e salire fino alla curva, ottenendo così  $x_2$ .

c- Ripetendo questa procedura si ottengono tutti i punti  $x_n$  della traiettoria che parte da  $x_0$ . Si osservi che i punti di intersezione tra la mappa e la bisettrice rappresentano stati che non cambiano nel tempo, anche detti *punti fissi del sistema*. Infatti per essi vale la uguaglianza:  $x_{n+1} = f(x_n) = x_n$ .

Occorre sottolineare ora alcune importanti proprietà generali dei sistemi dinamici:

1- **Linearità:** si riferisce alla dipendenza da  $\vec{x}$  della funzione  $\vec{F}$ . Un sistema si dice lineare se vale il principio di sovrapposizione:  $\vec{F}(\vec{x}_a + \vec{x}_b) = \vec{F}(\vec{x}_a) + \vec{F}(\vec{x}_b)$ . Se  $\vec{F}$  contiene termini del tipo  $x_i x_j$ , oppure  $\text{sen}(x)$ , il sistema non è lineare. Si noti che la dipendenza non lineare dal tempo non rende un sistema non lineare:  $\frac{dx}{dt} = \text{sen}(x)$  non è lineare ma  $\frac{dx}{dt} = \text{sen}(t)$  lo è.

2- **Autonomia:** un sistema si dice autonomo se non dipende esplicitamente dal tempo. Le equazioni di evoluzione considerate fino ad ora sono tutte autonome. Ad esempio  $\frac{dx}{dt} = \text{sen}(x)$  è autonomo ma  $\frac{dx}{dt} = t \text{sen}(x)$  non lo è.

3- **Determinismo:** le traiettorie di un sistema dinamico deterministico non si possono intersecare a nessun istante  $t$  e se il sistema è autonomo non si possono intersecare in alcun punto dello spazio delle fasi. Se così non fosse verrebbe meno l'unicità della soluzione la quale deve essere determinata univocamente dalle coordinate dello spazio delle fasi e dal tempo, o dalle sole coordinate dello Spazio delle Fasi se il sistema è autonomo.

### 9.2.1 Relazione tra Mappe e Flussi

Le mappe discrete sono molto utili per lo studio dei sistemi dinamici per la loro semplicità maggiore rispetto ai flussi continui. È inoltre possibile estrarre in innumerevoli modi una mappa discreta da un flusso continuo

tale che ne mantenga le proprietà più importanti, permettendo così una semplificazione del sistema. Uno dei modi più diffusi per estrarre mappe discrete dai flussi è attraverso le sezioni di Poincarè: preso un piano nello spazio delle fasi si campiona la posizione dell'intersezione della traiettoria del flusso con il piano ottenendo così un insieme discreto di punti che si può vedere come la traiettoria generata da una mappa discreta. Un'ulteriore modo di discretizzare un flusso continuo consiste nel campionare i punti della traiettoria di un flusso ad intervalli di tempo costanti (sezione stroboscopica). Il flusso  $\vec{x}(t) = \vec{f}^t \vec{x}(0)$  diviene una mappa discreta ponendo  $t = 1$  e pertanto:  $\vec{x}(t + 1) = \vec{f}^1 \vec{x}(t)$ .

### 9.2.2 Sistemi Conservativi e Dissipativi

La terminologia proviene dalla Fisica dove i sistemi che conservano l'energia si dicono conservativi mentre quelli che non la conservano si chiamano dissipativi. Qui, dato un sistema, quest'ultimo si dice conservativo se preserva i volumi dello spazio delle fasi, dissipativo se i volumi variano al variare del tempo.

Si consideri un dato volume  $V$  nello spazio delle fasi racchiuso da una superficie  $S$  chiusa: per le proprietà dei sistemi deterministici i punti racchiusi dalla superficie evolvono nel tempo senza mai intersecare l'evoluzione dei punti del contorno. Se il sistema è conservativo la forma della superficie si può modificare nel tempo ma il volume che racchiude rimane costante. La variazione del volume racchiuso  $V$  dipende quindi dal modo in cui i punti della superficie  $S$  evolvono nel tempo. Considerando  $d\vec{S} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt}$  come il contributo infinitesimo alla variazione del volume determinato da un elemento di superficie si può scrivere:

$$\frac{dV}{dt} = \int_S d\vec{S} \cdot \frac{d\vec{x}}{dt} = \int_S d\vec{S} \cdot \vec{F}(\vec{x}) = \int_V \text{div} \vec{F}(\vec{x}) dV \quad (9.6)$$

con:

$$\text{div} \vec{F} = \frac{\partial F_1(\vec{x})}{\partial x_1} + \frac{\partial F_2(\vec{x})}{\partial x_2} + \dots \quad (9.7)$$

È utile considerare il caso particolare in cui  $\text{div} \vec{F} = K$ , con  $K$  indipendente da  $\vec{x}$ . È chiaro che se  $K = 0$  il sistema è conservativo

(in verità solenoidale.....) e che se  $K \neq 0$  il sistema è dissipativo; ad esempio se  $K < 0$  il volume dello spazio delle fasi tende ad annullarsi col passare del tempo.

Un esempio importante di sistema conservativo si ricava dai sistemi Hamiltoniani: siano  $q_i$  e  $p_i$  le variabili dello Spazio delle Fasi e  $H(q_i, p_i)$  una funzione differenziabile. Le equazioni che determinano il moto sono:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad e \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (9.8)$$

Un sistema di questo tipo è detto Hamiltoniano in ogni libro di Fisica Teorica e di Meccanica Quantistica.

È immediato verificare che è conservativo. Identificando infatti la funzione  $F_i$  [cfr. la (9.6)], con  $i = 1, \dots, 2n$ ; indicando con  $\frac{\partial H}{\partial p_i}$  le prime  $n$  funzioni  $F_i$  e con  $-\frac{\partial H}{\partial q_i}$  per le seconde  $n$  funzioni  $F_j$  si ha:

$$\text{div} \vec{F} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_j} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_j} = 0 \quad (9.9)$$

Questo equazione non è altro che la traduzione del teorema di Liouville[52] della Meccanica Statistica.

È anche immediato verificare che  $H(q_i, p_i)$  è un'integrale del moto. Infatti, sottointendendo il segno della sommatoria, si verifica facilmente che:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q} \frac{\partial H}{\partial p} + \frac{\partial H}{\partial p} \left( -\frac{\partial H}{\partial q} \right) = 0 \quad (9.10)$$

### 9.2.3 Stabilità di un sistema dinamico

Per lo studio della stabilità degli stati o delle traiettorie di un sistema dinamico si intende lo studio del tipo di risposta che gli stati (o le traiettorie) danno quando sono sottoposti a perturbazioni. Se le perturbazioni si amplificano con il passare del tempo, determinando una grossa variazione dello stato finale, gli stati o le traiettorie si dicono instabili; se le perturbazioni tendono a svanire nel tempo gli stati si dicono stabili.

La stabilità si studia con un processo simile a quelli che si rifanno al Principio dei Lavori Virtuali[53], linearizzando le equazioni del moto attraverso l'espansione in serie di Taylor: per perturbazioni sufficientemente piccole i termini lineari bastano a descrivere la risposta del sistema. La stabilità si può inoltre intendere in diversi modi: rispetto agli stati (stabilità locale), rispetto alle traiettorie (stabilità asintotica locale) o rispetto ad una famiglia di traiettorie. Si può inoltre studiare la risposta del sistema ai cambiamenti di un parametro esterno (stabilità strutturale). La stabilità degli stati e delle loro traiettorie si studia attraverso la linearizzazione delle equazioni del moto.

La linearizzazione attorno ad un punto dello spazio delle fasi descrive l'evoluzione locale di due stati vicini.

Nel caso di un sistema continuo [cfr. la (9.1)], dati due punti  $\vec{x}(t)$  e  $\vec{y}(t) = \vec{x}(t) + \vec{\epsilon}(t)$  al tempo  $t$ , l'evoluzione della perturbazione si può determinare attraverso lo Jacobiano  $\mathbf{J}[\vec{x}(t)]$  nel modo seguente:

$$\dot{\vec{\epsilon}}(t) = \dot{\vec{y}}(t) - \dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}(\vec{y}(t)) - \vec{F}(\vec{x}(t)) = \mathbf{J}[\vec{x}(t)]\vec{\epsilon}(t) \quad (9.11)$$

da cui:

$$\vec{\epsilon}(t) = e^{\int_0^t \mathbf{J}[\vec{x}(t)] dt} \vec{\epsilon}(0) \quad (9.12)$$

dove  $\mathbf{J}[\vec{x}(t)]$  è la matrice Jacobiana, di elementi:

$$J_{ij}(\vec{x}(t)) = \frac{\partial F_i[\vec{x}(t)]}{\partial x_j}$$

La perturbazione cresce se  $\left| \frac{\vec{\epsilon}(t)}{\vec{\epsilon}(0)} \right| > 1$ ; inoltre, se l'autovalore massimo della matrice  $\exp \int_0^t \mathbf{J}[\vec{x}(t)] dt$  è in modulo maggiore di 1 la perturbazione cresce nel tempo  $t$  e la traiettoria non è stabile.

Per una Mappa Discreta multidimensionale, presi due punti vicini  $\vec{x}_n$  e  $\vec{y}_n = \vec{x}_n + \vec{\epsilon}_n$ , determinato dalla perturbazione infinitesimale  $\vec{\epsilon}_n$ , si ha:

$$\vec{\epsilon}_{n+1} = \vec{y}_{n+1} - \vec{x}_{n+1} = \vec{f}(\vec{y}_n) - \vec{f}(\vec{x}_n) = \mathbf{J}(\vec{x}_n)\vec{\epsilon}_n \quad (9.13)$$

$\mathbf{J}(\vec{x}_n)$  indica la matrice che ha per elementi  $\frac{\partial f_i(\vec{x}_n)}{\partial x_j}$  calcolati in  $\vec{x}_n$ .

Considerando il primo e l'ultimo termine dell'equazione (9.13) si ha un'equazione di evoluzione per una piccola perturbazione iniziale ( $\vec{\epsilon}_0$ ). Al tempo  $t = n$  si ha:

$$\vec{\epsilon}_n = \mathbf{J}(\vec{x}_{n-1})\mathbf{J}(\vec{x}_{n-2}) \cdots \mathbf{J}(\vec{x}_0)\vec{\epsilon}_0 = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{J}(\vec{x}_i)\vec{\epsilon}_0. \quad (9.14)$$

Anche qui la perturbazione iniziale cresce se  $\frac{|\vec{\epsilon}_n|}{|\vec{\epsilon}_0|} > 1$  ed il sistema è localmente instabile. Se il più grande autovalore della matrice  $\prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{J}(\vec{x}_i)$  è maggiore di uno in modulo allora si genera una perturbazione che cresce con il tempo  $t = n$  ed il sistema è instabile.

### 9.2.4 Insiemi invarianti ed attrattori

Un'insieme  $\Omega$ , parte dello spazio delle fasi, si dice **invariante** se l'evoluzione di un qualunque suo punto è ancora un elemento dell'insieme, ossia:  $\vec{f}^t(\Omega) = \Omega$  per ogni  $t$ . Questa definizione si applica sia ai flussi continui che alle mappe discrete.

Il più semplice insieme invariante è il punto fisso, definito sia per un flusso continuo che per una mappa discreta dall'equazione:

$$\dot{\vec{x}}(t) = \vec{F}[\vec{x}(t)] = 0 \quad (9.15)$$

Se  $\vec{x}(0)$  è un punto fisso [ $\vec{x}(t) = \vec{x}(0)$ ], dalla seconda delle (9.12) si ha:

$$\vec{\epsilon}(t) = \exp \int_0^t \mathbf{J}[\vec{x}(t)] dt \vec{\epsilon}(0) = \exp^{\mathbf{J}[\vec{x}(0)]t} \vec{\epsilon}(0) \quad (9.16)$$

Lo studio della stabilità di un punto fisso si riduce quindi allo studio degli autovalori dello Jacobiano  $\mathbf{J}[\vec{x}(0)]$ . Se il più grande autovalore di questa matrice ha una parte reale positiva il punto fisso è instabile.

Un'altro tipico esempio di insieme invariante è l'orbita periodica.

Gli insiemi invarianti possono costituire degli attrattori per un sistema dissipativo.

Gli attrattori sono la forma di stabilità di una famiglia di traiettorie; se un sistema dinamico è dissipativo infatti, gli elementi di volume del



suo spazio delle fasi possono aumentare o diminuire. Nel primo caso il sistema presenta una instabilità, mentre nel secondo caso il volume tende a 0 e nel moto i suoi punti rappresentativi tendono a concentrarsi su un insieme di volume nullo rispetto alla dimensione dello spazio delle fasi. L'insieme di punti che costituisce questo insieme di volume nullo su cui i punti si accumulano col passare del tempo costituisce un **attrattore** per il sistema. I sistemi conservativi ovviamente non posseggono attrattori. Per un sistema dissipativo si assume dunque che esista un insieme  $U$  che è contratto asintoticamente su un'insieme  $A$  di volume nullo.

Qualitativamente possiamo definire **attrattore** un insieme invariante e limitato nello spazio delle fasi verso cui si accumulano, col passare del tempo, i punti sufficientemente vicini.

Una definizione più rigorosa di **attrattore**, presa principalmente dalla referenza [54], è la seguente<sup>1</sup>:

sia  $A$  un sottospazio *limitato ed invariante* dello spazio delle fasi ed  $U$  un suo intorno chiamato *intorno fondamentale*,  $A$  è un attrattore per il sistema dinamico definito dalla (9.1) se sono soddisfatte le seguenti condizioni :

a) *Invarianza*:  $A$  è un insieme invariante nel senso che  $f^t(A) = A$  per ogni  $t$ .

b) *Esistenza dell'intorno fondamentale  $U$* : esiste un intorno di  $A$ , ossia un insieme aperto  $U$ , che contiene  $A$ .

c) *Attrattività*: per ogni punto iniziale  $x_0$  in  $U$ , il punto  $x_t$ , evoluto temporale del punto  $x_0$ , appartiene ad  $U$  per ogni  $t$  positivo. Inoltre  $x_t$  diviene e "resta" vicino quanto si vuole ad  $A$  per  $t$  sufficientemente grande.

d) *Indecomponibilità*: è possibile scegliere un punto  $x_0$  in  $A$ , tale che, arbitrariamente vicino ad ogni altro punto  $y$  di  $A$ , vi è un punto  $x_t$ , evoluto temporale del punto  $x_0$ , per un qualche  $t$  positivo. Questa condizione garantisce che non si possa dividere  $A$  in più attrattori.

Se un punto appartiene ad un attrattore  $A$ , per l'invarianza di  $A$ , vi

---

<sup>1</sup>Per un approfondimento si possono consultare le referenze [55, 56].

appartiene sempre. Per le stesse ragioni, se un punto non appartiene all'attrattore non vi appartiene mai; può solo avvicinarsi ad esso. Nell'avvicinarsi tende, per continuità, a muoversi come i punti dell'attrattore (si dice in questo caso che il moto del sistema è sull'attrattore).

Si definisce inoltre **bacino di attrazione** di  $A$  l'insieme di punti  $\vec{x}$  tali che  $\vec{f}^t(\vec{x}) \rightarrow A$  per  $t \rightarrow \infty$ . È evidente che l'intorno  $U$  definito più sopra deve appartenere al bacino di attrazione di  $A$ .

In definitiva, il **Bacino di Attrazione** di  $A$  è l'insieme dei punti  $\vec{x}$  tali che  $\vec{f}^t(\vec{x}) \rightarrow A$  per  $t \rightarrow \infty$ . Un insieme attrattivo può consistere di parti disgiunte, nel senso che, presi due sottoinsiemi di  $A$ ,  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , tali che  $\vec{f}^t(\Omega_1) \cap \vec{f}^t(\Omega_2) = \emptyset$ , uno dei due sottoinsiemi potrebbe non essere attrattivo. La definizione esatta di **attrattore** è ancora oggi oggetto di studio. Operativamente si può dire che è una parte  $A_t$  di un'insieme attrattivo su cui i punti sperimentali si accumulano; perchè  $A_t$  sia effettivamente attrattiva occorre che sia anche un insieme invariante. Tuttavia, diversamente che per l'insieme attrattivo, si richiede anche che sia irriducibile, ossia che esso non sia decomponibile in parti disgiunte. Perchè ciò si verifichi deve esistere un punto dell'attrattore  $[A_t, \vec{x}_1]$  tale che per ogni  $\vec{x}$  in  $A_t$ ,  $\vec{f}^t(\vec{x}_1)$  è arbitrariamente vicino a  $\vec{x}$ .

Se il bacino di attrazione di un'insieme attrattivo è l'intero spazio delle fasi l'insieme attrattivo si dice universale. Per un insieme attrattivo universale, o per un attrattore in esso contenuto, si ha che l'evoluzione (il moto) del sistema dinamico sottoposto a piccole perturbazioni casuali (come possono essere gli errori di arrotondamento di un computer) è asintoticamente concentrato sull'attrattore; il che vuol dire che gli attrattori universali sono stabili.

Si noti infine che se un punto non appartiene all'attrattore all'inizio non vi apparterrà mai: per l'invarianza dell'attrattore, si avvicinerà sempre più ad esso senza però mai raggiungerlo.

Si è detto più sopra (cfr. §9.2.2) che se un sistema dinamico è dissipativo, gli elementi di volume del suo spazio delle fasi variano nel tempo e possono aumentare o diminuire. Nel primo caso il sistema

presenta una instabilità, mentre nel secondo caso il volume tende a zero e nel moto i suoi punti tendono a concentrarsi su un'insieme di misura nulla rispetto alla dimensione dello spazio delle fasi. L'insieme di punti che costituisce questo insieme di misura nulla su cui i punti si accumulano può costituire un attrattore per il sistema. I sistemi conservativi ovviamente non possono possedere attrattori.

### 9.3 Rappresentazione delle Soluzioni

Le equazioni del moto (9.1) non sono di solito integrabili, ossia non è possibile trovarne analiticamente la soluzione, la quale può solo essere approssimata.

Qui diamo soltanto un breve cenno del modo con cui si possono approssimare numericamente le soluzioni di un sistema di equazioni differenziali del tipo della (9.1), rimandando ai testi di analisi numerica per un maggiore approfondimento[57]. L'efficacia dei metodi a cui si fa riferimento per risolvere un sistema di equazioni differenziali si fonda sulla velocità di calcolo degli elaboratori elettronici.

A titolo di esempio si consideri l'equazione differenziale in una sola variabile  $\frac{dx}{dt} = f(x)$ .

Utilizzando la potenza di calcolo di un elaboratore è possibile determinare una sequenza di punti nello spazio delle fasi tale che per le stesse condizioni iniziali si avvicinano alla soluzione del sistema. Il modo più facile per determinare numericamente la soluzione di un'equazione del tipo  $\dot{x} = f(x)$  è quello di approssimarla con un mappa discreta del tipo  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x)$ , ossia  $x_{n+1} = x_n + f(x_n)\Delta t$ . È questo il Metodo delle differenze finite di Eulero[58].

Come noto, questo consiste nell'approssimare l'equazione differenziale  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  con l'equazione alle differenze finite  $\frac{\Delta x}{\Delta t} = f(x)$ . Noti che siano  $x(0)$  ed il passo  $\Delta t$  si può approssimare la soluzione esatta, per le stesse condizioni iniziali, al tempo  $\Delta t$  con  $x(\Delta t) = x(0) + f[x(0)]\Delta t$ . Considerando il valore ottenuto  $x(\Delta t)$  come una nuova condizione iniziale

si può ottenere  $x(2\Delta t)$ , approssimazione della soluzione esatta al tempo  $2\Delta t$ . Iterando più volte questa procedura su un elaboratore si ottiene la sequenza  $x(0), x(\Delta t), \dots, x(n\Delta t)$  che costituisce una simulazione della soluzione esatta fino al tempo  $n\Delta t$ . Teoricamente la precisione di questo metodo aumenta se si fa tendere  $\Delta t$  a 0. Così facendo però aumenta anche il numero di operazioni che l'elaboratore deve compiere per simulare la soluzione fino allo stesso tempo  $n\Delta t$ . Oltre ad aumentare i tempi di calcolo però, aumenta anche la probabilità di un accumulo degli errori di arrotondamento che un elaboratore compie non potendo determinare tutte le cifre significative di ogni numero reale (*roundoff errors*). Questo è uno dei difetti del metodo di Eulero a cui si è accennato sopra ed è uno dei motivi per cui è necessario usare metodi di simulazione più sofisticati. Il metodo usato per le simulazioni di questo capitolo è il metodo di Runge-Kutta del quarto ordine[58]; se ne dà di seguito la formula nel caso unidimensionale (la sua estensione al caso tridimensionale è immediata):

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\Delta t}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (9.17)$$

con:

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x_n) \\ K_2 &= f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_1\right) \\ K_3 &= f\left(x_n + \frac{\Delta t}{2} \cdot K_2\right) \\ K_4 &= f\left(x_n + \Delta t \cdot K_3\right) \end{aligned}$$

dove  $x_n$  sta per  $x(n\Delta t)$ .

Si noti che mentre nel metodo di Eulero l'errore cresce come  $\Delta t$  nel metodo di Runge-Kutta l'errore cresce come  $(\Delta t)^4$ ; si può scegliere un passo più grande mantenendo l'errore uguale, limitando i rischi di far crescere gli errori di *roundoff* che si hanno scegliendo un passo troppo piccolo.

Un metodo per la soluzione numerica di un sistema di equazioni differenziali è convenzionalmente detto di ordine  $n$  se l'errore che si compie ad ogni passo è dell'ordine di  $\Delta t^{n+1}$ . L'errore che si compie ad ogni passo nel metodo di Runge-Kutta del quarto ordine è quindi dell'ordine di  $\Delta t^5$ . Nel metodo di Eulero è invece dell'ordine di  $\Delta t^2$  come

si verifica facilmente espandendo in serie di potenze la soluzione esatta  $x(t)$ .

Un'ultimo aspetto che si vuole considerare è il problema della determinazione del *tempo di fiducia*, ossia del tempo massimo,  $T_{max}$ , oltre il quale l'errore che si compie nella simulazione della soluzione, con un dato passo  $\Delta t$ , è da considerarsi intollerabile. Il modo più semplice per determinare il tempo di fiducia consiste nel confrontare le simulazioni ottenute con passi differenti e decrescenti. Il tempo di fiducia per un dato passo è il tempo massimo fino a cui le successive simulazioni con passi minori non danno un risultato sensibilmente diverso. Si noti che questo semplice metodo si basa sulla supposizione che simulazioni con passi più piccoli siano più precise; ciò è vero a patto di non scegliere un passo troppo piccolo per cui gli errori di arrotondamento peggiorino i risultati.

Scelto il metodo per determinare le soluzioni approssimate, queste si possono rappresentare graficamente in diversi modi: ad esempio, per ogni variabile dello spazio delle fasi si può far disegnare come la sua posizione varia al variare del tempo [grafico  $x(t)$  in funzione di  $t$ ]. Nel caso del sistema di Lorenz che vedremo nel §9.5, essendo lo spazio delle fasi tridimensionale, si può fornire una rappresentazione dell'intera traiettoria ricorrendo all'artificio dei numeri triangolari (per rappresentare un oggetto tridimensionale sullo schermo di un computer, che è bidimensionale, bisogna mappare i punti dell'oggetto 3D su un piano. Il metodo più usato consiste nello scegliere un punto  $P$  ed un piano tra questo e l'oggetto tridimensionale che si vuole mappare; considerate le rette che passano per  $P$  ed i punti dell'oggetto, la loro intersezione con il piano fornisce la mappa cercata).

La rappresentazione dei numeri triangolari usata qui per le simulazioni ha il pregio della semplicità ed è sufficiente per dare una idea qualitativa della traiettoria. La mappatura usa le seguenti trasformazioni per rappresentare il punto  $P(x_p, y_p)$ :

$$\begin{cases} x_p = y - x \cos(\alpha) \\ y_p = z - x \sin(\alpha) \end{cases} \quad (9.18)$$

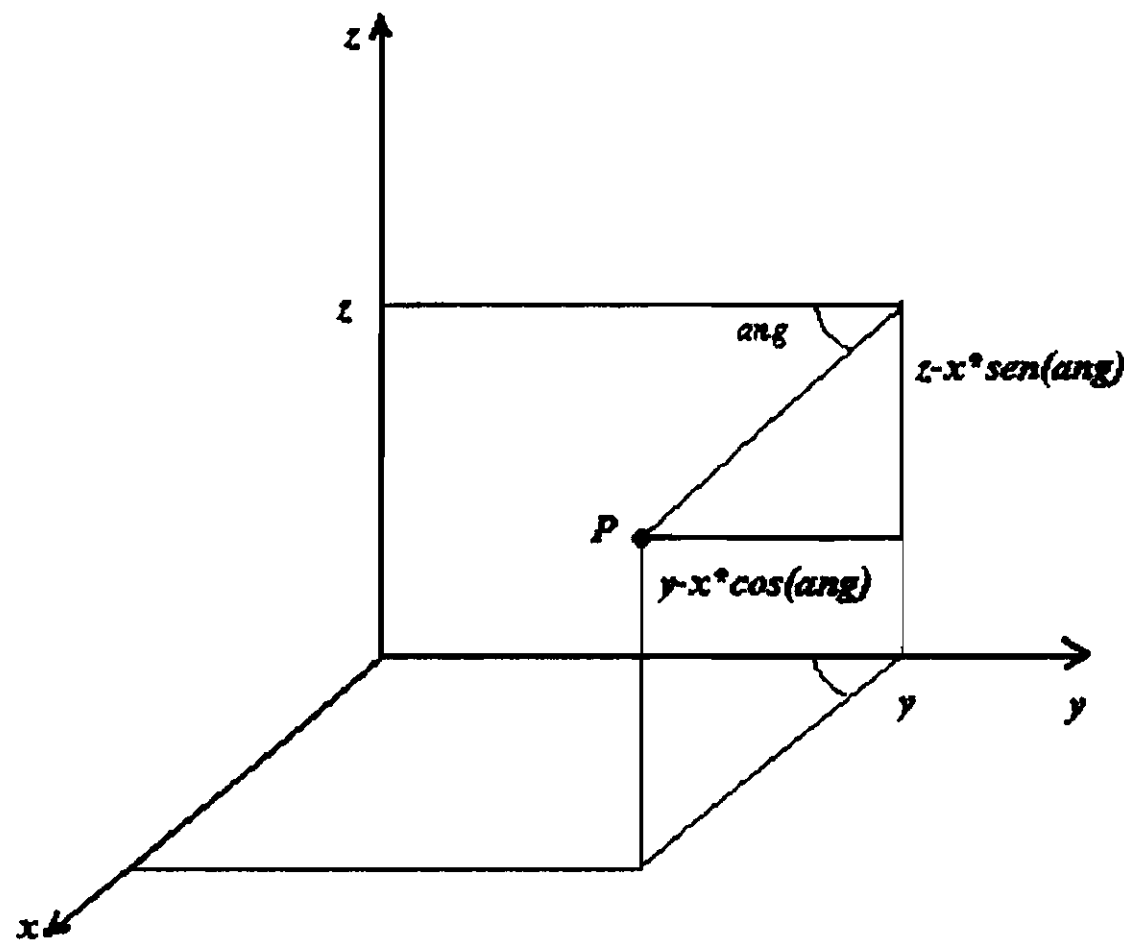


Figura 9.2: Il metodo proiettivo utilizzato nelle simulazioni tridimensionali.

dove  $x, y, z$  sono le coordinate dei punti della traiettoria tridimensionale date dalla (9.18) ed  $x_p, y_p$  le coordinate del piano in cui vengono mappate (cfr. fig. 9.3). Per rappresentare un corpo tridimensionale ruotato basta determinare le matrici di rotazione che determinano la trasformazione  $(x, y, z) \rightarrow (x_1, y_1, z_1)$  e poi mappare queste ultime).

## 9.4 Il Caos Deterministico

I sistemi dinamici deterministici, considerati nel paragrafo precedente in modo astratto, sono in grado di descrivere molti sistemi fisici reali per i quali le leggi della Meccanica Classica costituiscono una buona approssimazione. Vi è infatti ampia evidenza sperimentale e teorica che l'evoluzione di molti sistemi fisici è la stessa delle soluzioni delle equazioni di evoluzione considerate nel §9.2.

Dato un sistema classico di particelle, conoscendo le forze con cui interagiscono e le eventuali forze esterne che agiscono sul sistema, è sempre possibile scrivere le equazioni del moto delle loro coordinate e delle loro velocità in una forma simile alle (9.1), tale per cui la conoscenza delle coordinate e delle velocità all'istante iniziale permette

di determinare le stesse ad un qualsiasi altro istante. Il punto di vista deterministico è ben sintetizzato dalla seguente frase di P. S. Laplace ([59]):

*“Una Intelligenza che, in un dato istante, conoscesse tutte le forze da cui la Natura è animata, e le rispettive condizioni di tutti gli elementi di cui essa è composta, se inoltre fosse sufficientemente vasta da sottoporre tutti questi dati ad un’analisi, potrebbe sintetizzare in un’unica formula i moti dei più grandi corpi dell’universo e quelli dei più minuti atomi: nulla per essa sarebbe incerto ed il futuro come il passato sarebbero il presente ai suoi occhi. La mente umana, nella perfezione che è stata capace di dare all’Astronomia, ci fornisce solo una debole somiglianza di questa Intelligenza.”*

Un tale punto di vista sembrerebbe lasciare poco spazio alla casualità in un universo classico, eppure l’evoluzione temporale di certi sistemi deterministici, ottenuta tramite simulazioni al computer o da misure su sistemi fisici reali, quando non determinabile analiticamente, si presenta aperiodica, irregolare, imprevedibile, casuale....ovverossia caotica. Esempi di sistemi di questo tipo non sono difficili da trovare: il lancio di monete o di dadi o la roulette ad esempio sono tutti sistemi che devono ubbidire alle leggi della Meccanica Classica e quindi ad equazioni di evoluzione deterministiche, eppure hanno un comportamento casuale. L’interpretazione comune vede nell’estrema complessità del sistema e quindi nell’impossibilità di determinare tutte le variabili in gioco l’origine della casualità. In realtà bastano tre corpi, soli nell’universo, che interagiscono attraverso forze di tipo newtoniano, citato dalla maggior parte dei testi di Meccanica, perché il moto sia caotico e le equazioni irrisolvibili analiticamente. Vale la pena ricordare anche il caso della pallina ferromagnetica appesa al filo di un pendolo[60] ed attratta da tre magneti posti a formare un triangolo equilatero: si producono 3 bacini di attrazione che si intercalano senza intersecarsi e costituiscono un insieme complicatissimo di Julia-Mandelbrot il quale finisce in una polvere di Cantor.

Il caos deterministico si ha quindi quando l'evoluzione temporale di un sistema dinamico, analizzata con i mezzi a nostra disposizione (di solito si tratta di sistemi non integrabili), è caotica. Caos e determinismo benché siano delle situazioni apparentemente opposte sembrano coesistere in molti casi. Per iniziare a capire come ciò sia possibile si consideri quel che scrisse all'inizio del XX Secolo il matematico francese H. Poincaré[61]:

*“Se conoscessimo esattamente le leggi della Natura e lo stato dell’Universo all’istante iniziale, potremmo prevedere esattamente lo stato di quello steso Universo ad un tempo successivo. Ma anche se stessero così le cose, ossia che le leggi della Natura non avessero più segreti per noi, comunque non potremmo che conoscere lo stato iniziale approssimativamente. Se ciò ci rendesse capaci di predire gli stati successivi con la stessa approssimazione, che è tutto quel che è richiesto, dovremmo dire che il fenomeno è stato predetto e che è governato da leggi. Ma non è sempre così; può succedere che piccole differenze nelle condizioni iniziali ne producano di molto grandi nel fenomeno finale. Un piccolo errore all’inizio ne produrrà uno enorme poi. La predizione diverrebbe impossibile ed avremmo un fenomeno casuale.”*

Poincaré suggerisce dunque di considerare il comportamento di un sistema dinamico deterministico quando le condizioni iniziali vengono variate di poco (*sensibilità alle condizioni iniziali*), al fine di comprendere come possa nascere il caos in un sistema deterministico. In Meccanica Classica, la possibilità di determinare lo stato di un sistema all'istante  $t$  è subordinata alla sua esatta conoscenza all'istante  $t_0$ . Di fatto questa esatta conoscenza è irraggiungibile: vi è sempre una certa indeterminazione sperimentale nelle condizioni iniziali (Principio di indeterminazione di Borel). Se una indeterminazione ancorché piccola comporta che i possibili stati finali siano enormemente diversi fra loro, ne segue imprevedibilità e casualità. Tipico infatti dei fenomeni casuali è l'emergere di stati diversi pur partendo dal medesimo stato iniziale, tanto che non si può dire quale stato si attuerà ma solo la probabilità con cui lo potrà fare. La sensibilità alle condizioni iniziali implica che due traiettorie



che, alla risoluzione usata, partono dallo stesso punto possono divergere a causa dell'indeterminazione sulla posizione del punto (indeterminazione classica, dovuta all'errore sperimentale), rendendo così un sistema **in teoria** deterministico, **di fatto** non deterministico. Il concetto della *sensibilità alle condizioni iniziali* ora introdotto in termini qualitativi è ripreso nei prossimi paragrafi, dove si specificherà in termini più rigorosi.

### 9.4.1 Lo shift di Bernoulli

Ci si propone ora di dare un esempio di sistema dinamico deterministico che può evolvere in modo caotico nel tempo.

A tal fine si consideri un sistema dinamico che evolve nel tempo per salti discreti anziché in modo continuo. Questi sistemi si prestano bene a scopi pedagogici per la loro semplicità, senza per questo perdere le caratteristiche essenziali del moto caotico dei sistemi dinamici continui.

Si deve ad uno dei tanti scienziati della famiglia Bernoulli una delle prime mappe antesignane dei sistemi caotici.

Si consideri la mappa discreta unidimensionale:

$$x_{n+1} = f(x_n) = 2x_n \text{ mod } 1 \quad (9.19)$$

Mod 1 indica l'operazione che porta un qualsiasi numero reale nel numero dato dalla sua parte decimale (per esempio, 0.2 è la parte decimale di 1.2). La funzione  $f(x_n)$  è una funzione di  $x$  che si può rappresentare come in fig 9.3.

Per meglio capire come questa mappa agisce si scrivano i valori di  $x$  nell'intervallo  $[0, 1]$  in base 2:

$$x_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i 2^{-i} \quad \text{con } a_i = 0 \text{ oppure } 1 \quad (9.20)$$

È chiaro che  $x_0 < 0.5$  se  $a_1 = 0$  e  $x_0 > 0.5$  se  $a_1 = 1$ . La prima iterata di  $f(x_0)$  si può scrivere:

$$f(x_0) = \left\{ \begin{array}{ll} 2x_0 & \text{per } a_1 = 0 \\ 2x_0 - 1 & \text{per } a_1 = 1 \end{array} \right\} = (0, a_2 a_3 \dots) \quad (9.21)$$

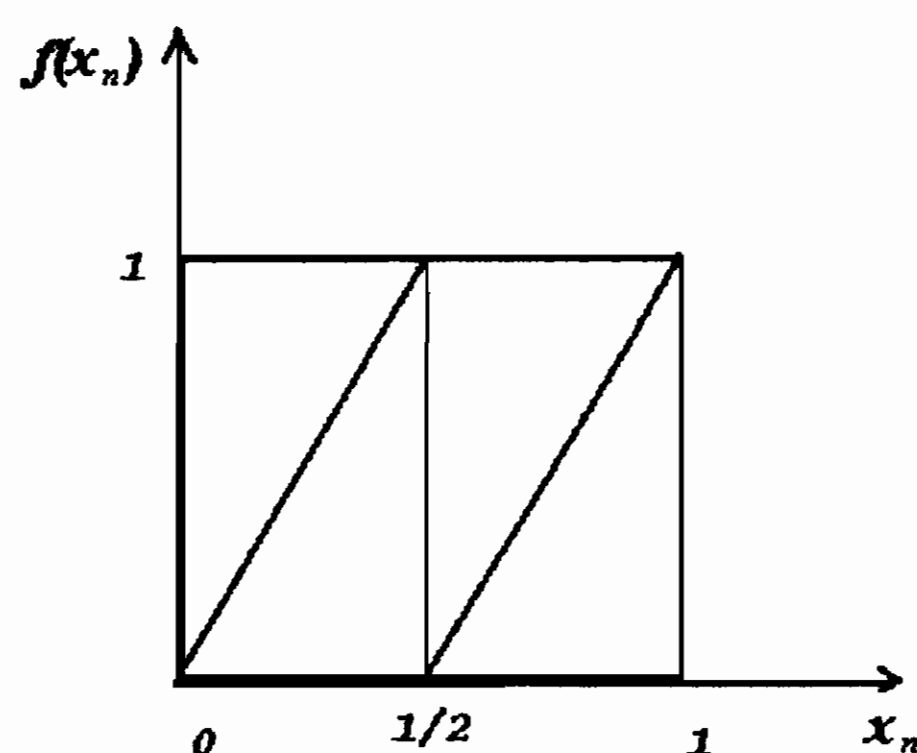


Figura 9.3: Rappresentazione della mappa che determina lo shift di Bernoulli.

La successiva iterazione darebbe  $(0, a_3 a_4 \dots)$  e così via. L'azione della mappa è quindi quella di spostare la virgola eliminando la parte intera, per questa ragione prende il nome di *shift di Bernoulli*.

Le principali caratteristiche delle orbite determinate dallo shift di Bernoulli sono le seguenti:

1- Orbite che partono da un numero razionale terminano in 0 o danno origine ad un'orbita periodica; infatti un numero razionale o ha un numero finito di cifre dopo la virgola o ha una sequenza periodica di cifre. Se parte da un numero irrazionale l'orbita non tornerà mai in un punto in cui è già passata (le considerazioni che seguono valgono per questo tipo di orbite, le quali sono la maggior parte in quanto i numeri razionali hanno misura nulla sull'insieme  $\mathcal{R}$  dei numeri reali).

2- Sensibilità alle condizioni iniziali: se due punti differiscono per l' $n$ -esima cifra dopo la virgola, dopo  $n$  iterazioni differiranno per la prima.

3- Casualità del moto: supponendo di conoscere il punto iniziale  $x_0$  con precisione finita fino all' $n$ -esima cifra dopo la virgola, è possibile localizzarlo in un certo intervallo interno all'intervallo  $[0, 1]$ . Infatti esso, se  $a_1 = 1$ , si trova nella metà di destra oppure in quella di sinistra se  $a_1 = 0$ ; se  $a_2 = 1$  esso si trova nella metà di destra della metà scelta prima, altrimenti si viene a trovare in quella di sinistra. Continuando così per

tutte le cifre che conosciamo si determina l'intervallo di partenza.

Facciamo alcuni semplici esempi. Si supponga ora di essere interessati a conoscere unicamente in quale delle due metà  $[0, 0.5]$  e  $[0.5, 1]$  le iterate successive del punto suddetto andranno a collocarsi: dopo  $n$  iterazioni non si avrebbero elementi neanche fare per questa previsione grossolana.

Si consideri ora il lancio di una moneta e si associ a testa il numero 1 e a croce il numero 0: una sequenza di lanci determina una sequenza di numeri  $0, 1, 1, 0, \dots$ . Ad ognuna di queste sequenze si possono associare le cifre dopo l'ennesima di un numero compreso nell'intervallo di partenza. Guardando alla sequenza riportata sopra: il numero 0 si trova nella metà di sinistra dell'intervallo di partenza, il numero 1 si trova nella metà di destra di quella metà di sinistra..... Dopo  $n$  iterazioni quindi l'orbita è tanto prevedibile quanto lo è il risultato di una serie di lanci di moneta: del tutto casuale dunque.

Si può affermare, con un po' di fantasia, che il caos nello shift di Bernoulli è dato dall'amplificazione del 'rumore intrinseco' dei numeri irrazionali: poichè la maggior parte dei numeri sono irrazionali, la maggior parte delle orbite di questa mappa sono caotiche. Il moto qui analizzato è completamente deterministico, tanto da essere integrabile. La soluzione esatta del moto di un punto per effetto dello shift di Bernoulli è:  $x_n = 2^n x_0 \text{ mod } 1$ . Malgrado ciò il moto è di fatto casuale poichè la minima imprecisione nella determinazione di  $x_0$  si amplifica presto a tal punto da rendere il moto indeterminato. Rimane un sistema deterministico in quanto l'esatta conoscenza di  $x_0$  lo renderebbe perfettamente prevedibile ma questa esatta conoscenza è un'obbiettivo al di là dei limiti umani, non solo per una limitazione tecnica, se si considera che non è possibile esprimere la maggior parte dei numeri irrazionali attraverso un algoritmo finito. L'intera sequenza di cifre di un numero irrazionale non è conoscibile dall'uomo come ha dimostrato la teoria della complessità algoritmica[62].

Quanto sopra vale ovviamente anche per i sistemi che presentano un moto regolare, ma per essi non ha conseguenze così disastrose in

quanto una conoscenza grossolana del punto di partenza permette una conoscenza con la stessa grossolanità del punto di arrivo, che è tutto quel che è richiesto come del resto sostiene Poincarè.

### 9.4.2 Gli esponenti di Liapunov

Da quanto detto fino ad ora si evince come la divergenza di traiettorie inizialmente vicine sia essenziale affinché il moto presenti sensibilità alle condizioni iniziali e quindi sia caotico.

L'esponente di Liapunov assume un ruolo formidabile in quanto fornisce una misura quantitativa di questa divergenza. Per semplicità definiamo l'esponente di Liapunov per una mappa unidimensionale.

Dati due punti vicini  $x_0$  e  $(x_0 + \epsilon_0)$ , dopo  $n$  iterazioni essi sono distanziati di  $|f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)|$ . Scriviamo per definizione questa distanza nello spazio delle fasi in una forma esponenziale e cioè:

$$|f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)| = \epsilon_0 \exp^{n\nu(x_0)}. \quad (9.22)$$

dalla quale si deduce che:

$$\nu(x_0) = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)|}{\epsilon_0}\right). \quad (9.23)$$

Si definisce pertanto *esponente di Liapunov*<sup>2</sup> il limite  $\lambda(x_0)$  di  $\nu(x_0)$  per  $\epsilon_0 \rightarrow 0$  e  $n \rightarrow \infty$ :

$$\lambda(x_0) = \lim_{\epsilon_0 \rightarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|f^n(x_0 + \epsilon_0) - f^n(x_0)|}{\epsilon_0}\right)$$

ovverossia:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln\left(\frac{|df^n(x_0)|}{dx_0}\right) \quad \text{ESPONENTE DI LIAPUNOV} \quad (9.24)$$

Per lo shift di Bernoulli il calcolo dell'esponente di Liapunov è immediato: si vede infatti che dipende dalla derivata della iterata  $n$ -esima, la fig. 9.4 mostra il grafico di  $f^2(x)$ , da cui si deduce che  $f^n$

<sup>2</sup>Anche in questo caso si genera ancora una ambiguità di notazione:  $\lambda$  assume significati diversi nei Cap. 2-7 e nel futuro Cap. 10. Tuttavia la notazione adottata favorisce la lettura della bibliografia originale.

ha una pendenza di  $2^n$  per quasi tutti i punti. Dunque  $|\frac{df^n(x_0)}{dx_0}| = 2^n$  e  $\lambda(x_0) = \ln 2 > 0$  per la maggior parte dei punti.

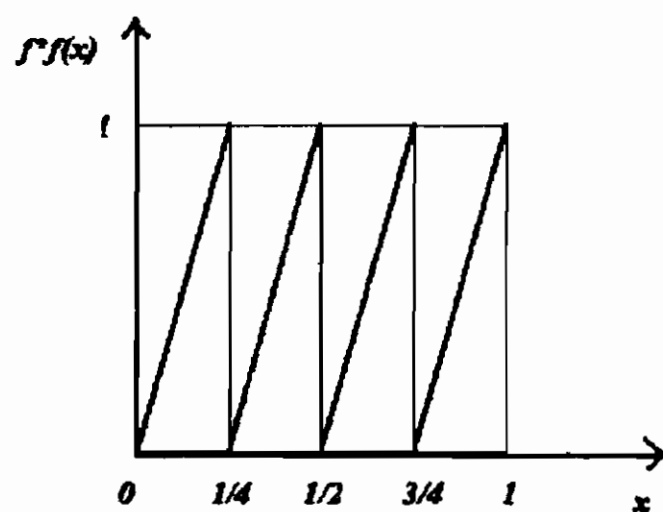


Figura 9.4: Rappresentazione dello Shift di Bernoulli iterato due volte.

Le caratteristiche dello Shift di Bernoulli sono alquanto generali per i sistemi caotici e la positività dell'esponente di Liapunov non fa eccezione; questa positività è condizione necessaria ma non sufficiente per la caoticità.

Consideriamo ora un'altra mappa  $x_{n+1} = 2x_n$  e confrontiamo la sua soluzione esatta con quella dello shift di Bernoulli:

$$x_n = 2^n x_0 \quad ; \quad x_n = 2^n x_0 \bmod 1 \quad (BERNOULLI) \quad (9.25)$$

Per entrambe l'esponente di Liapunov è maggiore di 0 e pari a  $\ln 2$  ma la prima non è caotica (per la mappa  $x_{n+1} = 2x_n$  infatti due numeri che sono uguali nelle prime  $n$  cifre continueranno ad essere uguali nelle prime  $n$  cifre nel corso del moto). L'operazione  $\bmod 1$  rende lo shift di Bernoulli una mappa limitata (tutti i numeri sono mappati in  $[0, 1]$ ) ed il confinamento del moto è l'altra condizione del caos, insieme con la divergenza della maggior parte delle traiettorie che partono vicine; ovvero  $\lambda(x_0) > 0$  per la maggior parte degli  $x_0$ .

Si noti che la mappa dello shift di Bernoulli non è lineare a causa del termine  $\bmod 1$ . Questo mostra un'altra caratteristica generale dei sistemi caotici: la non linearità.

Consideriamo infine una mappa unidimensionale lineare autonoma: la linearità implica che essa può dipendere solo da una combinazione lineare delle variabili dello spazio delle fasi; l'autonomia implica che i coefficienti

di questa combinazione debbano essere indipendenti dal tempo. L'unica possibilità, se vi è solo una variabile, è quindi  $x_{n+1} = ax_n$  con  $a$  numero reale; si ha pertanto alla  $n$ -esima iterazione:  $x_n = a^n x_0$ .

Calcoliamo allora il suo esponente di Liapunov:  $|\frac{df^n(x_0)}{dx_0}| = a^n$  implica che  $\lambda(x_0) = \ln a$  per ogni  $x_0$ . Avviene che  $\lambda(x_0) > 0$  se  $a > 1$ ; ma in questo caso  $x_n \rightarrow \infty$  per ogni  $x_0$  e dunque il moto non è limitato. Un sistema lineare quindi non può avere l'esponente di Liapunov positivo ed insieme essere confinato, quindi non può essere caotico. Nel linguaggio specialistico, lo studio dei sistemi caotici si associa spesso alla scienza dei fenomeni non lineari, sebbene non tutti i sistemi non lineari siano caotici.

Queste considerazioni sono facilmente estendibili a tutte le mappe multidimensionali tenendo conto delle considerazioni fatte nel §9.2.3 e notando che, se le mappe sono lineari, allora lo Jacobiano non dipende da  $x$ .

## 9.5 Le Equazioni di Lorenz

Attorno agli anni sessanta, E.N. Lorenz stava lavorando come meteorologo al Massachusetts Institute of Technology (M.I.T.) sul problema della previsione dei fenomeni atmosferici. In particolare si stava occupando di un modello semplificato dei moti convettivi atmosferici<sup>3</sup>. In questo modello un fluido è racchiuso tra due superfici a temperature diverse, la superficie inferiore è calda, quella superiore fredda. La differenza di temperatura  $\Delta T$  si mantiene costante tra le due superfici. Il fenomeno che questo modello intende approssimare è quello dei moti convettivi dell'atmosfera: il sole riscalda il suolo, l'aria in basso, più calda e quindi più leggera sale e l'aria più fredda e pesante delle zone superiori dell'atmosfera scende. Un sistema di questo tipo ha uno spazio delle fasi ad infinite dimensioni, essendo un suo stato definito dal valore che varie funzioni, come la densità, la temperatura, la pressione, ecc..., assumono in ogni punto del fluido. Attraverso alcune semplificazioni illustrate nel

---

<sup>3</sup>Una spiegazione di questo modello, detto modello di Rayleigh-Benard, si trova ad esempio in ref.[50].

prossimo paragrafo, Lorenz ridusse il sistema ad infinite dimensioni del fluido ad un sistema in tre dimensioni ricavando il suo famoso sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \dot{X} = \sigma(Y - X) \\ \dot{Y} = rX - Y - XZ \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (9.26)$$

dove la variabile  $X$  ha un immediato significato fisico, infatti il suo modulo determina la velocità dei moti convettivi e il suo segno determina il loro verso, la variabile  $Y$  è legata alla differenza di temperatura tra le particelle di fluido discendente e quelle di fluido ascendente e la variabile  $Z$  è proporzionale alla distorsione del profilo della temperatura verticale rispetto alla linearità.

È un sistema di equazioni differenziali del primo ordine, non lineari come si vede dai termini  $XZ$  ed  $XY$ . I parametri esterni  $\sigma$ ,  $r$ ,  $b$  si fissano di volta in volta. Di fatto, il parametro  $\sigma$  dipende dalle caratteristiche del fluido considerato (la densità media e la viscosità),  $b$  è un parametro geometrico che determina l'ampiezza dei moti convettivi. Il sistema di equazioni di Lorenz non è integrabile: per determinarne le soluzioni bisogna simulare numericamente il moto mediante un calcolatore.

## 9.6 Derivazione delle equazioni di Lorenz

Questo § è dedicato alle persone particolarmente interessate ai problemi del caos deterministico ma può essere saltato a piè pari senza perdere la informazione indispensabile, prendendo le equazioni di Lorenz con beneficio di inventario.

Per derivare il sistema di equazioni (9.26) dobbiamo considerare l'esperimento di Rayleigh-Bénard illustrato nella fig.9.5. Due lastre vengono poste ad una distanza  $h$  l'una dall'altra, tra le due lastre vi è un fluido.

La situazione del fluido contenuto tra le lastre è descritta da un campo vettoriale di velocità  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  e da un campo scalare di temperatura  $T(\vec{x}, t)$ .

Il sistema è governato dalle seguenti equazioni:

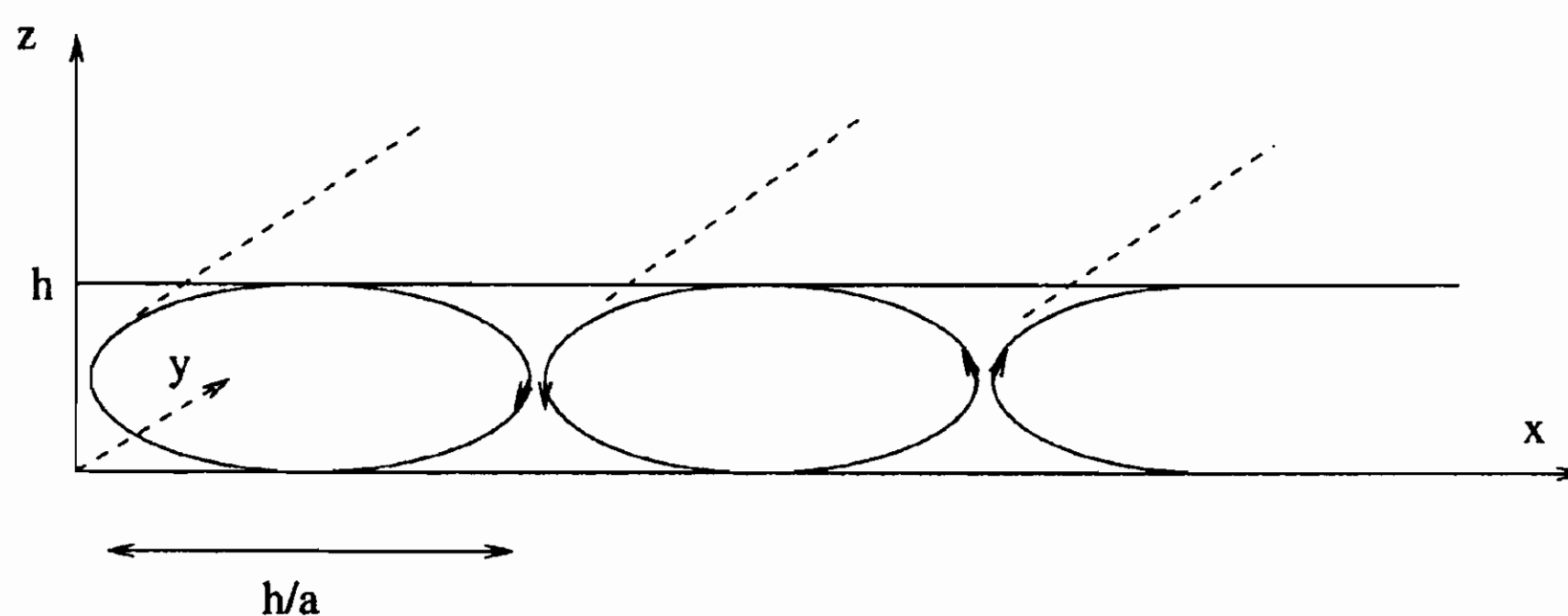


Figura 9.5: Modello dell'esperimento di Rayleigh-Bénard

1. equazioni di Navier-Stokes:

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} \quad (9.27)$$

2. equazione della conduzione del calore:

$$\frac{dT}{dt} = \kappa \nabla^2 T \quad (9.28)$$

3. equazione di continuità:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{v}) = 0 \quad (9.29)$$

con le condizioni al contorno:

$$T(x, y, z = 0, t) = T_0 + \Delta T = T_1$$

$$T(x, y, z = h, t) = T_0$$

dove  $\rho$  è la densità del fluido,  $\vec{F}$  è il campo di forze esterne per unità di volume che nel nostro caso è costituito dalla sola forza di gravità,  $p$  è la pressione a cui è soggetto il fluido,  $\mu$  è la viscosità del fluido,  $\kappa$  è la conducibilità termica.

Introduciamo le seguenti definizioni:

$$T = T_0 + T' \quad T_0 \text{ costante}$$

$$\rho = \rho_0 + \rho' \quad \rho_0 \text{ costante} \quad (9.30)$$

$$p = p_0 + p' \quad p_0 = -\rho_0 g z + \text{cost} \quad (9.31)$$

Al tempo  $t_0$ , la temperatura  $T_0$  e la densità  $\rho_0$  sono costanti mentre la pressione  $p_0$  non lo è ma varia linearmente con la quota  $z$  e dipende dall'accelerazione di gravità  $g$  e dal valore della densità  $\rho_0$ .



### 9.6.1 Semplificazioni e approssimazioni

La prima semplificazione che viene fatta è assumere che il sistema sia invariante nella direzione  $y$ , lungo le due piastre parallele, in modo da poter considerare il moto in funzione solo di  $x$ , di  $z$  e di  $t$ .

Il primo passo consiste nel riscrivere le equazioni di Navier-Stokes (9.27) in modo approssimato. Riscriviamo le equazioni (9.27) nel seguente modo:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{g} \quad (9.32)$$

dove:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \text{ e } \vec{g} = \frac{\vec{F}}{\rho}.$$

In primo luogo scriviamo il termine:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p \quad (9.33)$$

come sviluppo di Taylor fermandoci al primo termine e trascurando il resto; procediamo considerando l'espressione (9.33) come funzione di  $\rho$  e di  $p$  e tenendo presente che il gradiente è un operatore lineare e quindi:

$$d(\text{grad } \vec{v})(\vec{w}) = \text{grad}(\vec{w}) \quad \text{per ogni } \vec{v}, \vec{w}$$

dove  $d$  indica l'operatore *differenziale*.

Si ottiene:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p \sim \frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0^2}\nabla p_0(\rho - \rho_0) + \frac{1}{\rho_0}\nabla(p - p_0) \quad (9.34)$$

Viste le (9.30) e (9.31), possiamo scrivere l'equazione (9.34) come:

$$\frac{1}{\rho}\nabla p \sim \frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0^2}\rho'\nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0}\nabla p'. \quad (9.35)$$

In secondo luogo consideriamo la cosiddetta *approssimazione di Boussinesq-Oberbeck* che consiste nel trascurare la variazione della densità dovuta alla pressione e nel supporre che la densità vari linearmente con la temperatura. Si ha quindi:

$$\rho' = \rho'(\rho_0, T)$$

$$\rho' = -\rho_0\beta T' \quad (9.36)$$

dove  $\beta$  è il coefficiente di espansione termica, con  $\beta > 0$ .

Considerando queste approssimazioni ed usando le (9.36) e (9.31) riscriviamo le equazioni (9.32) come:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 + \frac{1}{\rho_0^2}\rho'\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{g} = \\ &= -\frac{1}{\rho_0}\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\beta T'\nabla p_0 - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\nabla^2\vec{v} + \vec{g} = \\ &= +\frac{1}{\rho_0}\rho_0 g\vec{k} + \frac{1}{\rho_0}\rho_0\beta T' g\vec{k} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\nabla^2\vec{v} - g\vec{k} \end{aligned} \quad (9.37)$$

Otteniamo quindi:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -T'\beta\vec{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\nabla^2\vec{v}. \quad (9.38)$$

Queste ultime sono le equazioni approssimate di Navier-Stokes. Nelle equazioni originarie (9.27) la temperatura non compare, mentre in queste ultime (9.38), grazie all'approssimazione di Boussinesq-Oberbeck, la temperatura  $T'$  compare. Questo fatto ci permette di mettere in relazione le equazioni di Navier-Stokes con l'equazione della conduzione del calore (9.28).

Il secondo passo consiste nell'introdurre una nuova funzione. Quello che noi stiamo considerando è un moto piano del fluido in virtù della prima semplificazione fatta da Lorenz, quindi esiste una funzione di corrente  $\psi$  tale che:

$$u = -\frac{\partial\psi}{\partial z} \quad w = \frac{\partial\psi}{\partial x} \quad (9.39)$$

con  $\vec{v} = (u, v, w)$ .

A questo punto riconsideriamo le equazioni (9.38) e applichiamo il rotore sia a destra che a sinistra dell'uguale:

$$\nabla \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \nabla \times \left( -T'\beta\vec{g} - \frac{1}{\rho_0}\nabla p' + \nu\nabla^2\vec{v} \right).$$

Rotore a sinistra:

$$\nabla \times \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{dw}{dt} \right) \vec{i} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{dw}{dt} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{du}{dt} \right) \right] \vec{j} - \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{du}{dt} \right) \vec{k} =$$

$$w \text{ e } u \text{ non dipendono da } y \quad \rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

$$= \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \vec{j} =$$

$$= -\frac{d}{dt} \nabla^2 \psi \vec{j}.$$

Rotore a destra:

$$\nabla \times \left( -T' \beta \vec{g} - \frac{1}{\rho_0} \nabla p' + \nu \nabla^2 \vec{v} \right) =$$

$$= \nabla \times (-T' \beta \vec{g}) - \nabla \times \left( \frac{1}{\rho_0} \nabla p' \right) + \nabla \times (\nu \nabla^2 \vec{v}) =$$

$$\text{rotore del gradiente} = 0$$

$$= -\left( \beta g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi \right) \vec{j}.$$

Si ottiene quindi:

$$\frac{d}{dt} \nabla^2 \psi = \beta g \frac{\partial T'}{\partial x} + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi. \quad (9.40)$$

Ora sviluppiamo la derivata materiale al primo membro dell'equazione (9.40):

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \nabla^2 \psi &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi + \vec{v} \cdot \nabla \nabla^2 \psi = \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} \end{aligned}$$

poichè:

$$\vec{v} = -\frac{\partial \psi}{\partial z} \vec{i} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \vec{k}$$

e:

$$\nabla \nabla^2 \psi = \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \psi \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 \psi \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 \psi \vec{k}.$$

L'equazione (9.40) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi + \beta g \frac{\partial T'}{\partial x} \quad (9.41)$$

Il terzo passo consiste nell'introdurre una funzione  $\theta = \theta(x, z, t)$  che misura lo scostamento dall'andamento lineare della temperatura  $T$  rispetto a  $z$ , cioè

$$T(x, z, t) = T_0 + \Delta T - \frac{\Delta T}{h} z + \theta(x, z, t).$$

Viste le condizioni al contorno che avevamo posto all'inizio del capitolo, questa equazione può essere scritta nel seguente modo:

$$T(x, z, t) = T_1 - \frac{\Delta T}{h} z + \theta(x, z, t)$$

da cui:

$$\theta(x, z, t) = T(x, z, t) - T_1 + \frac{\Delta T}{h} z.$$

Osserviamo che:

$$\frac{\partial T'}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

visto che  $T_1$  e  $\frac{\Delta T}{h} z$  sono indipendenti da  $x$ .

Quindi l'equazione (9.41) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \nabla^2 \psi}{\partial z} + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi + \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (9.42)$$

Il nostro scopo è quello di scrivere l'equazione del calore (9.28) in funzione di  $\psi$  e di  $\theta$ .

Innanzitutto sviluppiamo la derivata materiale al primo membro dell'equazione (9.28):

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

Considerando che valgono le (9.39) e che:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

per come abbiamo definito  $\theta(x, z, t)$ ,

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

come abbiamo osservato appena sopra, e

$$\frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{h}$$

si ottiene:

$$\nabla^2 T = \nabla^2 \theta.$$

Possiamo scrivere l'equazione del calore nel seguente modo:

$$\kappa \nabla^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{\partial \psi}{\partial z} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial z} - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

Utilizzando la notazione usata da Lorenz:

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, y)} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial y} - \frac{\partial a}{\partial y} \frac{\partial b}{\partial x},$$

l'equazione prende la forma:

$$\kappa \nabla^2 \theta = \frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} - \frac{\Delta T}{h} \frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (9.43)$$

e l'equazione(9.42) diventa:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = - \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} + \nu \nabla^2 \nabla^2 \psi + \beta g \frac{\partial \theta}{\partial x} \quad (9.44)$$

Per semplificare le equazioni (9.43) e (9.44), Lorenz tiene conto solo dei primi termini dell'espansione in serie doppia di Fourier delle funzioni  $\psi$  e  $\theta$  limitandosi ai termini di ordine più basso, che riproducono il comportamento in grande scala del sistema. Seguendo le referenze [72, 73] e considerando le seguenti condizioni al contorno:

$$T(0, 0, t) = T(0, h, t) = \psi(0, 0, t) = \psi(0, h, t) = \nabla^2 \psi(0, 0, t) = \nabla^2 \psi(0, h, t) = 0.$$

si ottiene:

$$\frac{a}{1+a^2} \frac{1}{\kappa} \psi = \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (9.45)$$

$$\frac{\pi R}{R_c \Delta T} \theta = \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right) \quad (9.46)$$

dove  $a$  è un parametro adimensionale che dipende dalle caratteristiche fisiche del sistema, in particolare l'ampiezza dei moti convettivi è data da  $\frac{h}{a}$ ,  $R = \frac{g\beta h^3}{\kappa\nu} \Delta T$  è il numero di Rayleigh che è proporzionale alla differenza di temperatura tra le due lastre,  $R_c = \frac{\pi^4(1+a^2)^3}{a^2}$ .

Inserendo le equazioni (9.45) e (9.46) nelle equazioni (9.44) e (9.43) e trascurando le armoniche di frequenza superiore si ottiene il sistema di equazioni di Lorenz:

$$\begin{cases} \dot{X} = -\sigma X + \sigma Y \\ \dot{Y} = -XZ + rX - Y \\ \dot{Z} = XY - bZ \end{cases} \quad (9.47)$$

dove: il punto denota la derivata rispetto al tempo  $\tau = \frac{\pi^2(1+a^2)\kappa}{h^2} t$ , e  $\sigma = \frac{\nu}{\kappa}$  è il numero di Prandtl che dipende dalla viscosità e densità del fluido;  $b = \frac{4}{(1+a^2)}$  è un parametro geometrico che determina l'ampiezza dei moti convettivi ed  $r = \frac{R}{R_c} \propto \Delta T$  è il parametro di controllo esterno proporzionale alla differenza di temperatura tra le due lastre.

Abbiamo ottenuto il sistema (9.47) nel modo seguente:

- Riscriviamo le equazioni (9.45) e (9.46):

$$\psi = \frac{1+a^2}{a} \kappa \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) \quad (9.48)$$

$$\theta = \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h} z\right) - Z(t) \sin\left(\frac{2\pi}{h} z\right)$$

- Troviamo le espressioni di:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi, \quad \frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)}, \quad \nabla^2 \nabla^2 \psi, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t}, \quad \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \text{ e } \nabla^2 \theta.$$

Si trova:

$$\frac{\partial}{\partial t} \nabla^2 \psi = -\frac{\kappa\pi^2(a^2+1)^2}{ah^2} \sqrt{2} \dot{X}(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.49)$$

$$\frac{\partial(\psi, \nabla^2 \psi)}{\partial(x, z)} = 0 \quad (9.50)$$

$$\nabla^2 \nabla^2 \psi = \frac{\kappa\pi^4(a^2+1)^3}{ah^4} \sqrt{2} X(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.51)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{R_c a \Delta T}{Rh} \sqrt{2} Y(t) \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.52)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \sqrt{2} \dot{Y}(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) - \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \dot{Z}(t) \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.53)$$

$$\frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(x, z)} = \frac{R_c \Delta T \kappa (a^2+1) \pi}{Rh^2} X(t) Y(t) \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) +$$

$$-2 \frac{\kappa\pi(a^2+1) R_c \Delta T}{Rh^2} \sqrt{2} X(t) Z(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \cos\left(2\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.54)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\kappa\pi(a^2+1)}{h} \sqrt{2} X(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.55)$$

$$\nabla^2 \theta = -\frac{R_c \Delta T \pi (a^2+1)}{Rh^2} \sqrt{2} Y(t) \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + 4 \frac{R_c \Delta T \pi}{Rh^2} Z(t) \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) \quad (9.56)$$

Sostituendo le equazioni (9.49) - (9.51), (9.52) nell'equazione (9.44) otteniamo la seguente equazione:

$$A \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) = B \sin\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right)$$

dove:

$$A = -\frac{\kappa\pi^2(a^2+1)^2}{ah^2} \sqrt{2} \dot{X}(t)$$

$$B = \sqrt{2} \frac{\nu\kappa\pi^4(a^2+1)^3}{h^4 a} X(t) - \sqrt{2} \frac{ga\beta R_c \Delta T}{Rh} Y(t)$$

Uguagliando i coefficienti  $A$  e  $B$  e tenendo conto delle espressioni di  $R$  e  $R_c$ , otteniamo:

$$\left(\frac{\kappa\pi^2(1+a^2)}{h^2}\right)^{-1} \dot{X}(t) = -\sigma X(t) + \sigma Y(t) \quad (9.57)$$

Normalizzando il tempo  $t$  con

$$\tau = \frac{\kappa\pi^2(1+a^2)}{h^2}t$$

si ha:

$$\frac{dX}{d\tau} = \left(\frac{d\tau}{dt}\right)^{-1} \dot{X}$$

quindi si ottiene la prima equazione del sistema (9.47).

- Sostituendo le (9.53), (9.54), (9.55) e (9.56) nella (9.46) si ottiene la seguente equazione:

$$\begin{aligned} & A \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + B \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) = \\ & = A' \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + B' \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) + C \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin^3\left(\frac{\pi}{h}z\right) \end{aligned}$$

dove:

$$A = \sqrt{2} \frac{R_c \Delta T}{\pi R} \dot{Y}(t)$$

$$B = -\frac{R_c \Delta T}{\pi R} \dot{Z}(t)$$

$$\begin{aligned} A' = 2\sqrt{2} \frac{\kappa\pi(a^2+1)R_c\Delta T}{Rh^2} X(t)Z(t) + \sqrt{2} \frac{\kappa\pi(a^2+1)\Delta T}{h^2} X(t) + \\ -\sqrt{2} \frac{\kappa\pi R_c(a^2+1)\Delta T}{Rh^2} Y(t) \end{aligned}$$

$$B' = -\frac{\kappa\pi R_c(a^2+1)\Delta T}{Rh^2} X(t)Y(t) + 4\frac{\kappa\pi R_c\Delta T}{Rh^2} Z(t)$$

$$C = -4\sqrt{2} \frac{\kappa\pi R_c(a^2+1)\Delta T}{Rh^2} X(t)Z(t)$$

Siccome:

$$\sin^3 \alpha = \frac{3}{4} \sin \alpha - \frac{1}{4} \sin 3\alpha,$$

si ha:

$$\begin{aligned} & A \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + B \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) = \\ & = A'' \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(\frac{\pi}{h}z\right) + B' \sin\left(2\frac{\pi}{h}z\right) + C' \cos\left(\frac{\pi a}{h}x\right) \sin\left(3\frac{\pi}{h}z\right) \end{aligned}$$



dove:

$$A'' = -\sqrt{2} \frac{\kappa\pi R_c (a^2 + 1) \Delta T}{Rh^2} X(t)Z(t) + \sqrt{2} \frac{\kappa\pi (a^2 + 1) \Delta T}{h^2} X(t) +$$

$$-\sqrt{2} \frac{\kappa\pi R_c (a^2 + 1) \Delta T}{Rh^2} Y(t)$$

$$C' = \sqrt{2} \frac{\kappa\pi R_c (a^2 + 1) \Delta T}{Rh^2} X(t)Z(t).$$

Approssimiamo ulteriormente l'equazione tralasciando il termine relativo all'armonica  $\alpha = 3\frac{\pi}{h}z$  ( $C'$ ), visto che anche nell'espressione di  $\psi$  e  $\theta$  ci eravamo limitati a considerare termini con armoniche del tipo  $\alpha = n\frac{\pi}{h}$  con  $n = 1, 2$ .

Uguagliamo i coefficienti corrispondenti:

$$A = A'' \text{ e } B = B'.$$

Si ottiene:

$$\left(\frac{\kappa\pi^2(1+a^2)}{h^2}\right)^{-1} \dot{Y}(t) = -X(t)Z(t) + rX(t) - Y(t) \quad (9.58)$$

e:

$$\left(\frac{\kappa\pi^2(1+a^2)}{h^2}\right)^{-1} \dot{Z}(t) = X(t)Y(t) - bZ(t). \quad (9.59)$$

Normalizzando il tempo come indicato al punto precedente le equazioni (9.58) e (9.59) si trasformano nella seconda e terza equazione del sistema (9.47).

## 9.7 Considerazioni generali

Il sistema di equazioni (9.26) ha la forma delle equazioni (9.1), con  $\vec{F}(\vec{x})$  differenziabile; rappresenta quindi un sistema dinamico deterministico: date le condizioni iniziali  $X_0$ ,  $Y_0$  e  $Z_0$  al tempo  $t = t_0$ , esistono e sono uniche le soluzioni  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$ <sup>4</sup>.

<sup>4</sup>Si sono trovati molti sistemi dinamici che possono essere descritti dalle equazioni di Lorenz. Per una rassegna si veda ad esempio la referenza[63].

Seguendo Lorenz[64], ci limitiamo a studiare il caso particolare:

$$\begin{cases} \sigma = 10 \\ b = \frac{8}{3} \end{cases} \quad (9.60)$$

Date le (9.60)  $r$  è l'unico parametro esterno libero. Il suo valore è proporzionale alla differenza di temperatura  $\Delta T$ , definita sopra.

Le equazioni di Lorenz si possono considerare semplicemente come le equazioni del moto per un sistema dinamico deterministico il cui stato è descritto dalle variabili dello spazio delle fasi  $X, Y, Z$  e le cui equazioni del moto sono determinate dalle (9.26): date le condizioni iniziali  $X_0, Y_0$  e  $Z_0$  al tempo  $t = t_0$  esistono e sono uniche le soluzioni  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$ .

Considerando il sistema di equazioni di Lorenz (9.26) si possono dedurre alcune importanti proprietà anche senza ricavarne le soluzioni:

A- L'asse  $z$ : l'asse  $z$  è un'insieme invariante del sistema, come definito nel §9.2.4; infatti per tutti i valori dei parametri  $\sigma, b$  ed  $r$ , tutte le traiettorie che partono da esso rimangono sull'asse  $z$ , in particolare per la scelta dei parametri (9.60), si ha che tutte le traiettorie che partono dall'asse  $z$  tendono a 0, per ogni  $r$ . Questo non è difficile da dimostrare notando che per le traiettorie che partono dall'asse  $z$  si ha che  $X_0 = 0$  ed  $Y_0 = 0$  e che le derivate di  $X$  e  $Y$  nel punto iniziale si annullano per tutti i valori di  $Z$ .

2- Dissipatività: Il sistema di Lorenz è un sistema dissipativo (cfr. il §9.2.2):

$$\frac{dV}{dt} = \int \operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) dV \quad (9.61)$$

dove:

$$\operatorname{div} \vec{F}(\vec{x}) = \frac{\partial(\sigma Y - \sigma X)}{\partial X} + \frac{\partial(rX - Y - XZ)}{\partial Y} + \frac{\partial(XY - bZ)}{\partial Z} = -\sigma - b - 1 \quad (9.62)$$

Per la scelta dei parametri (9.60), si ottiene:  $V = V_0 e^{-\frac{41}{3}t}$ ; ciò traduce una notevole contrazione dei volumi, come mostra chiaramente la fig. 9.6.

Per la contrazione dei volumi, i punti rappresentativi tendono a concentrarsi su uno o più insiemi di misura nulla, ossia un insieme la

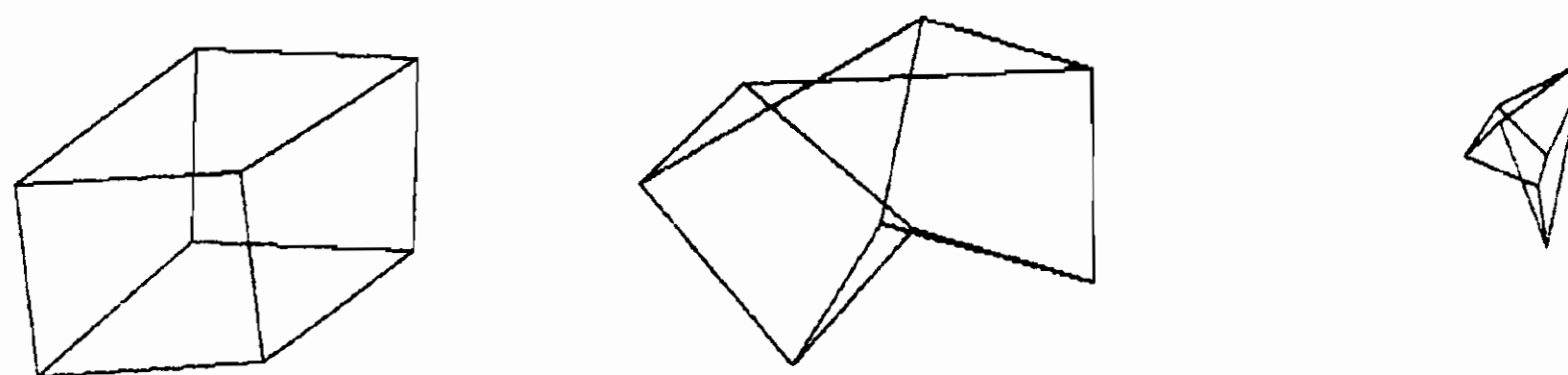


Figura 9.6: Tre momenti dell'evoluzione in funzione del tempo, di un volume inizialmente cubico nello spazio delle fasi per  $r = 0.5$ .

cui dimensione non può essere 3. Lorenz, [64], ha dimostrato l'esistenza di un'ellissoide limitato nello spazio delle fasi in cui tutte le traiettorie entrano (probabilmente questo ellissoide giace in  $Z \geq 0$ , sebbene non sia stato dimostrato [63]).

3- Punti fissi e loro stabilità: lo studio della stabilità dei punti fissi di un sistema dissipativo è molto importante in quanto in genere i punti fissi stabili costituiscono degli attrattori per il sistema; al contempo si può dire che i punti fissi instabili non possono essere degli attrattori.

Scrivendo le equazioni di Lorenz in forma compatta  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ , i punti fissi sono dati, secondo la (9.15), da  $\vec{F}(\vec{x}) = 0$ , ovvero:

$$\begin{cases} 0 = \sigma(Y - X) \\ 0 = rX - Y - XZ \\ 0 = XY - bZ \end{cases} \quad (9.63)$$

Risolvendo questo semplice sistema si ha che per  $r \leq 1$  esiste un solo punto fisso pari a  $O = (0, 0, 0)$  e per  $r > 1$  vi sono tre punti fissi:  $O$ ,  $C_{1,2} \equiv (\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$ .

Dalla eq. (9.16) si ha che lo studio della stabilità di un punto fisso,  $\vec{x}_f$ , si attua attraverso lo studio dello Jacobiano di  $\vec{F}(\vec{x}_f)$ . È bene ricordare che se l'autovalore maggiore ha la parte reale positiva allora il punto fisso é instabile. Per il punto  $O$  si ha:

$$\mathbf{J}(O) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ r & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -b \end{pmatrix} \quad (9.64)$$

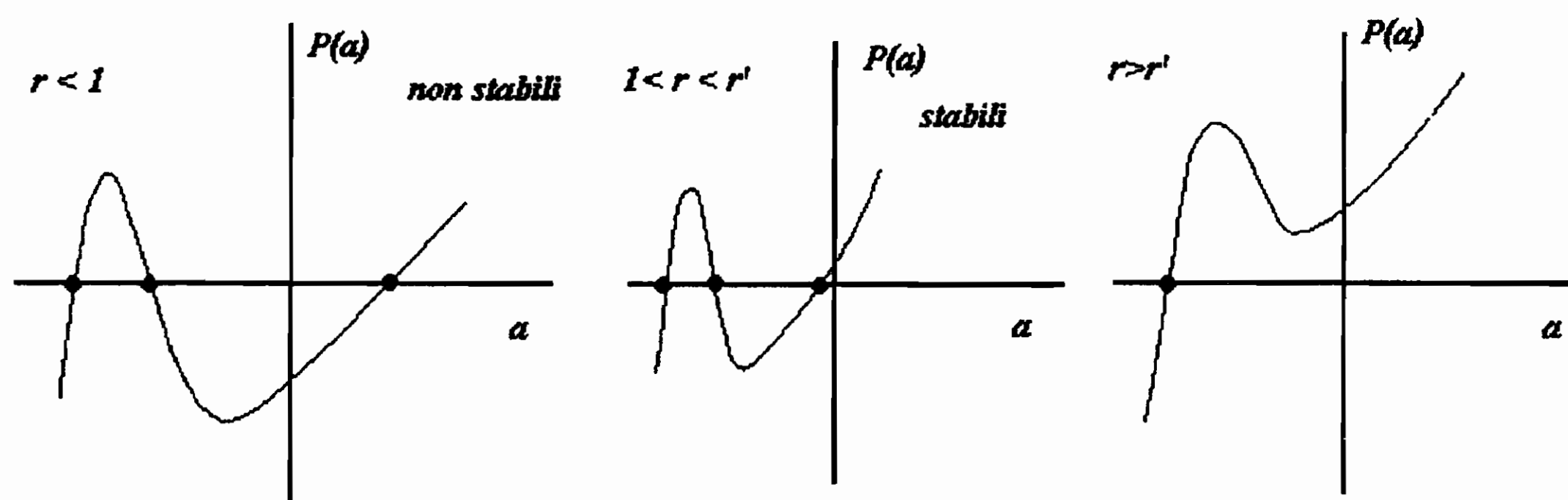


Figura 9.7: Andamento qualitativo del Polinomio  $P(a)$  per vari valori di  $r$ . I cerchietti pieni indicano le radici reali del Polinomio.

Gli autovalori si determinano dall'equazione :  $|\mathbf{J}(O) - a\mathbf{I}| = 0$ , dove  $\mathbf{I}$  indica la matrice identità, da cui si ottiene un polinomio di terzo grado,  $P(a)$ , in  $a$  in funzione dei parametri del sistema. Per la scelta dei parametri (9.60) si ha che per  $r < 1$  gli autovalori sono tutti negativi e quindi  $O$  è stabile, mentre per  $r > 1$  l'autovalore più grande è positivo e quindi  $O$  è instabile.

Anche per  $r = 1$  l'origine risulta essere un punto di equilibrio stabile. Per dimostrarlo basta prendere una funzione continua e definita positiva (funzione di Liapunov) del tipo:

$$V(X, Y, Z) = rX^2 + \sigma Y^2 + \sigma Z^2$$

Nel nostro caso ( $r = 1$ ,  $\sigma = 10$  e  $b = \frac{8}{3}$ ) diventa:

$$V(X, Y, Z) = X^2 + 10Y^2 + 10Z^2$$

Tale funzione soddisfa le proprietà  $V(0, 0, 0) = 0$ . Ora, se la derivata  $\dot{V}$  è negativa per tutte le soluzioni del sistema (9.26) il punto critico  $\vec{x} = \vec{0}$  [cfr. il sistema (9.15)] è stabile[63].

È facile verificare, usando le (9.26), che  $\dot{V} \leq 0$ ; infatti:

$$\dot{V} = 2(X\dot{X} + 10Y\dot{Y} + 10Z\dot{Z}) = -20\left[(X - Y)^2 + \frac{8}{3}Z^2\right] \leq 0$$

per qualunque valore di  $X, Y$  e  $Z$ . Quindi possiamo concludere che il punto  $O$  è stabile anche per  $r = 1$ .

Lo studio della stabilità dei punti  $C_{1,2}$  si effettua nello stesso modo, ossia determinando gli autovalori dello Jacobiano di  $\vec{F}(C_{1,2})$  e ottenendo il polinomio  $P(a)$ , le cui radici sono appunto gli autovalori cercati. La fig.9.7, riproduce l'andamento di  $P(a)$  per vari valori di  $r$ . Si possono individuare tre valori importanti del parametro  $r$ :  $1$ ,  $r^1$  e  $r_c$ .

Per  $r > 1$  l'autovalore maggiore è positivo ed i punti fissi  $C_{1,2}$  sono instabili.

Per  $1 < r < r^1$  l'autovalore maggiore è negativo ed i punti fissi  $C_{1,2}$  sono stabili.

Per  $r^1 < r < r_c$  un autovalore è negativo e gli altri due autovalori sono complessi; la loro parte reale è negativa, quindi i punti  $C_{1,2}$  sono ancora stabili.

Per  $r > r_c$  un autovalore è negativo e gli altri due autovalori sono complessi; la loro parte reale è ora positiva, quindi i punti  $C_{1,2}$  sono instabili.

Per  $r = r_c$  i due autovalori complessi sono immaginari puri. La condizione  $a_{1,2} = \pm ia_0$  permette di calcolare  $r_c$  ottenendo  $r_c \sim 24.74$ .

Il valore di  $r^1$  è stato determinato numericamente e vale  $r^1 = 24.06[63]$ .

Quanto sopra si può dedurre dalle equazioni di Lorenz senza risolverle. Essendo il sistema di equazioni di Lorenz non integrabile, per approfondirne la comprensione è necessario studiare le soluzioni numeriche ottenute con i metodi di cui si è già parlato nel §9.3.

## 9.8 Studio comparato traiettorie - fluido

Il comportamento del fluido tra le due lastre di fig. 9.5 può essere studiato e capito attraverso esperimenti numerici effettuati con un calcolatore.

In questo § mostriamo i risultati alcuni esperimenti numerici svolti sia al fine di evidenziare la dinamica dei cambiamenti che il sistema subisce al

variare del parametro  $r$ , sia il movimento che subiscono le particelle del fluido nello spazio vero, tra le due lastre di fig. 9.5, in funzione del tempo e in corrispondenza delle traiettorie percorse dagli stati nello spazio delle fasi.

Va infatti richiamato che  $X$  è una velocità, ma  $Y$  e  $Z$  sono variabili, diciamo, complicate legate a caratteristiche non cinematiche del fluido. Nello spazio vero il moto viene assunto nel piano  $[y,z]$  per cui si può assumere il tempo come terzo asse. Le figure si possono produrre usando la procedura illustrata nella fig. 9.3.

### 9.8.1 Risultati numerici

La discussione dei risultati viene fatta per diversi ed opportuni valori del parametro  $r$ .

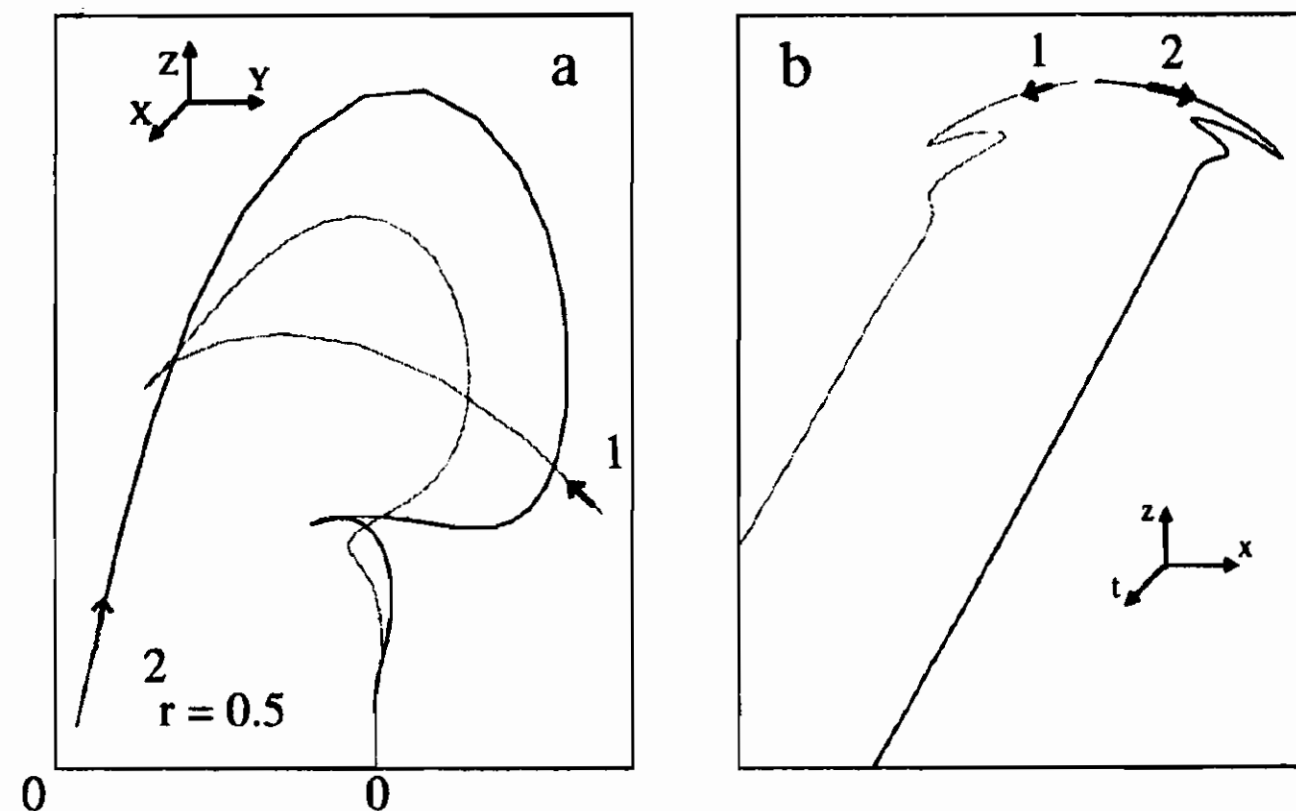


Figura 9.8: a- L'origine è l'attrattore universale per il sistema; b- Andamento del fluido (le figure tridimensionali sono disegnate usando la procedura illustrata in fig. 9.3; le scale sono arbitrarie.)

I-  $r \leq 1$ : come abbiamo visto nel §9.8, per valori  $r \leq 1$  il sistema ammette un unico punto critico stabile, l'origine. Nelle fig.9.8a,b abbiamo assunto a titolo di esempio  $r = 0.5$ .

In fig. 9.8a è visualizzato l'andamento di due stati nello spazio delle fasi ovvero ossia di due traiettorie molto diverse, con condizioni iniziali:  $P_1(-3, -52, -5)$ ,  $P_2(+18, +56, +31)$ , Si può notare come entrambe

le traiettorie tendono all'origine, punto che rappresenta l'attrattore universale per il sistema.

In fig. 9.8b viene riportato il movimento della particella di fluido: in entrambi i casi all'inizio il fluido ha un comportamento oscillatorio, con il trascorrere del tempo il moto si regolarizza e la sua velocità tende a zero (infatti le curve del moto diventano parallele all'asse  $t$ ).

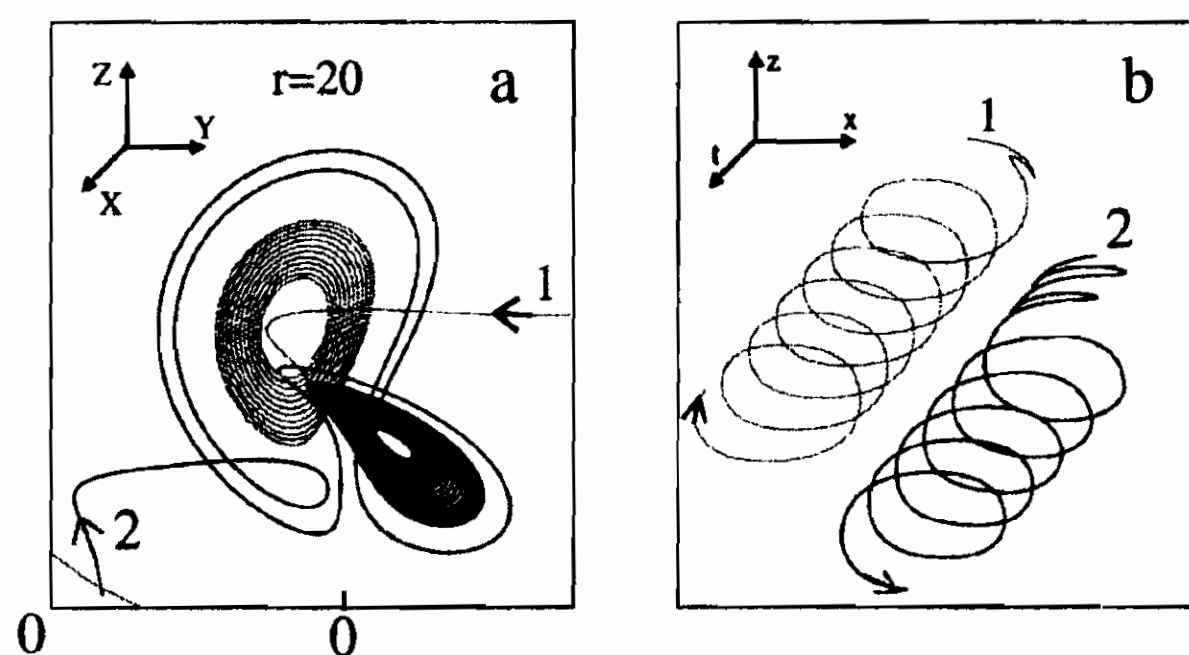


Figura 9.9: a- Coesistenza degli attrattori  $C_1$  e  $C_2$ ; b- moto delle particelle di fluido nello spazio vero (le figure tridimensionali sono disegnate usando la procedura illustrata in fig. 9.3; le scale sono arbitrarie).

II-  $1 < r \leq 24.06$ : si trova numericamente che  $r = 24.06$  è il valore di  $r$  per cui gli autovalori della matrice Jacobiana calcolata in  $C_1$  e  $C_2$  sono tutti reali [50]. I risultati dell'esperimento, ottenuti per  $r = 20$ , sono riportati nella fig. 9.9.

Ricordiamo che per questi valori di  $r$  i due punti critici sono stabili e sono due attrattori, mentre l'origine è un punto instabile. Si osserva che in questo caso  $C_1$  e  $C_2$  non sono attrattori universali in quanto c'è coesistenza dei due nello spazio delle fasi, come si può notare dalla fig. 9.9a.

La traiettoria con condizioni iniziali  $X_1 = 36$ ,  $Y_1 = 9$ ,  $Z_1 = 23$  approccia il punto  $C_1$ , mentre la traiettoria con condizioni iniziali  $X_2 = -16$ ,  $Y_2 = -7$ ,  $Z_2 = -21$  approccia il punto  $C_2$ .

In entrambi i casi, dopo un breve tratto iniziale di tipo oscillatorio, il moto diventa un vortice, la velocità approccia un valore costante (equidistanza tra le due spirali). Ciò che differenzia il moto vero nei due casi è il verso di percorrenza: se la traiettoria gira intorno a  $C_1$  la

particella di fluido si muove in un vortice in senso orario, se gira intorno a  $C_2$  la particella di fluido si muove in un vortice in senso antiorario.

III-  $r > 24.74$ : per questi valori di  $r$ , il sistema presenta ben tre punti critici che sono tutti instabili,  $C_1$ ,  $C_2$  e l'origine.

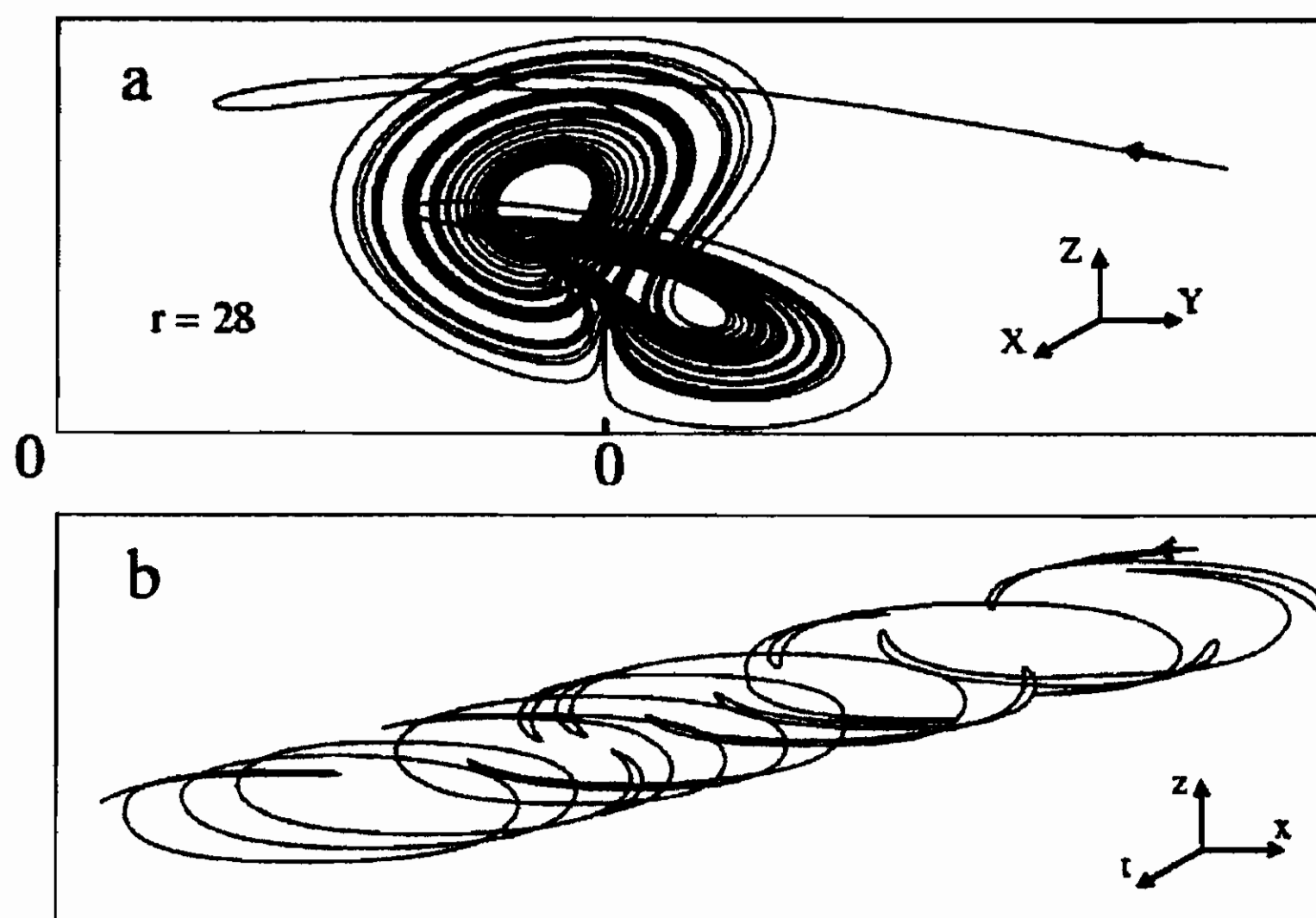


Figura 9.10: a- Attrattore di Lorenz per  $r = 28$ ; b- traiettorie delle particeloe di fluido nello spazio vero in funzione del tempo (le figure tridimensionali sono disegnate usando la procedura illustrata in fig. 9.3; le scale sono arbitrarie).

Il caso è quello studiato originariamente dallo stesso Lorenz[65] ( $r = 28$ ) ed i risultati sono riprodotti in fig. 9.10. Si noti (fig.9.10a) che la traiettoria nello spazio delle fasi sembra che si intersechi. In realtà questo è solo un effetto dovuto alla proiezione bidimensionale dovuto alla procedura adottata: non ci sono intersezioni nello spazio delle fasi tridimensionale.

Cerchiamo ora di spiegare come evolve lo stato fisico rappresentato dalla traiettoria nello spazio delle fasi. Usiamo la seguente condizione iniziale:  $X = 40$ ,  $Y = 15$ ,  $Z = 23$ .

La traiettoria, gira alternativamente intorno a  $C_1$  e  $C_2$  [66]. Il numero di giri che la traiettoria fa intorno a  $C_1$  e  $C_2$  varia in modo del tutto imprevedibile e la sequenza del numero dei giri ha tutte le caratteristiche di una sequenza casuale[65].

Dal punto di vista del moto vero delle particelle di fluido (fig.9.10b)



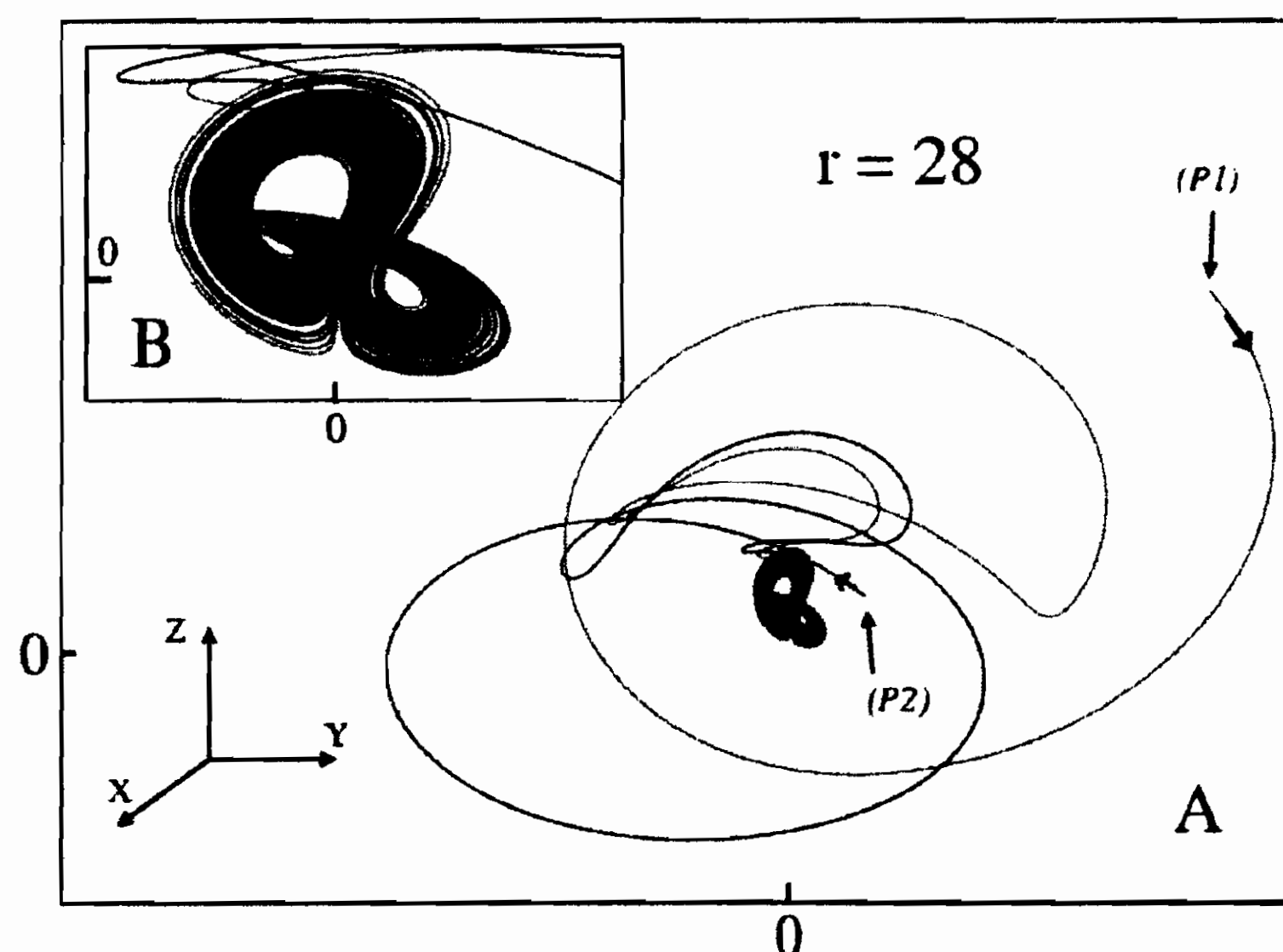


Figura 9.11: a- Attrattore di Lorenz: è un attrattore universale per  $r = 28$ . Qualunque sia la condizione iniziale, la soluzione tende a muoversi sull'attrattore. Sono state fissate le condizioni iniziali:  $P_1 : (X_1 = 100, Y_1 = 100, Z_1 = 100)$  e  $P_2 : (X_2 = -100, Y_2 = 90, Z_2 = 130)$  b - nell'inserto è mostrato ingrandito l'attrattore di Lorenz di figura A (le figure tridimensionali sono disegnate usando la procedura illustrata in fig. 9.3; le scale sono arbitrarie).

ciò significa che dopo uno stato di moto oscillatorio (cioè fino a quando la traiettoria nello spazio delle fasi arriva abbastanza vicino a  $C_1$ ), il fluido inizia il suo moto vorticoso in senso antiorario. Quando la traiettoria nello spazio delle fasi si sposta verso  $C_2$ , il fluido ha un repentino cambio di verso di percorrenza e per tutto il tempo in cui la traiettoria gira intorno a  $C_2$  continua il suo moto vorticoso invertito, poi cambia ancora verso e così via. Risulta quindi essere un moto caotico del fluido perchè il cambio di verso dei vortici non è prevedibile e avviene molto repentinamente.

Se pensiamo che la traiettoria rappresentata si sviluppa in un sistema di riferimento tridimensionale, questa sembra assumere la forma delle ali di una farfalla. La traiettoria tende ad addensarsi su una regione limitata dello spazio delle fasi di volume nullo e questa zona è detta *l'attrattore di Lorenz*.

Osserviamo che in questo intervallo di valori di  $r$ , l'attrattore di Lorenz costituisce l'attrattore universale del sistema.

Nella fig.9.11 è riportato l'andamento di due traiettorie con condizioni iniziali lontane dall'origine e si può notare che, dopo un breve periodo di tempo, entrambe le traiettorie si muovono sull'attrattore. Qualunque sia la condizione iniziale nello spazio delle fasi la soluzione corrispondente viene comunque attratta dall'attrattore di Lorenz. Il suo bacino di attrazione è tutto lo spazio delle fasi, quindi quello di Lorenz è un attrattore universale.

IV-  $24.06 < r < 24.74$ : per questi valori di  $r$  i punti  $C_1$  e  $C_2$  sono stabili, gli autovalori della matrice Jacobiana corrispondente sono immaginari e l'origine è un punto critico instabile. La simulazione è stata fatta per  $r = 24.09$ .

Anche in questo caso si ha la coesistenza di tre attrattori: i punti  $C_1$ ,  $C_2$  e l'attrattore di Lorenz. Nella fig.9.12 è visualizzata la situazione nello spazio delle fasi usando tre condizioni iniziali diverse:  $P_1(20, -16, 40.2)$ ,  $P_2(6, 10, 27.2)$ ,  $P_3(-6, -10, 27.2)$ , rispettivamente.

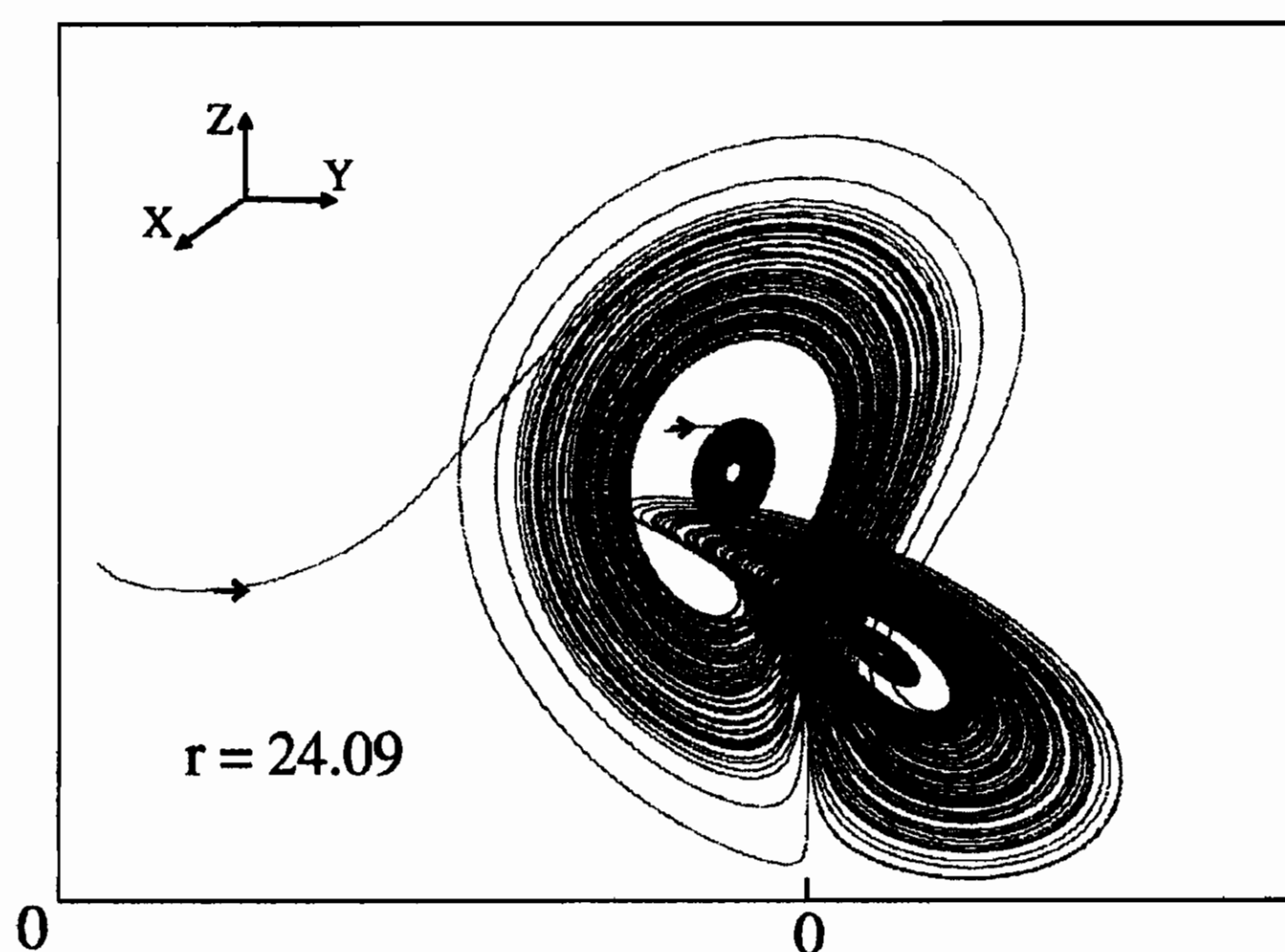


Figura 9.12: Coesistenza dei tre attrattori per  $r = 24.09$  (la figura tridimensionale è disegnata usando la procedura di fig. 9.3; le scale sono arbitrarie).

La traiettoria con condizione iniziale  $P_1$  va a finire sull'attrattore di Lorenz, mentre quelle con condizioni iniziali  $P_2$  e  $P_3$  sono attratte

rispettivamente da  $C_1$  e  $C_2$ .

$V- r > 200$ : il moto tende a percorrere un'orbita periodica. In questo caso, dopo un certo tempo non sembra avvenire più alcun movimento e sullo schermo del computer si evidenzia una linea chiusa che col tempo non si modifica, come mostra la fig.9.13. Questo comportamento si ha per tutti i valori di  $r > 200$ , ma non solo per quelli: vi sono infatti altri intervalli con  $r < 200$  per cui si hanno orbite periodiche attrattive[63].  
bibliografia

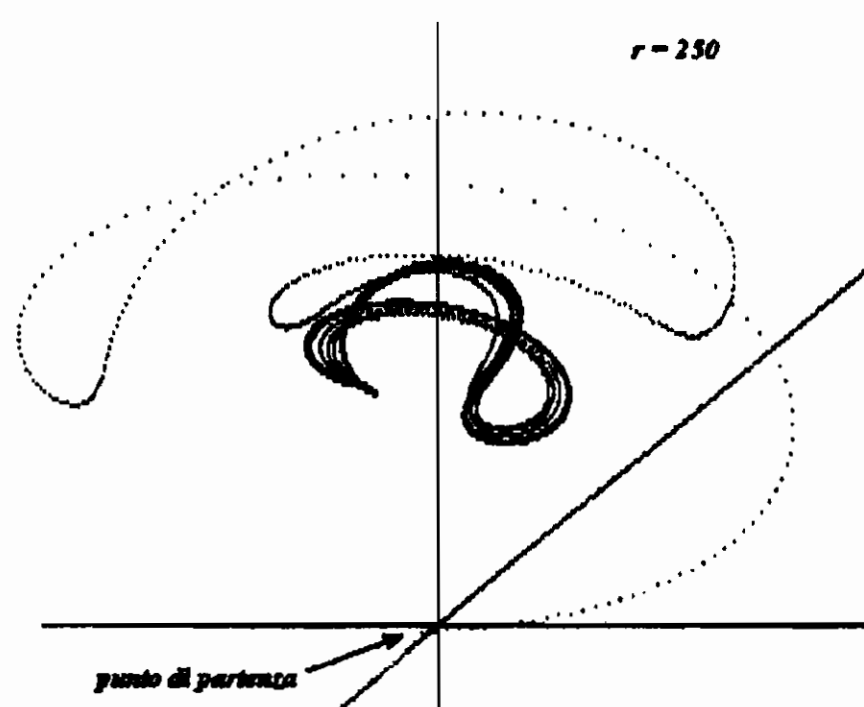


Figura 9.13: Una traiettoria nello spazio delle fasi del sistema di Lorenz che tende ad un'orbita periodica (la figura tridimensionale è disegnata usando la procedura di fig. 9.3; le scale sono arbitrarie).

## 9.9 Caos e ordine

È importante sottolineare ancora una volta che l'attrattore di Lorenz possiede la proprietà di essere sensibile alle condizioni iniziali.

Per analizzare questo aspetto del problema consideriamo il caso  $r = 28$ . Nella fig. 9.14 è riportato l'andamento delle  $X$  in funzione del tempo  $t$ . Le  $X(t)$  sono le soluzioni del sistema (9.47) corrispondenti alle seguenti condizioni iniziali:  $P_1(1, 0, 1)$ ,  $P_2(1.001, 0, 1)$ .

Osserviamo che la differenza tra le condizioni iniziali è molto piccola, però dalla figura risulta chiaro che, dopo un breve periodo nel quale

il comportamento è simile, le due  $X(t)$  cominciano a comportarsi in maniera molto diversa a cominciare da  $t$  un poco superiore a  $t = 20$ . Questo è quello che Lorenz chiama *effetto farfalla*: piccole variazioni

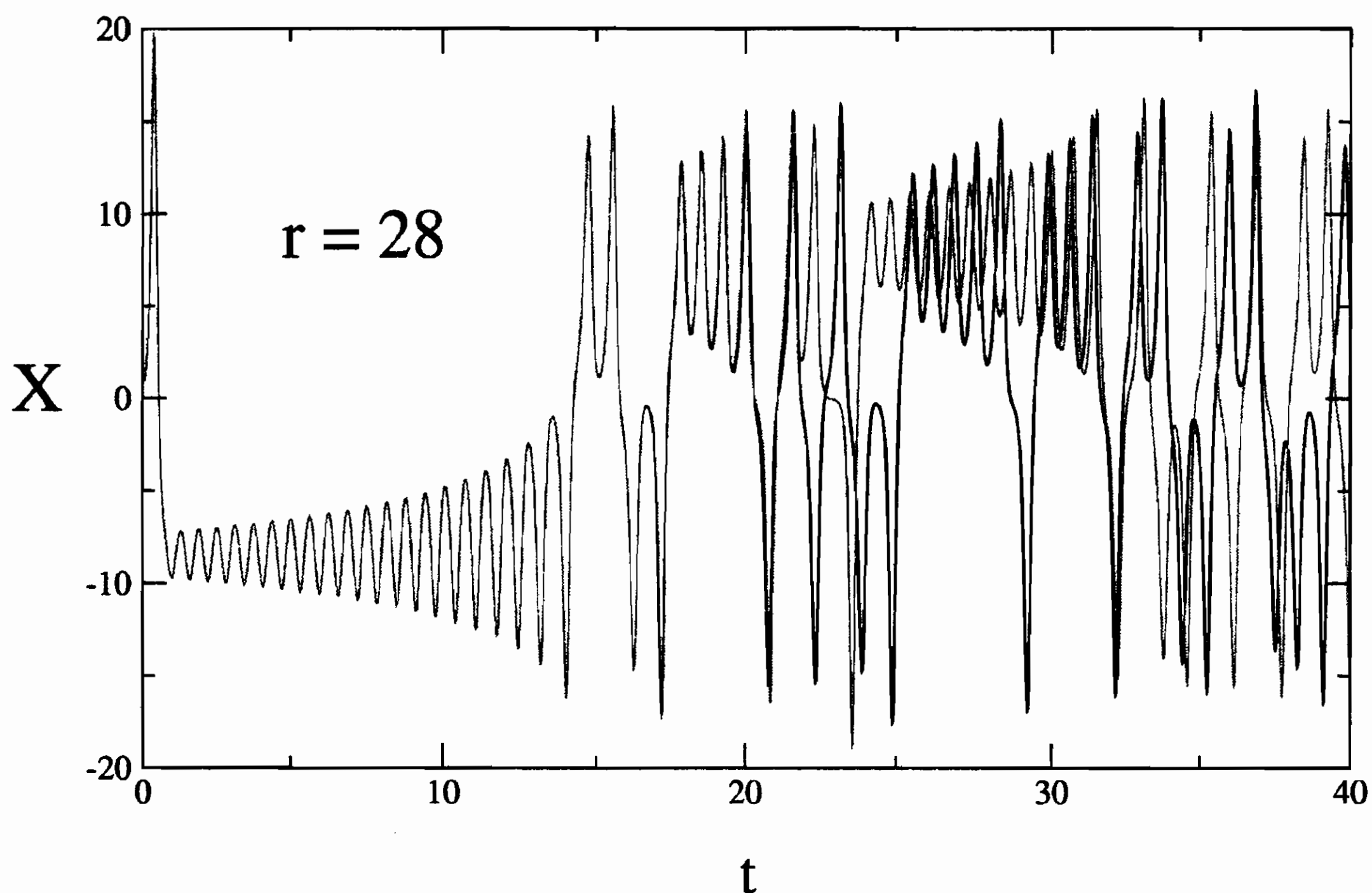


Figura 9.14: Dipendenza dalle condizioni iniziali di  $X(t)$  (scala arbitraria).

La caoticità implica una forte imprevedibilità ed irregolarità della dinamica; ad esempio già dopo un breve tempo non siamo più in grado di prevedere quanti giri la traiettoria farà intorno a  $C_1$  e quanti intorno a  $C_2$ .

In questo sistema, nel quale a prima vista sembra regni il caos, in realtà regna *un certo ordine*.

Benchè da un punto di vista dinamico, nel regime caotico, il sistema di Lorenz sia altamente instabile ed imprevedibile, da un punto di vista statistico presenta una forte stabilità.

Questa è una caratteristica generale dei sistemi caotici: ad una forte instabilità dinamica è sempre correlata una forte stabilità statistica. Anche se si allontanano presto una dall'altra presentando comportamenti

## 9.10. ESPONENTI DI LIAPUNOV ED EQUAZIONI DI LORENZ 277

molto diversi, le singole traiettorie danno luogo a comportamenti statistici molto simili, ad esempio i valori medi delle grandezze dinamiche calcola<sup>1</sup>

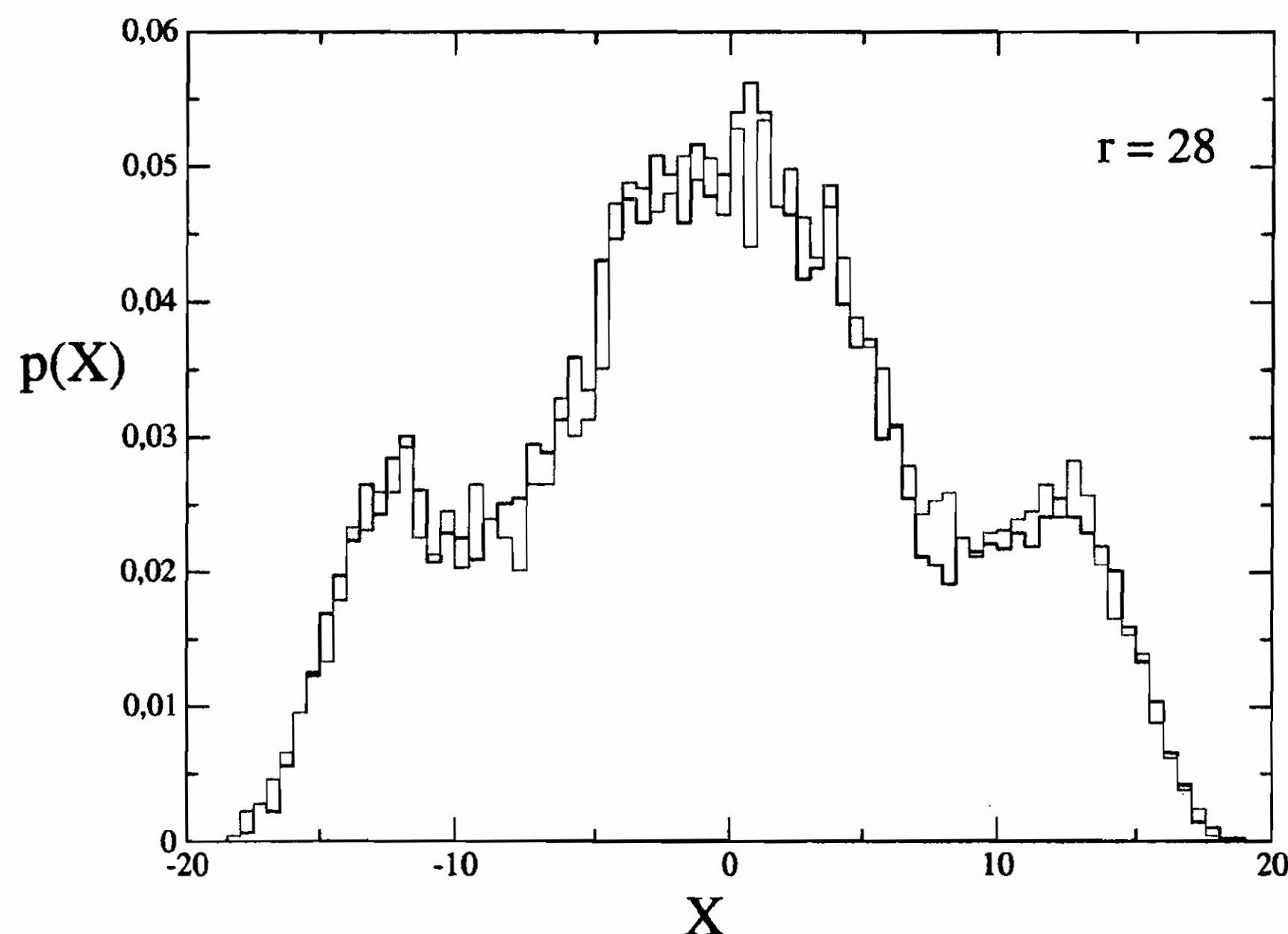


Figura 9.15: Distribuzione di probabilità per le  $X$  nel caso  $r=28$

Per mostrare una tale proprietà dei sistemi caotici, nella fig.9.15 riportiamo la distribuzione di probabilità  $p(X)$  dei valori della  $X$  del sistema di Lorenz, per  $r = 28$  (regime caotico), ottenuti a partire da due diverse condizioni iniziali. Come si può vedere le due distribuzioni sono molto simili, mostrando che le proprietà statistiche sono indipendenti dalle condizioni iniziali, sebbene i comportamenti differiscano molto nei dettagli.

## 9.10 Esponenti di Liapunov ed equazioni di Lorenz

Fin qui è stata identificata una proprietà che differenzia il moto regolare da quello caotico: la sensibilità alle condizioni iniziali. Caratteristica del moto caotico è, infatti, la divergenza esponenziale di traiettorie vicine

che, se il moto è confinato, viene assunta come sua definizione (di moto caotico) e sono appunto gli esponenti di Liapunov che forniscono una misura quantitativa della divergenza.

È possibile ottenere una misura quantitativa di questa proprietà attraverso il calcolo dell'esponente di Liapunov massimo associato ad un traiettoria.

Richiamiamo qui dei concetti utili per la comprensione e l'uso degli esponenti di Liapunov nei flussi continui.

1- Medie Temporal: dato un sistema dinamico  $\dot{\vec{x}}(t) = \vec{f}^t \vec{x}_0$  ed una funzione  $\phi$  dello spazio delle fasi, si definisce la media temporale di  $\phi$  lungo una traiettoria che passa per  $\vec{x}$  come:

$$\phi^*(\vec{x}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \phi(\vec{f}^t \vec{x}) dt \quad (9.65)$$

nel caso di un flusso continuo e:

$$\phi^*(\vec{x}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \phi(\vec{f}^n \vec{x}) \quad (9.66)$$

nel caso di una mappa discreta unidimensionale. Per un celebre teorema di Birkhoff[68], se  $\phi$  è una funzione definita sullo spazio delle fasi e la media si fa su traiettorie appartenenti ad un sottoinsieme invariante e limitato dello spazio delle fasi (gli attrattori di §9.2.4 sono insiemi invarianti e limitati) si ha che: il limite (9.65) esiste ed è finito; ed è indipendente dal punto della traiettoria da cui si parte per calcolarlo:  $\phi^*(\vec{x}) = \phi^*[\vec{f}^t(\vec{x})]$ .

2- Medie Spaziali: data una distribuzione  $P(\vec{x})$  definita su  $\Omega$ , con  $\Omega$  sottoinsieme invariante dello spazio delle fasi, in modo tale che  $\int_{\Omega} P(\vec{x}) d\vec{x} = 1$ , questa permette di definire una media spaziale per ogni  $\phi$ :

$$\bar{\phi} = \int_{\Omega} P(\vec{x}) \phi(\vec{x}) d\vec{x} \quad (9.67)$$

3- Ergodicità: un sistema si definisce ergodico se, data una distribuzione  $P(\vec{x})$  definita come sopra, per ogni  $\phi$  definita su  $\Omega$  si ha:

$$\phi^*(\vec{x}) = \bar{\phi} \quad (9.68)$$

per ogni  $\vec{x}$  appartenente ad  $\Omega$ . Ciò equivale a dire che le medie temporali sulla maggior parte delle traiettorie (a meno di un insieme di misura nulla) sono uguali e pari alla media spaziale definita sopra. Intuitivamente si comprende che ciò è possibile solo se ogni traiettoria esplora tutto  $\Omega$ , ossia passa arbitrariamente ed infinitamente spesso vicino ad ogni punto.  $P(\vec{x})$  si può vedere come una funzione che indica la frequenza con cui le parti dell'insieme  $\Omega$  sono visitate dalle traiettorie. Nel caso degli attrattori, che sono insiemi invarianti e limitati, il moto su di essi si assume ergodico. Definita una opportuna  $P(\vec{x})$  si ha che per ogni  $\phi$  definita nel suo bacino di attrazione vale l'equazione  $\phi^*(\vec{x}) = \bar{\phi}$  per ogni  $\vec{x}$  appartenente al bacino di attrazione ( $\bar{\phi}$  è la media spaziale sull'attrattore).

Poichè le traiettorie tendono ad avvicinarsi sempre più ai punti dell'attrattore, per continuità tendono a comportarsi come le traiettorie dell'attrattore stesso e la media temporale delle traiettorie del bacino di attrazione tende alla media spaziale sull'attrattore per l'ergodicità di questo.

4- L'esponente di Liapunov per una mappa unidimensionale: l'equazione (9.14) di stabilità del §9.2.3:  $\vec{\epsilon}_n = \prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{J}(\vec{x}_i) \vec{\epsilon}_0$  si riduce, per una mappa unidimensionale, a  $\epsilon_n = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df}{dx}(x_i) \epsilon_0$ . L'esponente di Liapunov per una mappa unidimensionale è definito come [cfr. la eq. (9.24)]:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x_0)}{dx_0} \right| \quad (9.69)$$

Notando che  $\frac{d}{dx} f^n(x_0) = \frac{d}{dx} f^n(x)|_{x=x_0}$  e che  $f^n(x_0) = x_n$ , si ha che:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} f^n(x_0) &= \frac{d}{dx} f(f^{n-1}(x_0)) = \frac{d}{dx} f(x_{n-1}) = \\ &= \frac{d}{dx} f^{n-1}(x_0) = \dots = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{df}{dx}(x_i) \end{aligned} \quad (9.70)$$

L'esponente di Liapunov si può quindi scrivere come:

$$\lambda(x_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \prod_{i=0}^{n-1} \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln \left| \frac{df}{dx}(x_i) \right| \quad (9.71)$$

Confrontando questa equazione con la (9.66) si vede come l'esponente di Liapunov sia la media temporale del logaritmo di una funzione che indica l'instabilità locale dei punti della traiettoria. Da questo si può concludere che  $\lambda(x_0)$  è un indicatore dell'instabilità asintotica delle traiettorie. Inoltre se  $\Omega$  è un sottospazio su cui il moto è ergodico o è esso stesso il bacino di attrazione di un attrattore allora:  $\lambda(x_0)$  esiste per ogni  $x_0$  appartenente ad  $\Omega$  ed è indipendente da  $x_0$ .

Nel caso delle mappe multidimensionali discrete gli esponenti di Liapunov sono in numero pari alla dimensione dello spazio delle fasi del sistema: dalla equazione (9.14), chiamati  $j_i(n)$  gli autovalori della matrice  $\prod_{i=0}^{n-1} \mathbf{J}(\vec{x}_i)$ , gli esponenti di Liapunov sono definiti come:

$$\lambda_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |j_i(n)|.$$

Quanto detto per le mappe unidimensionali discrete sull'intima connessione tra l'esponente di Liapunov ed il concetto di instabilità locale dei punti di una traiettoria e sulle sue proprietà in un sistema ergodico vale anche per le mappe multidimensionali discrete, fatte le debite precisazioni. Per questi ultimi casi comunque ci limitiamo ad enunciare solo le caratteristiche più importanti.

Dato un flusso continuo  $M$  dimensionale generato da un sistema di equazioni autonomo di primo grado  $\dot{\vec{x}} = \vec{F}(\vec{x})$ , detti  $\vec{x}_0$  ed  $\vec{x}_0 + \vec{w}_0$  due punti inizialmente vicini di due traiettorie vicine, come già visto nel §9.2.3, la loro distanza evolve come:  $\frac{d\vec{w}}{dt} = \mathbf{J}(\vec{x})dt$ , con gli elementi di matrice dello Jacobiano dati da  $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} |_{\vec{x}=\vec{x}_0}$ . Ponendo  $d(t) = |\vec{w}(t)|$ , il tasso di divergenza esponenziale medio delle due traiettorie è definito come:

$$\lambda^*(\vec{x}_0, \vec{w}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{d(\vec{x}_0, t)}{d(\vec{x}_0, 0)} \quad (9.72)$$

Nella pratica si assume che le seguenti asserzioni siano vere (ad alcune delle quali abbiamo accennato già in precedenza):

- a) per ogni  $\vec{x}_0$   $\lambda^*(\vec{x}_0, \vec{w}_0)$  esiste ed è finito;
- b) esiste una base  $\vec{e}_j$   $M$ -dimensionale per  $\vec{w}_0$  tale che, per ogni  $\vec{w}_0$ ,  $\lambda^*$  assume uno dei valori che avrebbe assunto se  $\vec{w}_0$  fosse stato orientato come uno degli  $\vec{e}_j$ , ossia:  $\lambda^*(\vec{x}_0, \vec{e}_j) = \lambda_j^*(\vec{x}_0)$ ,  $\lambda_j^*(\vec{x}_0)$  non dipendono dal



punto della traiettoria da cui si calcolano. I parametri  $\lambda_j$  sono gli  $M$  esponenti di Liapunov della traiettoria;

c) gli  $M$   $\lambda_j$  si possono ordinare per grandezza  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$  da cui si ha l'ordinamento per i vettori  $\vec{e}_j$ :  $\vec{e}_1 \geq \vec{e}_2 \geq \dots \geq \vec{e}_M$ . Chiamato  $\mathbf{E}_i$  il sottospazio generato dai vettori  $\vec{e}_j$  tali che  $\vec{e}_j \leq \vec{e}_i$  si ha che se  $\vec{w}_0$  giace in  $\mathbf{E}_i$ , mentre  $\lambda^*(\vec{x}_0, \vec{w}_0) = \lambda_i$ , ossia il tasso di divergenza è pari all'esponente massimo corrispondente al sottospazio in cui giace  $\vec{w}_0$ . Da ciò consegue che per la maggior parte delle scelte di  $\vec{w}_0$ ,  $\lambda^*(\vec{x}_0, \vec{w}_0) = \lambda_1 = \lambda_{max}$ , avendo  $\mathbf{E}_2$  misura nulla rispetto ad  $\mathbf{E}_1$ . Questo si può capire intuitivamente notando che  $\vec{w}_0$  tende nel tempo ad orientarsi lungo la direzione di maggiore instabilità;

d) per tutte le traiettorie che appartengono ad un sottoinsieme ergodico o allo stesso bacino di attrazione gli esponenti di Liapunov  $\lambda_i$  non dipendono dalla traiettoria scelta;

e) per un flusso continuo un esponente di Liapunov è sempre nullo se il moto asintotico del sistema non si riduce ad un punto fisso. Per un'orbita periodica questo non è difficile da capire qualora si sceglia  $\vec{e}_j$  lungo la direzione tangente al moto nel punto considerato, poichè la distanza di due punti sull'orbita periodica torna ad essere la stessa ad intervalli di tempo periodici. Per una traiettoria non periodica, per l'ergodicità del moto, questa tornerà in prossimità del punto di partenza infinite volte. Ciò implica ancora che un esponente di Liapunov sia nullo [54, 55, 56].

È importante, per quel che si deve discutere nel seguito, considerare esponenti di Liapunov di ordine superiore. Si definisce il tasso medio di divergenza esponenziale di un volume  $p$ -dimensionale nello spazio delle fasi  $M$ -dimensionale come:

$$\nu^{*(p)}(\vec{x}_0, V_p(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{V_p(0) \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \left| \frac{V_p(\vec{x}_0, t)}{V_p(\vec{x}_0, 0)} \right| \quad (9.73)$$

$\nu^{*(p)}$  è detto *esponente di Liapunov di ordine  $p$* .  $V_p(\vec{x}_0, t)$  è dato dal prodotto di  $p$  vettori  $\vec{w}(t)$  e come la maggior parte delle scelte di  $\vec{w}_0$  determina l'esponente massimo, così per la maggior parte delle scelte del volume iniziale  $V_p(\vec{x}_0, 0)$ , l'esponente di Liapunov di ordine  $p$  è

dato dalla somma dei  $p$  più grandi esponenti di Liapunov di ordine 1:  $\nu^{*(p)} = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_p$ . Se  $p = M$  si ha:  $\nu^{*(M)} = \sum_{i=1}^M \nu_i$ , ossia il tasso di crescita dei volumi dello spazio delle fasi è determinato dalla somma di tutti gli esponenti di Liapunov.

La sensibilità alle condizioni iniziali, come già discusso, si riferisce alla proprietà delle traiettorie inizialmente vicine di allontanarsi rapidamente una dall'altra.

Dato un Sistema  $M$  dimensionale siano  $\vec{x}_0$  ed  $\vec{x}_0 + \vec{d}_0$  due punti inizialmente vicini, distanti  $d_0 = |\vec{d}_0|$ . Considerate le traiettorie che passano per questi due punti, si può definire lo scalare  $d(t)$  che indica la distanza dei due punti considerati al tempo  $t$ . Si può inoltre definire un tasso di divergenza medio per le traiettorie che partono nell'intorno del punto  $\vec{x}_0$  nella direzione definita da  $\vec{d}_0$ :

$$\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{d_0 \rightarrow 0} \frac{1}{t} \ln \frac{d(t)}{d_0} \quad (9.74)$$

Per comprendere meglio il significato di questa grandezza si considerino i seguenti esempi: supponiamo che  $d(t) = d_0 \exp(\alpha t)$ , con  $\alpha > 0$ , ossia che le traiettorie divergano esponenzialmente nel tempo, il tasso di divergenza medio in questo caso è positivo:  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0) = \alpha > 0$ . Se  $\alpha$  fosse negativo anche il tasso di divergenza medio lo sarebbe, indicando così un'avvicinamento esponenziale delle traiettorie col passare del tempo. Si noti infine che un andamento potenziale della distanza delle traiettorie nel tempo, ad esempio  $d(t) = d_0 t^\beta$ , darebbe un tasso di divergenza medio nullo, infatti:  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \beta \ln(t) = 0$ , per ogni valore di  $\beta$ .

In generale la grandezza  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0)$  dipende solo da  $\vec{x}_0$  e dalla direzione di  $\vec{d}_0$  ma non dal suo modulo che si fa tendere a zero.

È da considerarsi un'evidenza degli esperimenti numerici che per molti sistemi dinamici vi sono regioni dello Spazio delle Fasi in cui la maggior parte delle traiettorie (e con il termine *la maggior parte* si intende almeno di un insieme di misura nulla) presentano sensibilità alle condizioni iniziali, e regioni in cui la maggior parte delle traiettorie non presentano questa sensibilità. Si indicano le prime con il termine di regioni caotiche e le seconde con il termine di regioni regolari.

Seguendo in particolare le referenze [56, 69], si possono fare le asserzioni che seguono e che si danno senza dimostrazione. Queste ultime, invero, si possono dimostrare soltanto partendo da ipotesi a loro volta difficilmente verificabili per la maggior parte dei sistemi dinamici. Quindi la veridicità delle asserzioni a cui facciamo riferimento possono considerarsi verificate negli esperimenti numerici fino ad ora svolti.

Se le traiettorie giacciono in regioni regolari il tasso di divergenza esponenziale è minore od uguale a zero.

Se le traiettorie giacciono in regioni caotiche le seguenti asserzioni sono vere:

- a) Per la maggior parte delle scelte di  $\vec{x}_0$ ,  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0)$  esiste ed è finito.
- b) Per la maggior parte delle scelte di  $\vec{x}_0$ ,  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0)$  non dipende da  $\vec{x}_0$ . Ciò implica che può dipendere solo dalla direzione di  $\vec{d}_0$ , una volta scelta si ottiene sempre lo stesso tasso di divergenza che si può quindi esprimere in funzione del vettore unitario  $\vec{v} = \vec{d}_0/d_0$ :  $\sigma(\vec{x}_0, \vec{d}_0) = \sigma(\vec{v})$ .
- c) Esiste una base ortonormale  $\vec{e}_i$   $M$  dimensionale per  $\vec{v}$  tale che  $\sigma(\vec{v})$  può assumere al più  $M$  valori distinti  $\lambda_i$  in corrispondenza delle  $M$  direzioni distinte definite dagli  $\vec{e}_i$ , ossia  $\sigma(\vec{e}_i) = \lambda_i$ .

Gli scalari  $\lambda_i$  sono gli  $M$  esponenti di Liapunov della regione caotica considerata.

- d) Gli  $M$  esponenti di Liapunov si possono ordinare per grandezza  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_M$ ;  $\lambda_1$  è l'esponente di Liapunov massimo.

- e) Per la maggior parte delle scelte del vettore  $\vec{v}$  il tasso di divergenza è uguale all'esponente di Liapunov massimo. In corrispondenza dell'ordinamento degli esponenti di Liapunov, si ha un ordinamento per i vettori  $\vec{e}_i$ :  $\vec{e}_1 \geq \vec{e}_2 \geq \dots \geq \vec{e}_M$ . Che per la maggior parte delle scelte del vettore  $\vec{v}$  il tasso di divergenza è uguale all'esponente di Liapunov massimo, si può mostrare nel seguente modo: se scriviamo  $\vec{v} = \sum_{i=1}^M (c_i \vec{e}_i)$ , il tasso di divergenza lungo la direzione  $\vec{v}$  assume il valore dell'esponente di Liapunov corrispondente al primo coefficiente diverso da 0, si può dire che  $\vec{v}$  tende ad orientarsi nella direzione di maggior divergenza. Si può inoltre mostrare che per la maggior parte delle scelte



maggior parte delle scelte di  $\vec{d}_0$  determina l'esponente massimo, così per la maggior parte delle scelte del volume iniziale  $V_p(\vec{x}_0, 0)$  l'esponente di Liapunov di ordine  $p$  è dato dalla somma dei  $p$  più grandi esponenti di Liapunov di ordine 1 :  $\sigma^{(p)} = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_p$ .

Se  $p = M$  si ha:  $\sigma^{(M)} = \sum_{i=1}^M \lambda_i$ , ossia il tasso di crescita dei volumi dello Spazio delle Fasi è determinato dalla somma di tutti gli esponenti di Liapunov.

## 9.11 L'Attrattore Strano di Lorenz

Scelto un punto  $\vec{x}_0$  ed un vettore  $\vec{w}_0$  e definendo  $d_0 = |\vec{w}_0|$ , si può determinare  $\vec{w}(t)$  dalle equazioni  $\dot{\vec{w}}(t) = \mathbf{J}[\vec{x}(t)]\vec{w}(t)$  integrandole numericamente con un calcolatore. Se  $\vec{w}(t)$  cresce esponenzialmente dopo un certo tempo diventa troppo grande perchè un computer possa maneggiarlo. Si aggira questo problema attraverso una rinormalizzazione: ad ogni intervallo di tempo  $\tau$ ,  $\vec{w}(t)$  viene normalizzato al modulo che aveva inizialmente. Partendo con  $\vec{w}_0(0)$  e  $d_0$  si ottiene  $\vec{w}_0(\tau)$  ed un nuovo  $d_1 = |\vec{w}_0(\tau)|$ ; si rinormalizza ottenendo  $\vec{w}_1(0) = \frac{\vec{w}_0(\tau)}{d_1}$ , e si continua così. Sintetizzando si ha:

$$d_k = |\vec{w}_{k-1}(\tau)| \quad e \quad \vec{w}_k(0) = \frac{\vec{w}_{k-1}(\tau)}{d_k} \quad (9.76)$$

Si definisce inoltre:

$$e_n = \frac{1}{n\tau} \sum_{i=1}^n \ln d_i \quad (9.77)$$

Sia da considerazioni teoriche che da sperimentazioni numeriche con traiettorie in un sottospazio ergodico o nel bacino di attrazione di un attrattore, si osserva che  $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n$  sembra esistere; risulta indipendente da  $\tau$  e dalla traiettoria specifica per cui viene calcolato ed anche dalla scelta di  $d_0$ . Infine si può identificare con  $\nu_{max}$  [71]. Ciò implica che l'esponente di Liapunov massimo sia dato da  $\nu_{max} = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$ . Nelle regioni in cui il moto è regolare questo limite è  $\nu_{max} \leq 0$ , mentre nelle regioni caotiche è  $\nu_{max} > 0$ .

Se si considera il bacino di attrazione di un attrattore[56, 69], poichè le traiettorie tendono asintoticamente all'attrattore, è evidente che l'esponente di Liapunov massimo delle traiettorie del bacino di attrazione coincide con quello delle traiettorie dell'attrattore. Si può quindi parlare di attrattori regolari e caotici. I punti fissi e le orbite periodiche considerati nel §??, sono degli attrattori regolari, in particolare per i punti fissi si ha che l'esponente massimo di Liapunov è negativo, mentre per le orbite periodiche l'esponente massimo di Liapunov è nullo. Gli attrattori caotici si dicono anche Strani (questo termine è comparso per la prima volta in un articolo di Ruelle e Takens,[54].

Si può dare ora una definizione operativa di attrattore strano:

**Attrattore Strano:** Un Attrattore Strano è un Attrattore caotico, ossia la maggior parte delle traiettorie che tendono ad esso hanno un esponente di Liapunov massimo positivo.

La proprietà per cui per la maggior parte delle scelte di  $\vec{d}_0$  il tasso di divergenza è uguale all'esponente di Liapunov massimo [cfr. il punto d) del §9.10] permette di computare quest'ultimo. Il metodo per la determinazione dell'esponente di Liapunov massimo utilizzato nel nostro studio è ampiamente discusso in molti articoli e libri di testo, in particolare quello qui utilizzato è stato tratto dalle referenze [69] e[?]. A queste si rimanda per una esposizione del metodo usato per determinare l'esponente massimo di Liapunov associato ad una traiettoria. Per gli scopi del presente Volume è sufficiente dire che il metodo per calcolare l'esponente massimo di Liapunov permette di determinare una funzione del tempo  $L(t)$  associata alla traiettoria considerata; l'esponente massimo di Liapunov è il limite a cui questa tende per  $t$  che va all'infinito,

$$\lambda_{max} = \lim_{t \rightarrow \infty} L(t).$$

I calcoli dell'esponente di Liapunov massimo effettuati sul sistema di Lorenz hanno fornito i seguenti risultati:

1) Per  $r = 0.5$ , (fig.9.16),  $L(t)$  sembra tendere ad un valore negativo compreso tra  $-0.8$  e  $-1$ , consistentemente col fatto che per questo valore

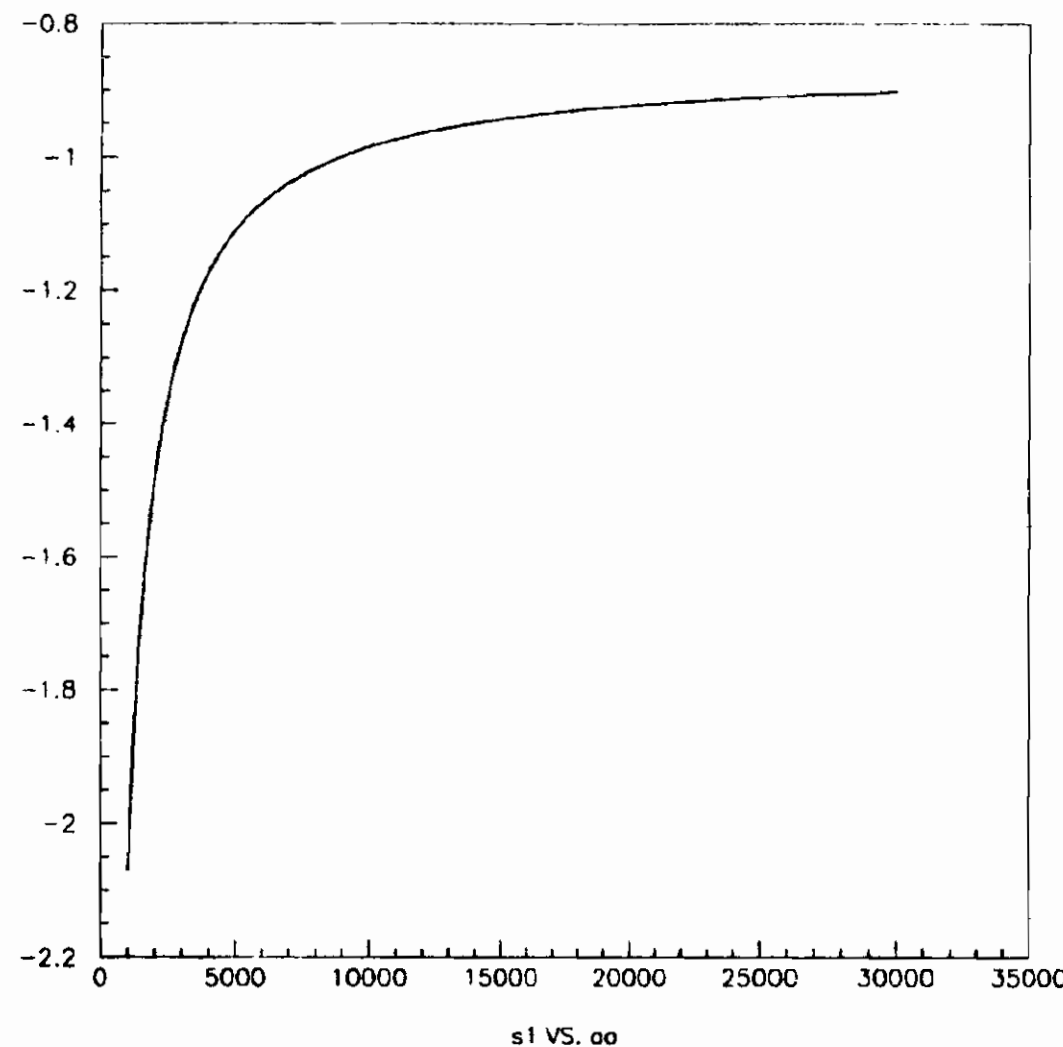


Figura 9.16: Il disegno mostra  $L(t)$  sotto le seguenti condizioni:  $r = 0.5$   
 $X_0, Y_0, Z_0 = 5, 5, 27$ .

del parametro  $r$  le traiettorie tendono al punto  $O$ .

2) Per  $r = 16$ , (fig.9.17),  $L(t)$  sembra tendere ad un valore prossimo a  $-0.2$  in accordo col fatto che le traiettorie tendono ad uno dei due punti  $\vec{C}_{1,2}$  per questo valore di  $r$ .

3) Per  $r = 300$ , (fig.9.18),  $L(t)$  tende a zero in accordo con la presenza di un'orbita periodica attrattiva per questo valore di  $r$ .

4) Il caso  $r = 28$  è stato quello più studiato da Lorenz e da altri. Il valore limite di  $L(t)$  per tutte le simulazioni fatte non sembra dipendere dalla traiettoria e sembra assestarsi attorno al valore di  $0.81$  (cfr. fig.9.19).

Dalle figure mostrate è evidente come l'esponente massimo di Liapunov sia un ottimo caratterizzatore del moto asintotico del sistema di Lorenz. Si può affermare che per  $r = 28$  la positività dell'esponente massimo di Liapunov per la maggior parte delle traiettorie, soddisfa le condizioni per definire il moto caotico. L'attrattore del sistema per  $r = 28$  è quindi un attrattore strano.

Concludendo per  $r = 28$  ( ed in generale per  $24.74 < r < 200$ ), le traiettorie tendono ad un'insieme invariante. Questo insieme invariante

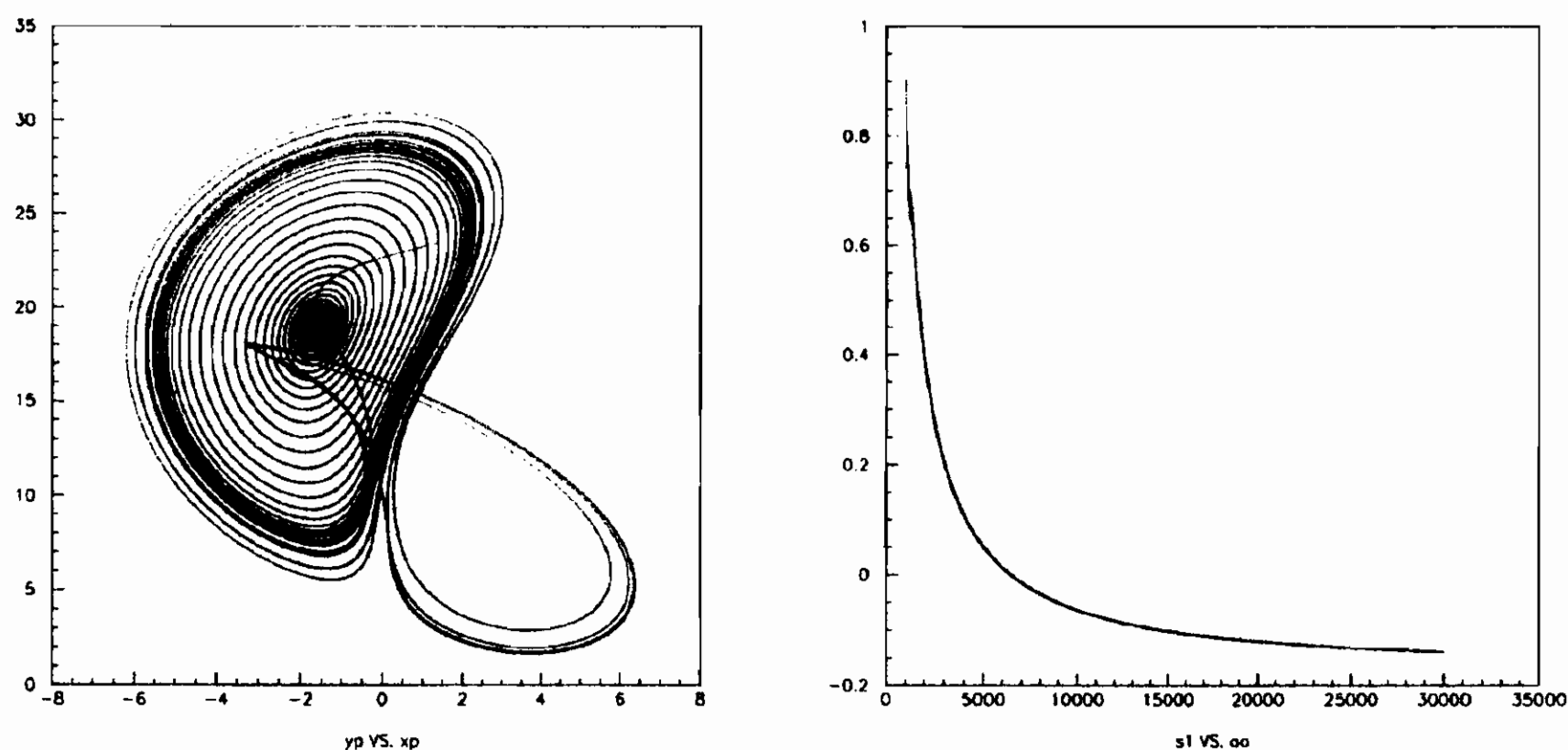


Figura 9.17: La figura di sinistra mostra la traiettoria ( $X_0, Y_0, Z_0 = 5, 5, 27, r = 16$ ) per cui è stato calcolato l'esponente massimo di Liapunov, che corrisponde al limite a cui tende la curva nella figura di destra.

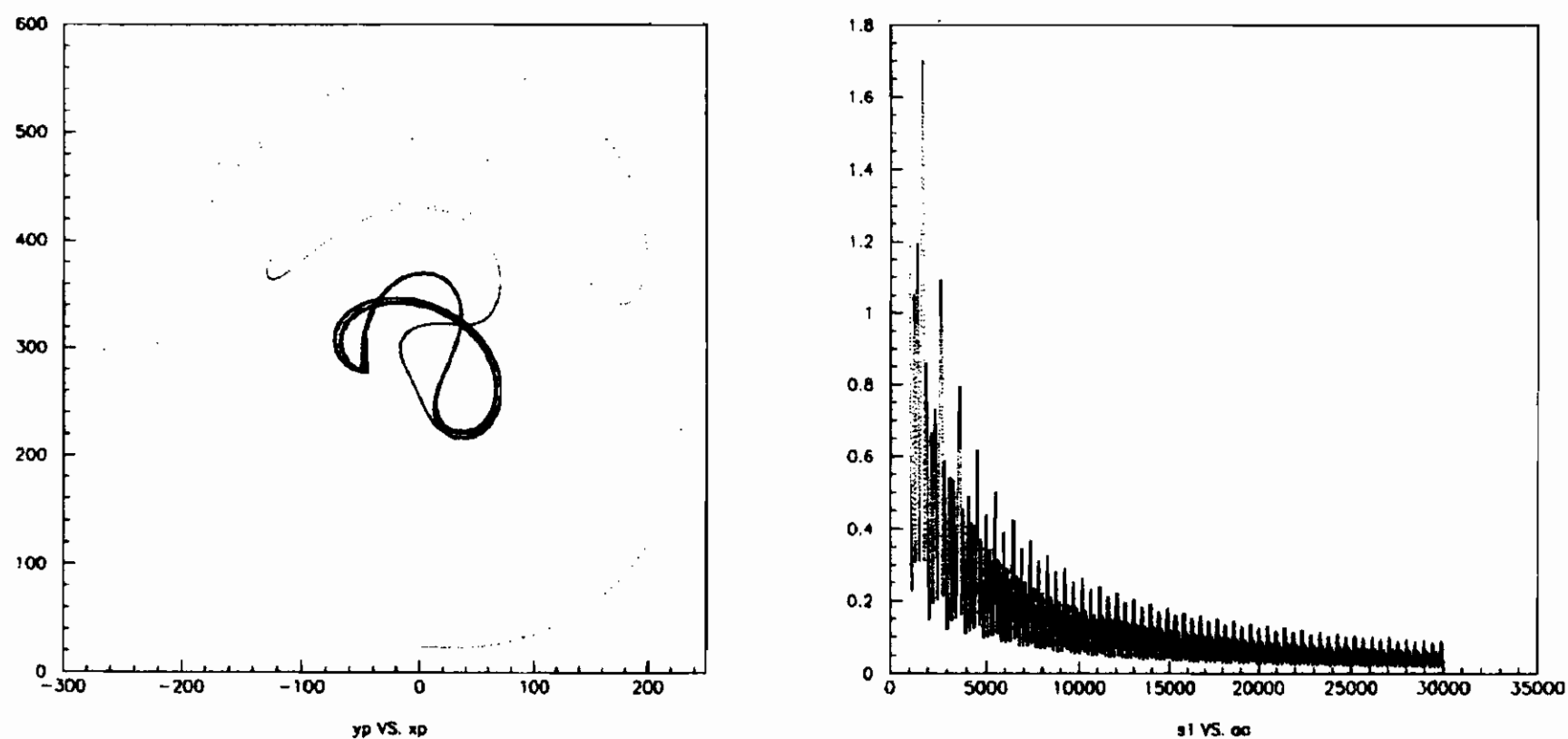


Figura 9.18: La figura di sinistra mostra la traiettoria ( $X_0, Y_0, Z_0 = 5, 5, 27, r = 300$ ) per cui è stato calcolato l'esponente massimo di Liapunov, che corrisponde al limite a cui tende la curva nella figura di destra.

costituisce un attrattore universale del sistema, e da quanto visto è caotico, ovvero Strano.















stabile che verso una configurazione meno stabile (punto a sella). Il sistema auto organizzato *sceglie* di evolvere in una delle due direzioni al fine di convergere sullo stato più confacente alle sue caratteristiche dinamiche.

Qui ci fermiamo. Per continuare su questa strada occorrerebbe aprire ampie parentesi e cominciare a trattare capitoli riguardanti le reti neurali auto organizzate di Kohonen e Miikkulainen[?], gli algoritmi genetici e quant'altro, il che esula ampiamente dagli scopi del presente volume.

## 9.13 Conclusioni

Attraverso il sistema di Lorenz, si è mostrato come si può studiare un sistema dinamico per mezzo delle sue equazioni del moto e come in questo modo si possa definire il moto caotico. Questo dipende dalla divergenza esponenziale delle traiettorie, di cui l'esponente massimo di Liapunov fornisce una misura quantitativa.

Per certi valori del parametro  $r$  i punti rappresentativi nello spazio delle fasi del sistema di Lorenz tendono verso un'insieme di punti invariante e limitato avente una dimensione frattale: questo insieme di punti costituisce l'attrattore strano di Lorenz mostrato nella figura di sinistra di fig.???. Si è verificato che, per le traiettorie che giacciono nel bacino di attrazione dell'attrattore strano di Lorenz, l'esponente di Liapunov massimo è positivo, indicando che il moto sull'attrattore strano di Lorenz è caotico.

La dimensione frattale è una caratteristica di tutti gli attrattori caotici, ovvero strani, incontrati fino ad ora nei sistemi continui dissipativi. Intuitivamente questo si può spiegare considerando che il moto su un'attrattore deve essere confinato in una regione finita dello spazio delle fasi, ma, al contempo, se il moto è caotico, i punti rappresentativi del sistema tendono ad allontanarsi uno dall'altro durante l'evoluzione temporale. Ciò porta ad una crescente "complessificazione" del moto, il che permette di intuire perché l'insieme di punti su cui il





# Capitolo 10

## Intermittenza e particelle

### 10.1 Introduzione

Questo capitolo é dedicato agli studenti che seguono un percorso formativo orientato allo studio delle particelle elementari e presuppone lo studio dell' App. A che riassume elementi di statistica e dell'App. B nella quale vengono introdotte le variabili cinematiche con cui si analizzano i dati sperimentali.

Ogni 2 anni si tiene una conferenza internazionale denominata Multiparticle Dynamics[76] interamente dedicata ai problemi della produzione multipla di particelle nelle interazioni nucleari ad alte energie ed a tutti i fenomeni connessi. Tra questi, a partire da circa il 1985, rientra la osservazione di chiari fenomeni di intermittenza nel senso spiegato nel Cap. 6 a proposito della caduta della pioggia.

L'applicabilitá dei metodi fin qui introdotti presenta tre limiti sostanziali:

- 1- Il numero di particelle prodotte varia per numeri interi.
- 2- Il numero di particelle prodotte non é mai "abbastanza grande" nel senso che non potrà mai raggiungere numeri confrontabili con il numero di Avogadro (gli esperimenti al futuro collisionatore LHC non produrranno piú di poche decine di migliaia di particelle).

3- Ogni evento é caratterizzato da un numero diverso di particelle prodotte.

Lo studio dei processi di produzione multipla di particelle da un punto di vista frattale richiede innanzitutto di comprendere quali distribuzioni di variabili cinematiche, nelle collisioni ad alta energia, presentano "buchi" nel senso in cui troviamo buchi (trema, whey) nell'insieme di Cantor (cfr i §2.4 e 2.5 del Cap. 2). Se esaminiamo la distribuzione di rapidità di particelle (cfr. App. B) rivelate in un evento ad energia molto elevata, possiamo osservare accumuli di eventi, in un solo intervallo in cui é suddivisa la variabile, che si elevano sopra distribuzioni lentamente variabili. A volte é anche possibile incontrare intervalli quasi completamente vuoti vicino agli accumuli.

Segnaliamo ai lettori particolarmente interessati i piú recenti lavori che riassumono gli aspetti fondamentali della produzione multipla in termini di complessità presentati da W. Kittel[77]a, H.C. Eggers[77]b, M. Ta-chung[77]c e da L. Qin[77]d ad un Simposio Interanzionale nel settembre 2003.

Qui, noi possiamo pensare di spiegare l'esistenza di *vuoti o buchi* in questi termini: se la risoluzione in rapidità (o in pseudorapidità) è dell'ordine di grandezza oppure migliore della separazione media in rapidità fra particelle vicine, suddividendo l'intervallo di variabilità totale  $\Delta y$  in piccoli intervallini, a risoluzione elevata possiamo osservare molti canali vuoti che non contengono particelle. Questi canali vuoti possono essere pensati come un insieme di buchi, e se il sistema ha proprietà frattali, l'insieme di canali non vuoti può essere considerato un frattale. La fig. 10.1a mostra la distribuzione di pseudorapidità  $\eta$  -con un passo  $\delta\eta = 0.1$ - delle particelle prodotte in un singolo evento raccolto in un esperimento che ha inviato nello spazio, in un pallone stratosferico un pacco di emulsioni nucleari per studiare i raggi cosmici (esperimento JACEE[78]: Japanese-American-Collaboration-Emulsion-Experiment). Un raggio cosmico di natura sconosciuta (probabilmente un protone o un pione di energia tra 1 e 1000 TeV) in una interazione

con un nucleo della emulsione ha prodotto ben oltre 300 particelle.

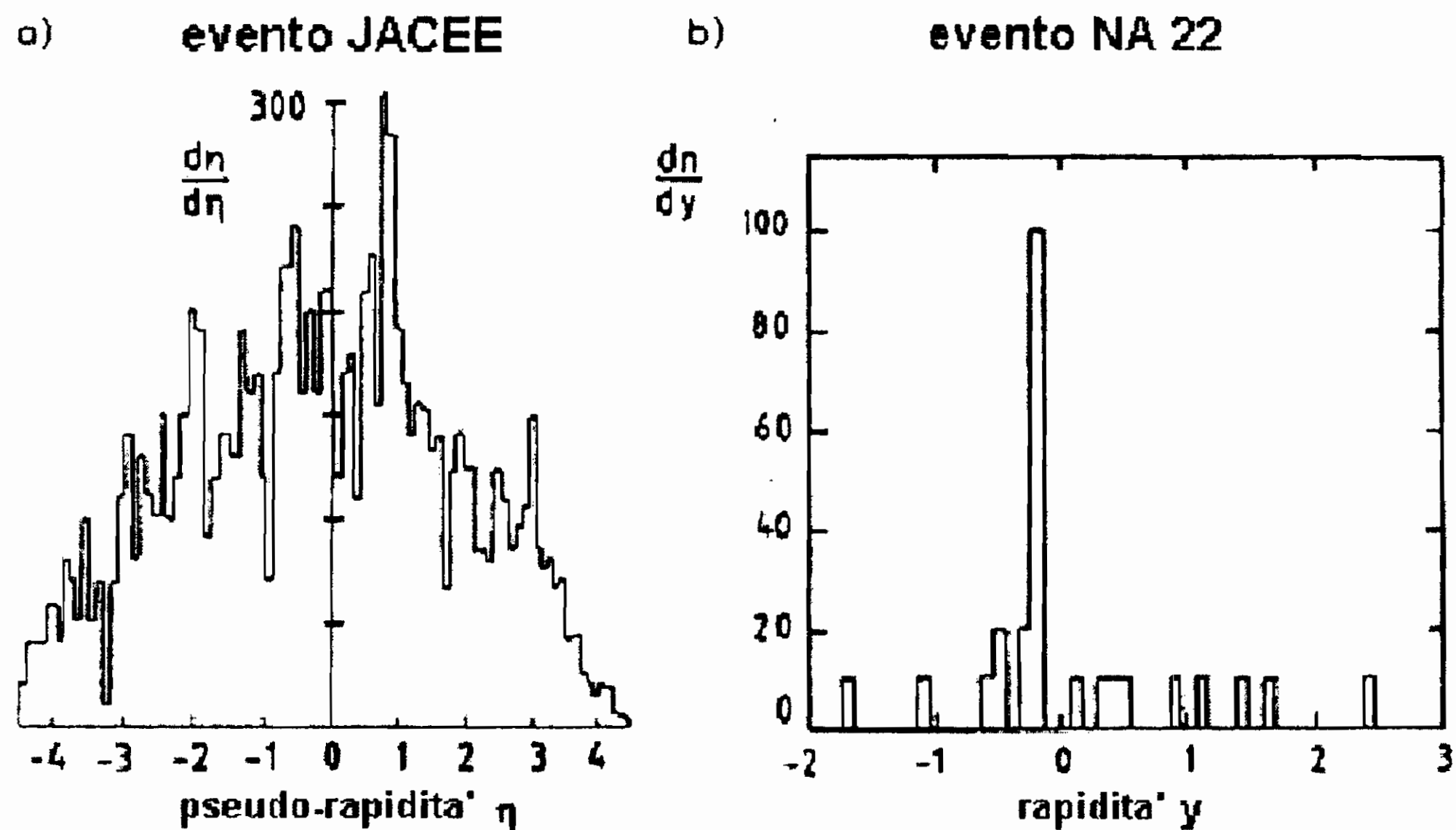


Figura 10.1: Esempi di distribuzioni di rapidità di un singolo evento di produzione multipla in due esperimenti di fisica delle alte energie: a) evento JACEE; b) evento NA22.

Si osserva una fluttuazione di  $\frac{dn}{d\eta} = 300$  in un singolo intervallino  $\delta\eta = 0.1$ .

Un altro evento singolo osservato nell'esperimento NA 22[79], condotto al CERN di Ginevra esponendo una camera a bolle a idrogeno, equipaggiata con uno spettrometro magnetico, ad un fascio adronico da  $250 \text{ GeV}/c$  (energia equivalente nel centro di massa  $\sqrt{S} = 22 \text{ GeV}$ ), è mostrato in figura 10.1b; contiene un picco a risoluzione di rapidità  $\delta y = 0.1$  di  $\frac{dn}{dy} = 100$  corrispondente a 60 volte la densità media per intervallino. È allora evidente, da un punto di vista sperimentale, l'esistenza di eventi con larghe fluttuazioni locali della densità di particelle negli intervalli di rapidità.

Bialas e Peshanski[80, 81] hanno suggerito che i picchi potrebbero essere una manifestazione dell'intermittenza (il fenomeno noto in fluidodinamica e in meteorologia) anche nella fisica delle alte energie.

L'esatta definizione dell'intermittenza nel campo della fisica delle















Il confronto con la legge di scaling per i momenti statistici porta a definire, in analogia con la (7.30) di Cap. 7, l'uguaglianza  $\phi_q = K(q)$ , cioè l'indice di intermittenza corrisponde all'esponente di scaling nel formalismo del Cap. 7. Dal confronto dei due formalismi segue allora che  $\phi_q$  è legata alla codimensione  $C_q = D - D(q)$  secondo la relazione:

$$C_q = \frac{\phi_q}{q - 1} \quad (10.17)$$

che coincide con la (7.40) di Cap. 7.

L'analisi sperimentale mossa dai lavori di Bialas e Peshanski è molto abbondante in letteratura e ha prodotto una notevole mole di lavori riguardanti vari tipi di processi elementari quali: annichilazioni  $e^+e^-$ , collisioni  $\mu$ -nucleone e adrone-adrone (h-h).

La fig. 10.2 mostra la dipendenza funzionale di  $\log F_5$  data dalla (10.6) da  $-\log \delta\eta$  ( $\eta$  è la pseudorapidità) per il singolo evento della collaborazione JACEE, confrontata con la previsione della simulazione con il metodo Montecarlo di un modello *non frattale*. Mentre il modello prevede  $F_5$  praticamente costante, i dati JACEE danno una chiara indicazione di variazione lineare di  $\log \langle F_5 \rangle$  con la risoluzione e quindi i segni di un possibile comportamento intermittente.

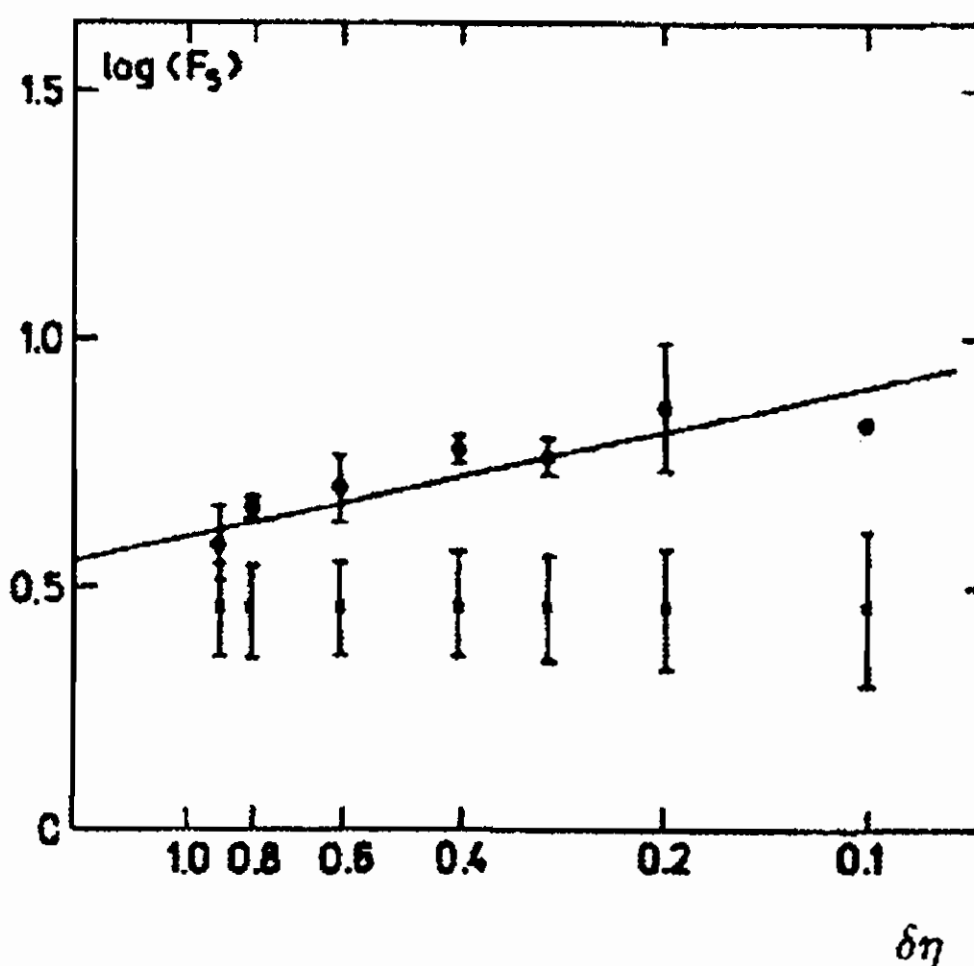


Figura 10.2: Confronto fra dati sperimentali dell'evento JACEE e modelli Montecarlo per  $\log F_5$











Il processo, caratterizzato da una cascata partonica a cui fa seguito il livello adronico, si presta ad una analisi teorica rivolta alla determinazione della fase che mostra aspetti intermittenti

### 10.2.3 Studi in dimensioni piú estese

Nei § precedenti abbiamo visto l'analisi dei momenti fattoriali derivati da distribuzioni unidimensionali nelle variabili rapidità o pseudorapidità; possiamo altresì studiare la dipendenza funzionale di  $F_q$  da altre variabili importanti come l'angolo azimutale  $\varphi$  nel piano perpendicolare alla direzione di collisione fascio - bersaglio o come il momento trasverso  $p_T$  delle particelle. Soprattutto si possono studiare distribuzioni di densità di probabilità in regioni dello spazio delle fasi di 2 o 3 dimensioni: scelte usuali sono le variabili  $(\Delta y, \Delta\varphi)$ ,  $(\Delta y, \Delta \log p_T)$  e  $(\Delta y, \Delta\varphi, \Delta \log p_T)$ . La fig. 10.7 mostra i risultati di un'analisi sperimentale dei dati di UA1 [86] che evidenzia la presenza di comportamenti di tipo intermittente anche nella variabile  $\varphi$ . Nella stessa figura   mostrata invece la variazione del coefficiente di intermittenza  $\phi_q$ , in funzione dell'ordine dei momenti  $q$ ,

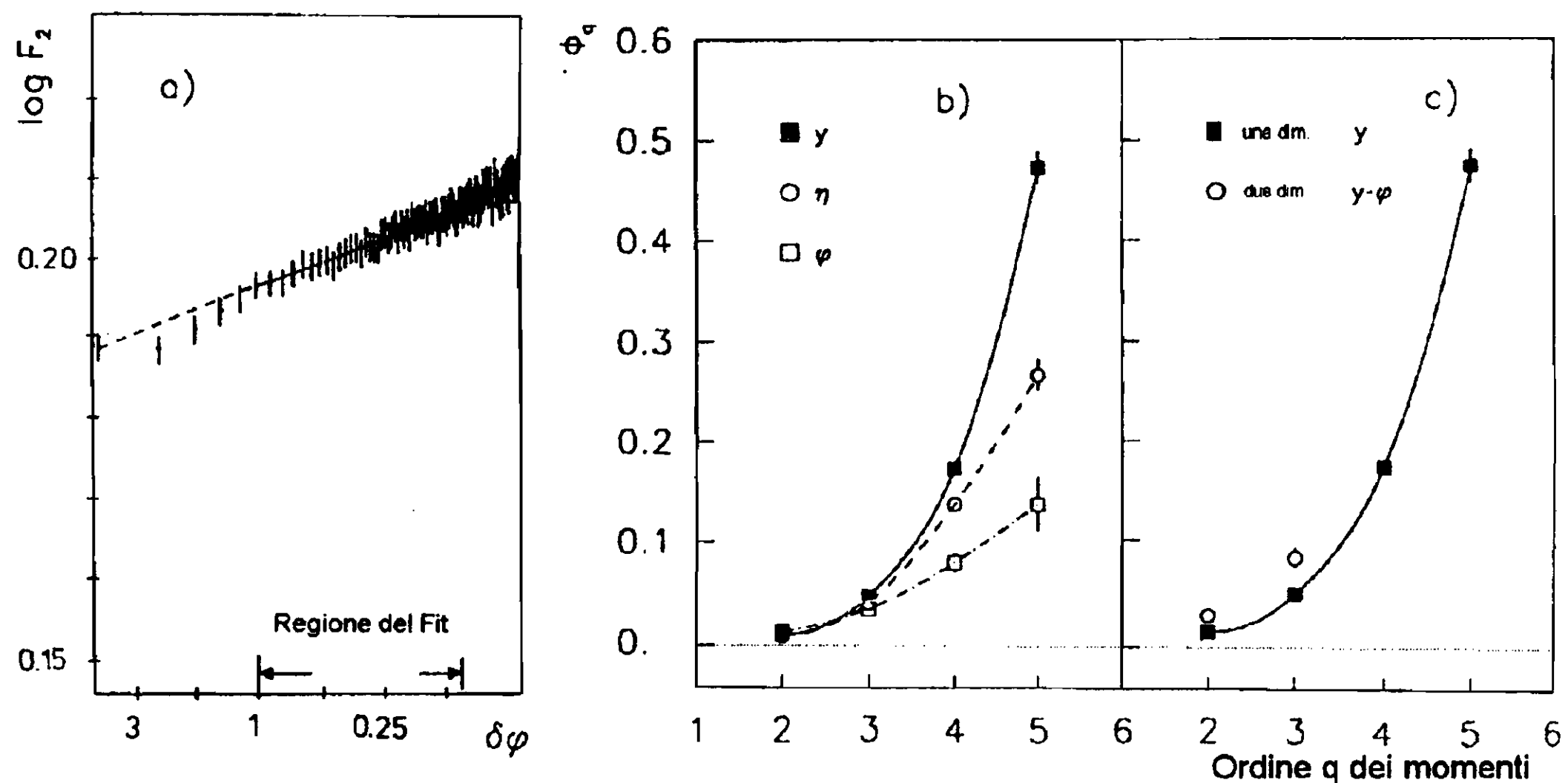


Figura 10.7: (a)  $\log F_2$  in funzione di  $-\log \delta\varphi$  per i dati di UA1, (b),(c) coefficiente  $\phi_q$  in funzione dell'ordine  $q$  per  $y, \eta, \varphi$  o per un'analisi bidimensionale dei dati di NA22.



di tutte e tre le variabili  $y$ ,  $\eta$ ,  $\varphi$  e l'effetto di una analisi bidimensionale  $y$ ,  $\varphi$  (fig. 10.7c) dei dati di NA22.

L'analisi dei dati di E299 é mostrata nelle fig. 10.8a,b. Nell'intervallo di rapidità  $-2 < y < 2$  viene studiata la dipendenza funzionale dei momenti verticali dal momento trasverso nelle due regioni sopra e sotto una soglia definita a 0.2 GeV/c. L'interpolazione di  $\log \langle F_q^V \rangle$  in funzione di  $-\log \delta y$  mostra pendenze maggiori per particelle prodotte con piccoli momenti trasversi.

La fig. 10.8c conferma che la natura frattale é una caratteristica fortemente "locale" e si manifesta piú chiaramente in un'analisi pluridimensionale rispetto al caso di un'analisi unidimensionale, che "media" su tanti parametri. L'analisi é condotta dividendo l'intervallo di rapidità  $-2 < y < 2$  e quello dell'angolo azimutale  $0 < \varphi < 2\pi$  in un numero uguale di intervalli  $n$ , con  $n$  variabile fra 1 e 40, ottenendo cosí una griglia<sup>2</sup> fatta da  $M = n^2$  rettangoli. Quando si passa ad un'analisi in 3 dimensioni, si possono osservare effetti molto accentuati quali una crescita addirittura esponenziale dei momenti fattoriali in funzione della risoluzione  $-\log \delta y$ . Compare qui un aspetto tuttora al centro dell'analisi sperimentale: il cumulante fattoriale normalizzato di ordine 2,  $K_2 = F_2 - 1$  mostra un comportamento molto piú lineare di  $F_2$  in un grafico bilogarithmico. Questa osservazione ha dato una grossa spinta all'analisi teorica, portando alla proposta di una parametrizzazione del tipo

$$F_2 = 1 + c(M^3)^{\phi_2} + c' \quad (10.18)$$

dove  $M^3$  é il numero di celle nello spazio delle fasi tridimensionale.

Esula dagli scopi di questo volume approfondire questi aspetti specifici della fisica delle interazioni forti. Citiamo solo che il risultato piú interessante emergente dall'analisi é il fatto che  $\phi_2$  sembra assumere lo stesso valore, compreso fra 0.4 e 0.5, in tutti i processi studiati. Ciò suggerisce che la dipendenza di  $F_2$  dalla risoluzione mostri un alto grado

<sup>2</sup>il momento del quinto ordine  $F_5$  non é mostrato a causa della statistica limitata dell'esperimento.

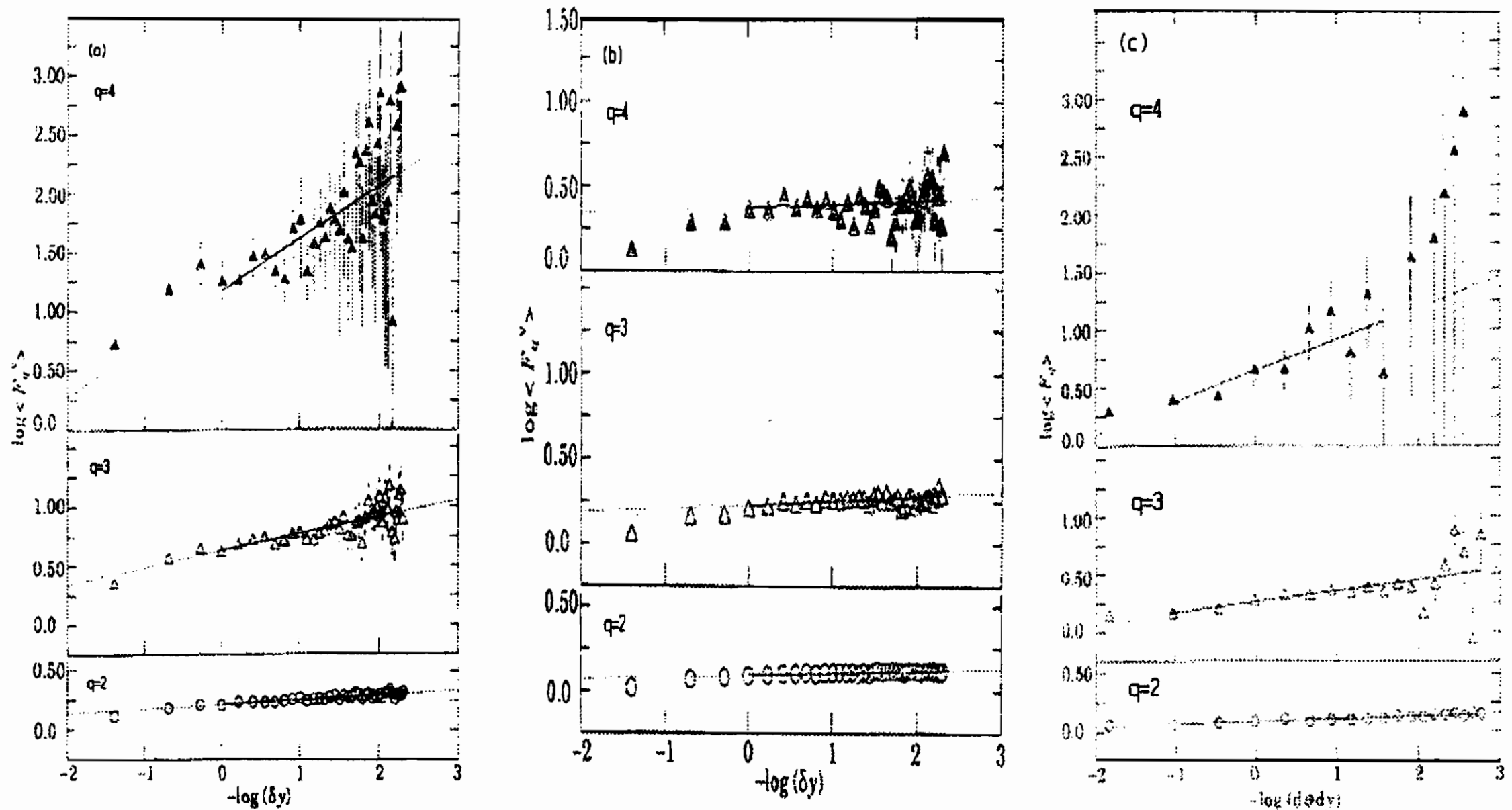


Figura 10.8: (a) Momenti fattoriali calcolati nell'intervallo di rapidità  $-2 < \Delta y < 2$  con  $p_T < 0.20$ ; cerchio bianco  $q = 2$ , triangolo chiaro  $q = 3$ , triangolo scuro  $q = 4$ . (b) Momenti fattoriali calcolati nell'intervallo di rapidità  $-2 < \Delta y < 2$  con  $p_T > 0.20$ . (c) Esempio di analisi bidimensionale dei dati E299 in funzione di  $y$  e dell'angolo  $\varphi_{beam}$  nel piano trasverso, con  $\Delta y=4$  e  $\Delta\phi_{beam}=2\pi$ .

di "universalità", cioè sia indipendente dai dettagli specifici del processo di produzione e quindi rifletta caratteristiche generali della dinamica della fase adronica. Il successo sperimentale dell'espressione (10.18) é ancor piú rilevante se si pensa al fatto che il volume delle celle dello spazio delle fasi  $\delta \sim M^{-3}$  (per  $M$  sufficientemente grande) é correlato alla massa invariante  $M_{inv}$  del sistema di due particelle o al quadrato  $Q^2$  della differenza dei loro tetramomenti: si ha infatti in tal caso l'importante risultato che la funzione di correlazione per due particelle ha una dipendenza da  $M_{inv}$  o  $Q^2$  di tipo intermittente.

### 10.3 Analisi multifrattale

La dipendenza dei momenti fattoriali normalizzati dal passo  $\delta$  secondo una legge di potenza é una dimostrazione dell'esistenza di fenomeni di

autosimilarità nei processi di produzione multipla di particelle.

Ciò sembra suggerire che la distribuzione di probabilità  $P(\rho, \delta)$  della densità di particelle  $\rho$  abbia ulteriori proprietà frattali.

### 10.3.1 I momenti generalizzati G

La trattazione seguente costituisce una generalizzazione della trattazione svolta nel § 5.5 per un processo moltiplicativo binario. Se tutti i momenti di ordine  $q$  di  $\rho$  ( $q = 1, 2, \dots$ ) seguono leggi di potenza con esponenti legati fra loro e dipendenti solo da  $q$ , la distribuzione di probabilità si caratterizza come un frattale semplice. Se invece  $P(\rho, \delta)$  segue una relazione del tipo :

$$P(\rho, \delta) = \lambda^{f(\alpha)} \quad (10.19)$$

che diventa:

$$\frac{\log P(\rho, \delta)}{\log \delta} = f(\alpha) \quad (10.20)$$

con  $\alpha = \log \rho / \log \delta$ . Allora  $P(\rho, \delta)$  si comporta come un multifrattale, caratterizzato dallo spettro  $f(\alpha)$  che descrive lo scaling anche di tutti i momenti statistici di  $P(\rho, \delta)$ . È evidente che  $\alpha$  gioca lo stesso ruolo del parametro  $\alpha$  del Cap. 6

L'analisi multifrattale si basa sulle proprietà dei momenti generalizzati G, il cui uso in quest'ambito è stato proposto da R. Hwa[89].

Consideriamo l'analisi della distribuzione della rapidità in un singolo evento. Sia  $M$  il numero di intervallini in cui si suddivide l'intervallo massimo di rapidità, definito da  $M = \Delta Y / \delta y$ , dove  $\Delta Y$  è la larghezza dell'intervallo e  $\delta y$  il passo. L'indice  $j$  caratterizzi gli intervallini, compresi quelli vuoti: per cui  $j = 1, \dots, M$ ; se  $n_j$  è il numero di particelle nel  $j$ -esimo intervallo, il numero totale di particelle prodotte nell'evento è  $n = \sum_j n_j$  e la frazione di particelle nell'intervallo  $j$ -esimo è dato da  $p_j = n_j / n$ .

Definiamo i momenti generalizzati G come:

$$G_q = \sum_{j=1}^M p_j^q = \sum_{j=1}^M \left( \frac{n_j}{n} \right)^q \quad (10.21)$$

Se  $f_k$  é la frequenza degli intervallini aventi molteplicitá  $k$ , allora  $G_q$  si scrive anche:

$$G_q = \frac{\sum_{k=1}^{\infty} k^q f_k}{\left(\sum_{k=1}^{\infty} k f_k\right)^q} \quad (10.22)$$

Notiamo la differenza fra  $G_q$  e i momenti ordinari<sup>3</sup> di ordine  $q$ ,  $C_q$  definiti da:

$$C_q = \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k^q P_k}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} k P_k\right)^q} \quad (10.23)$$

dove  $P_k = \frac{f_k}{\sum_{k=0}^{\infty} f_k} = \frac{f_k}{M}$ .

Per  $q > 0$  i momenti  $G_q$  e  $C_q$  sono legati dalla relazione:

$$G_q = C_q M^{1-q} \quad (10.24)$$

Possiamo comprendere facilmente dalle definizioni date per quale motivo vengano utilizzati i momenti  $G$ : essi possono infatti essere definiti per qualunque valore di  $q$ , sia non intero, sia negativo (non é invece chiaro come si possa estendere i momenti  $F_q$  a una formula tale da permettere l'assunzione per  $q$  di valori non interi o negativi). Inoltre, a piccoli  $\delta$  (cioé a grandi risoluzioni) molti intervalli contengono pochi eventi: in tal caso i momenti fattoriali fanno perdere troppe informazioni, specialmente a grandi valori di  $q$ , mentre i momenti  $G$  enfatizzano, per valori di  $q < 1$ , le distribuzioni con piccoli valori di molteplicitá.

Si consideri innanzitutto un semplice esempio che dá origine a una struttura multifrattale banale. Si supponga che, in un singolo evento, siano prodotte cosí tante particelle che la distribuzione di rapiditá possa essere approssimata da una funzione regolare fino alle piú alte risoluzioni ottenibili. Se la funzione regolare é una costante, la molteplicitá di ogni intervallo é  $p = n/M$ . La frazione di particelle in qualsiasi intervallo  $j$ -esimo é  $p_j = p/n = M^{-1}$ , per cui, applicando la definizione (10.21), si ottiene:

$$G_q = \sum_{j=1}^M p_j^q = M^{1-q} \quad (10.25)$$

---

<sup>3</sup>Si osservi che la (10.22) é l'estensione al caso discreto della (10.14).

Poiché  $M = \frac{\Delta Y}{\delta}$ , dalla relazione di proporzionalità  $G_q \propto \delta^{\tau(q)}$  [si vedano le (5.22), (5.29) e (5.30)] segue  $\tau(q) = q - 1$  e quindi:

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \frac{d}{dq} \tau(q) = 1 \\ f(\alpha) &= q\alpha - \tau(q) = \delta_{\alpha,1} \end{aligned} \quad (10.26)$$

dove  $\delta_{\alpha,1}$  é la funzione di Kronecker. Nel caso dell'unico ipotetico evento con una distribuzione assolutamente piatta, manca una qualsiasi struttura frattale. Sarebbe facile dimostrare che lo stesso risultato é valido per una qualsiasi funzione regolare. Poiché, come abbiamo visto, le distribuzioni di rapiditá non sono mai regolari, é giustificata la ricerca di una struttura multifrattale.

Da un punto di vista statistico, l'analisi dei processi di produzione multipla di particelle pone notevoli problemi se studiata con un approccio multifrattale: il piú importante é ovviamente rappresentato dal numero finito di particelle prodotte in un evento ad energia finita. L'autosimilaritá, se presente, non puó quindi persistere al crescere indefinito della risoluzione. La distribuzione di probabilitá  $P(\rho, \delta)$  non é poi calcolabile direttamente: ciò che si puó calcolare é una "distribuzione di frequenza" che tende a coincidere con  $P(\rho, \delta)$  solo nel limite  $n \rightarrow \infty$ .

Tuttavia l'uso dei momenti  $G$  permette di ottenere informazioni su quantitá rilevanti nella teoria dei multifrattali[89].

Se  $h$  é il numero di particelle rivelate in un qualsiasi generico intervallo di larghezza  $\delta$  indipendentemente dalla sua posizione nel dominio  $\Delta y$  e  $f_h$  é la frequenza con la quale tale molteplicitá  $h$  é presente in  $N$  eventi, si ha, dalla (10.22):

$$G_q = \frac{\sum_{h=1}^{\infty} h^q f_h}{(\sum_{h=1}^{\infty} h f_h)^q} \quad (10.27)$$

Dalla definizione di frequenza  $f_h$ , segue  $N = \sum_{h=1}^{\infty} h f_h$ .

Per studiare le caratteristiche di  $G_q$ , associamo ad ogni evento un indice  $i = 1, \dots, N$ . Se  $h_i$  é il numero di particelle rilevate nell'intervallo  $\delta$ , nell'evento  $i$ -esimo, la probabilitá di presenza é data da  $p_i = \frac{h_i}{(\sum_{h=1}^{\infty} h f_h)}$ ,

normalizzata secondo la relazione  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$ . Se  $R_i(y)$  é la distribuzione di rapiditá dell' $i$ -esimo evento, possiamo scrivere:

$$h_i = \int_{y_0}^{y_0+\delta} dy R_i(y) \quad (10.28)$$

dove  $y_0$  é la posizione del limite sinistro dell'intervallo  $\Delta y$ .

Supponiamo che, per  $\delta$  piccolo, si possa porre:

$$p_i \propto \delta^\alpha \quad (10.29)$$

dove  $\alpha$  é un coefficiente di scala.

Consideriamo ora tutti gli eventi che hanno le stesse proprietá di scala e inseriamoli in un insieme che chiamiamo  $S_r$ : per definizione esso é l'insieme di eventi  $N_i$  in cui  $p_i$  segue la legge (10.29) con  $\alpha$  variabile nel range  $\alpha_r < \alpha < \alpha_r + d\alpha$  per un certo  $\alpha_r$ . La somma  $\sum_{i=1}^N N_i$  puó allora essere riscritta come prodotto di due somme:

$$\sum_{i=1}^N N_i = \sum_r \sum_{i \in S_r} N_{i,r} = N = \sum_r N_r \quad (10.30)$$

dove la somma su  $r$  esaurisce tutti i possibili valori di  $\alpha$ . Possiamo pertanto generalizzare la (10.29) come:

$$N_r \propto \delta^{-f(\alpha_r)} \quad (10.31)$$

L'insieme  $S_r$  costituisce un insieme frattale di dimensione  $f(\alpha_r)$ . Poiché l'insieme  $S_r$  é associato a un particolare “intervallo” di valori di  $\alpha$ , entro il quale  $\alpha$  cresce, la somma su  $r$  puó essere sostituita con una integrazione su  $\alpha$ :

$$\sum_r N_r \rightarrow \int g(\alpha) d\alpha \quad (10.32)$$

dove  $g(\alpha)$  é una funzione genericamente continua, la cui esatta natura non é importante.

Dalle formule (10.30-10.32) segue:

$$\sum_{i=1}^N N_i \propto \int g(\alpha) \delta^{-f(\alpha_r)} d\alpha \quad (10.33)$$

Poiché il momento  $G_q$  può essere espresso anche come  $G_q = \sum_{i=1}^N p_i^q$ , dalla (10.33) e dalla (10.29) segue:

$$G_q \propto \int g(\alpha) \delta^{-f(\alpha) + q\alpha} d\alpha \quad (10.34)$$

dove  $\delta$  é da intendersi piccolo.

Se  $G_q$  rappresenta una distribuzione frattale, si deve poter scrivere anche in questo caso [cfr. la (5.30) del Cap. 5]:

$$G_q \propto \delta^{\tau(q)} \quad (10.35)$$

dove la dipendenza di  $\tau(q)$  da  $f(\alpha)$  si ricava esattamente come nel Cap. 7 a proposito di  $C(\gamma)$  e  $K(q)$ . Abbiamo quindi nuovamente, ricordando la (10.27):

$$\begin{aligned} \alpha_q &= \frac{d}{dq} \tau(q) \\ \tau(q) &= q\alpha_q - f(\alpha_q) \end{aligned} \quad (10.36)$$

Notiamo che, da un punto delle proprietà algebriche, esiste una stretta analogia, alla luce della Tabella 10.1 fra le funzioni  $f(\alpha)$  e  $\tau(q)$ , studiate nel Cap. 5 e le funzioni  $K(q)$  e  $c(\gamma)$  studiate nei § 7.6 e 7.9. Infatti:

$$\begin{aligned} \alpha_q &= D - \gamma \\ \tau(q) &= -K(q) + (q - 1)D \\ f(\alpha_q) &= D - c(\gamma) \end{aligned} \quad (10.37)$$

e dalla (10.37) segue:

$$\begin{aligned} -K(q) + (q - 1)D &= q(D - \gamma) - (D - c(\gamma)) \\ K(q) &= q\gamma - c(\gamma) \end{aligned} \quad (10.38)$$

relazione che coincide con la (7.31). Inoltre  $\tau(q)$  é legato alla dimensione dei momenti  $D(q)$  dalla relazione:

$$\tau(q) = (q - 1)D(q) \quad (10.39)$$

formalmente identica all'equazione (7.40) della codimensione duale dei momenti:

$$C(q) = \frac{K(q)}{q - 1} \quad (10.40)$$

come si puó facilmente provare ricordando che  $D(q) = D - C(q)$  (cfr. Tab. 10.1).

Si puó allora concludere che la funzione  $f(\alpha)$  presenta le stesse proprietá della funzione  $c(\gamma)$ , studiata nel Cap. 7, in quanto ne rappresenta una semplice traslazione. Notiamo infine che i momenti  $G_q$  misurati in esperimenti diversi non sono facilmente confrontabili fra loro in quanto dipendono dal numero di eventi  $N$  del campione studiato e dalla larghezza del passo  $\delta$ .

### 10.3.2 Analisi sperimentali

Abbiamo ora gli elementi per eseguire un'analisi dei dati sperimentali in modo appropriato. Possiamo costruire sperimentalmente i momenti  $G_q$ , al fine di determinarne la dipendenza dalla risoluzione  $1/\delta$ . Come per i momenti fattoriali possiamo effettuare un'analisi orizzontale e/o una verticale. Questa analisi conduce, tramite la (10.35), alla determinazione di  $\tau(q)$  in funzione di  $q$ . Poiché quest'ultima é uguale a  $(q - 1)D - K(q)$  dallo studio della funzione di scaling dei momenti nel § 7.9, sappiamo quale andamento dobbiamo verificare. La determinazione di  $\tau(q)$ , a sua volta, permette lo studio di  $f(\alpha)$ , lo spettro "multifrattale", secondo la relazione  $f(\alpha) = q\alpha - \tau(q)$ ; la funzione  $f(\alpha)$  corrisponde a una traslazione di  $c(\gamma)$  (si veda il § 7.6).

Possiamo anche studiare, in base alla (10.37), la dipendenza di  $\alpha_q$  da  $q$ ; poiché  $\alpha_q = D - \gamma$  e  $\gamma = \frac{dK(q)}{dq}$  tale studio é analogo a quello del grado di singolaritá  $\gamma$ .







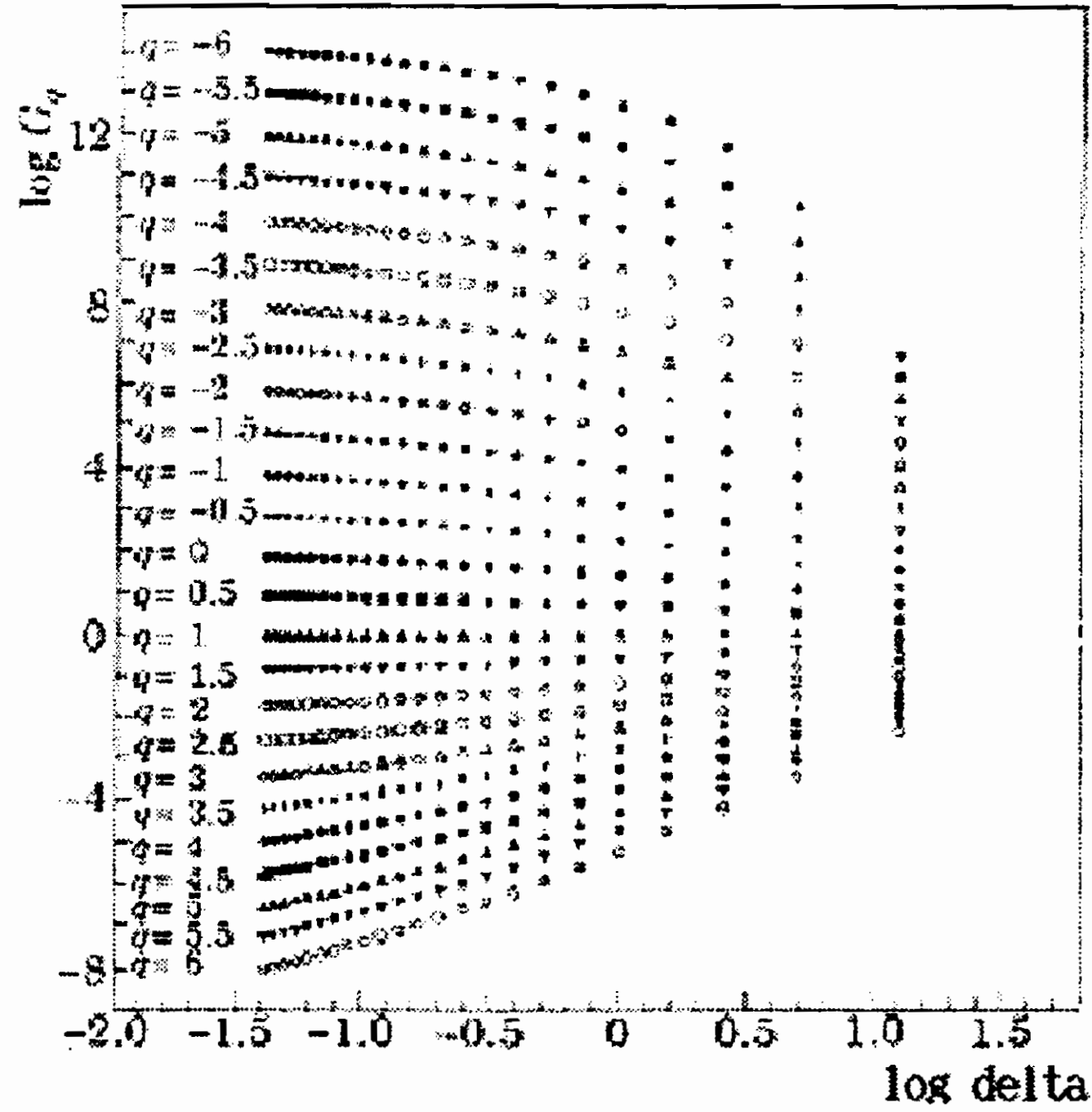


Figura 10.10:  $\langle \ln(G_q^h) \rangle$  in funzione di  $\log \delta$  per valori di  $q$  fra  $-6$  e  $6$  a passi di  $0.5$  ( $-6 \leq q \leq +6$ ) per l'analisi orizzontale.

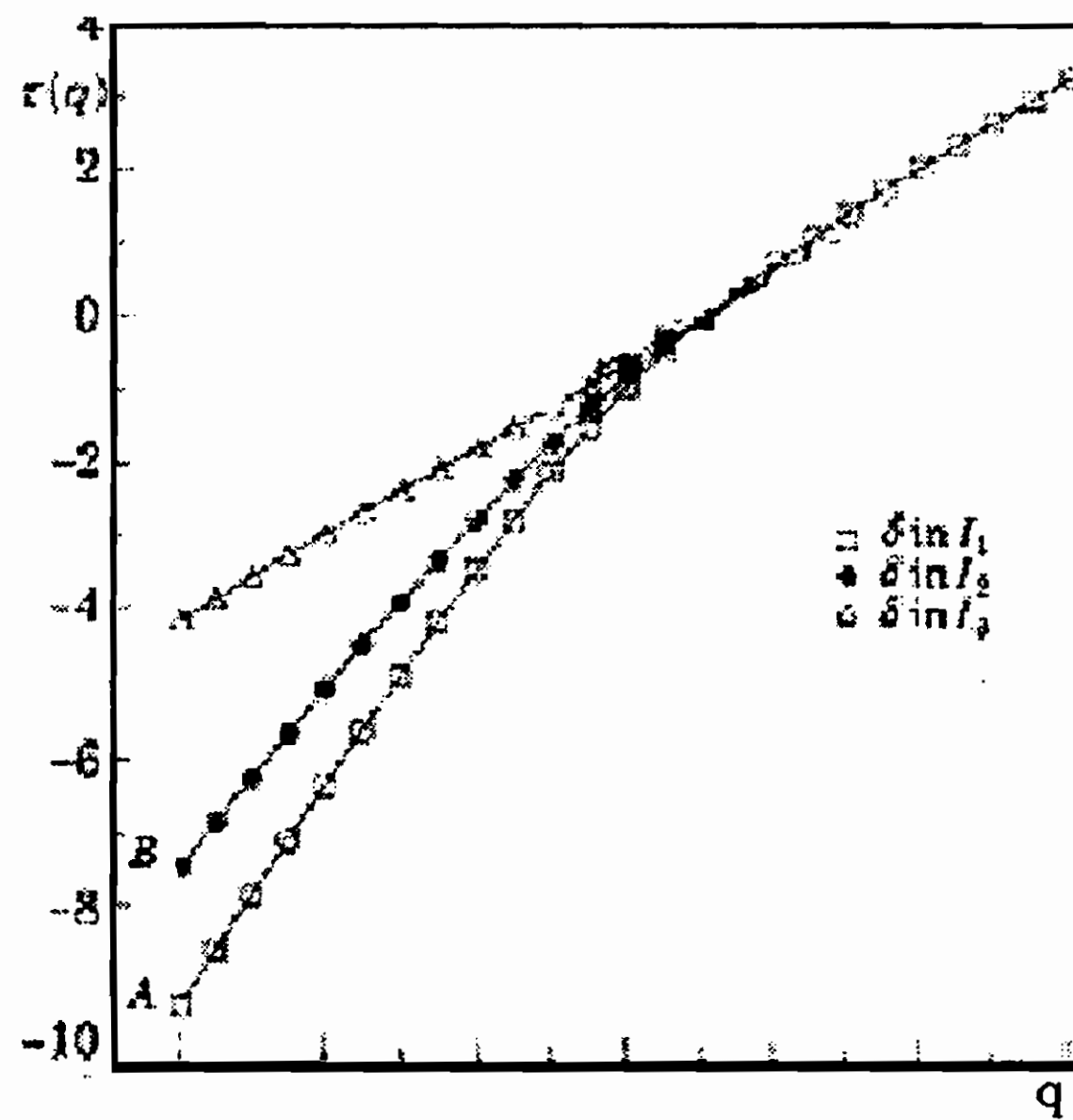


Figura 10.11: Grafico di  $\tau(q)$  calcolato negli intervalli di  $\log \delta$  per l'analisi orizzontale. In ascissa i 25 valori di  $-6 \leq q \leq +6$  evidenziati nella fig. 10.10.





















diminuisce in percentuale.

Se si opta per la soluzione  $\alpha < 1$ , possiamo concludere che, nell'esperimento E299, la distribuzione di rapidità é compatibile con una statistica lognormale di Levy con singolarità isolate; il fenomeno é quindi classificato come un processo multifrattale (condizionatamente) hard. É utile sottolineare che i momenti di traccia (e quindi quelli a doppia traccia) non sono insensibili alle fluttuazioni poissoniane[82]. Ma ciò é qui irrilevante. H.C. Hebbers[77]b ha recentemente mostrato come i momenti cumulanti si possono ricondurre ai momenti statistici ordinari. L'evidenza sperimentale "non contrasta" con l'ipotesi che a  $\sqrt{s}=16.7$  GeV il fenomeno sia dominato da una statistica di Levy con singolarità isolate.









molto usato anche il multiplo Megaparsec ( $Mpc$ ) pari a  $3.26 * 10^{24} cm$ .

In questo capitolo mostriamo come tale approccio tradizionale presenti alcuni problemi di fondo che portano a risultati spuri e come studi condotti da Pietronero [96] a partire dalla seconda metà degli anni Ottanta portino ad una elegante soluzione del problema.

Lo studio qui presentato è solo uno dei tanti casi in cui vi è una stretta correlazione fra (astro)fisica e statistica. Altri esempi possono essere trovati nella bibliografia [97] in cui sono raccolte anche molte nozioni di statistica e astrofisica utili alla comprensione di questo capitolo.

Prima di continuare occorre però anteporre qualche essenziale nozione di astrofisica elementare.

## 11.2 I cataloghi astronomici

Lo studio della distribuzione della materia nell'Universo viene effettuato analizzando i *cataloghi* che raccolgono le coordinate spaziali delle stelle misurate dai più disparati osservatori astronomici, le catalogano e le aggiornano continuamente.

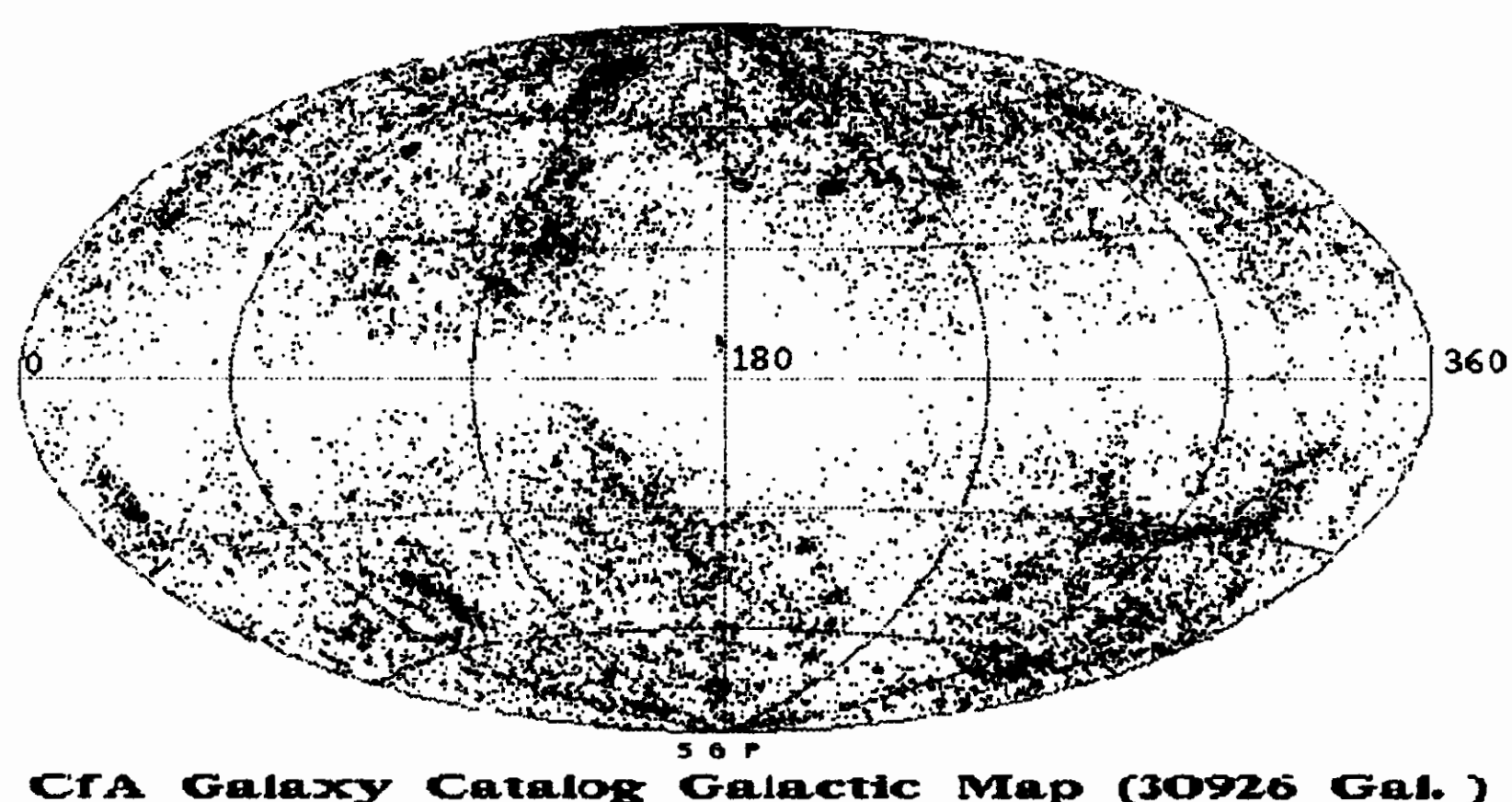


Figura 11.1: Tipico esempio di catalogo angolare della distribuzione di galassie nell'Universo: ogni punto è proiettato sulla sfera celeste unitaria.

I cataloghi disponibili fino a qualche anno fa per l'analisi statistica della distribuzione delle galassie erano essenzialmente bidimensionali

e del tipo di quello mostrato in fig. 11.1: proiezioni angolari, cioè non tridimensionali di tutto il cielo. Compilare mappe di questo tipo è relativamente semplice: è sufficiente infatti, una volta trovata una galassia, annotare le sue coordinate galattiche  $(b, l)$ , dove  $b$  rappresenta la *latitudine galattica* ed  $l$  la *longitudine galattica* [98].

L'origine di questo sistema di coordinate coincide con il centro galattico: immaginiamo cioè di osservare la sfera celeste da questo centro; ogni oggetto nel cielo ci appare quindi ad una certa altezza rispetto al piano galattico su cui ci troviamo (il piano galattico è il piano perpendicolare rispetto all'asse di rotazione della galassia). Questa altezza, espressa in gradi, rappresenta la latitudine dell'oggetto in questione: una stella appartenente alla nostra galassia ha ad esempio  $b$  molto prossimo a 0, mentre un oggetto che si trova sopra la nostra testa ha  $b = 90^\circ$ . La longitudine esprime invece l'ampiezza dell'angolo di cui è deviato l'oggetto rispetto ad una semiretta che punta in direzione della costellazione del Sagittario:  $l = 0^\circ$  è la direzione della sua costellazione;  $l = 180^\circ$  corrisponde invece alla direzione della congiungente il Sole con il centro galattico. Si escludono, per convenzione, tutte le galassie tali per cui  $|b| < 10^\circ$ , in modo da non tenere conto degli effetti dovuti alla polvere interstellare, presente in grande quantità lungo il piano galattico e a causa della quale è problematico compiere osservazioni precise. Ogni galassia viene poi rappresentata come un punto su di una sfera di raggio unitario attorno al centro galattico.

Da qualche decennio è però possibile costruire anche mappe tridimensionali. Per fare questo, bisogna saper eseguire precise misure della distanza di ogni galassia dall'osservatore. Per ottenere questo dato, occorre sapere che l'Universo è in continua espansione: l'allontanamento delle galassie, meglio noto in cosmologia come *recessione*, fu osservato per la prima volta negli anni '20 da Edwin Hubble [99], il quale trovò che la velocità  $v$  di allontanamento di una galassia dalla Terra (o meglio dalla Via Lattea) è direttamente proporzionale alla sua distanza  $d$ :

$$v = H_0 d. \quad \text{LEGGE DI HUBBLE} \quad (11.1)$$

La velocità di recessione si può misurare mediante lo spostamento delle righe di emissione o di assorbimento degli spettri delle stelle contenute nelle galassie. Poiché le galassie si allontanano da noi, si ha uno spostamento verso il rosso delle righe spettrali a causa dell'effetto Doppler: si parla quindi di *redshift cosmologico*. La costante  $H_0$ , detta costante di Hubble, che lega velocità e distanza, è soggetta a continue e frequenti correzioni. Per questo motivo, tutte le distanze cosmologiche sono espresse a meno di un fattore  $h^{-1}$ , che tiene conto delle possibili variazioni del valore di  $H_0$  ricavato sperimentalmente, rispetto al suo valore teorico reale e rispetto al valore assunto precedentemente. Precise misure di redshift, sono state eseguite soltanto di recente; è inoltre necessaria una potenza notevole dei telescopi per non correre il rischio di trascurare galassie sì presenti nella regione di spazio studiata, ma non osservate a causa della limitata magnitudo relativa. La *magnitudo* è l'unità di misura della luminosità di un oggetto celeste: si parla di *magnitudo assoluta* per indicare la proprietà intrinseca dell'oggetto e di *magnitudo relativa* se valutata dal nostro punto di vista, cioè osservata dalla Terra. Così oggetti che appaiono con la stessa luminosità se osservati da Terra, possono avere magnitudo assolute molto diverse in base alla loro distanza dall'osservatore dall'origine del sistema di riferimento.

In cataloghi tridimensionali vengono fornite, per ogni galassia osservata, la magnitudo relativa  $m$ , la longitudine galattica  $l$ , la latitudine galattica  $b$  e il redshift e quindi la sua distanza dall'osservatore.

I cataloghi più dettagliati e maggiormente usati, sono quelli redatti dallo Harvard-Smithsonian Center for Astrophysics (CfA) [100]: al primo catalogo (CfA1) del 1983 hanno fatto seguito numerose revisioni con l'aggiunta di nuove misure di velocità di recessione. Le considerazioni di questo capitolo sono formulate sulla base di studi statistici eseguiti su questi cataloghi.

Per eseguire una analisi quantitativa della densità dei punti rappresentativi delle galassie limitiamo le nostre considerazioni ad una

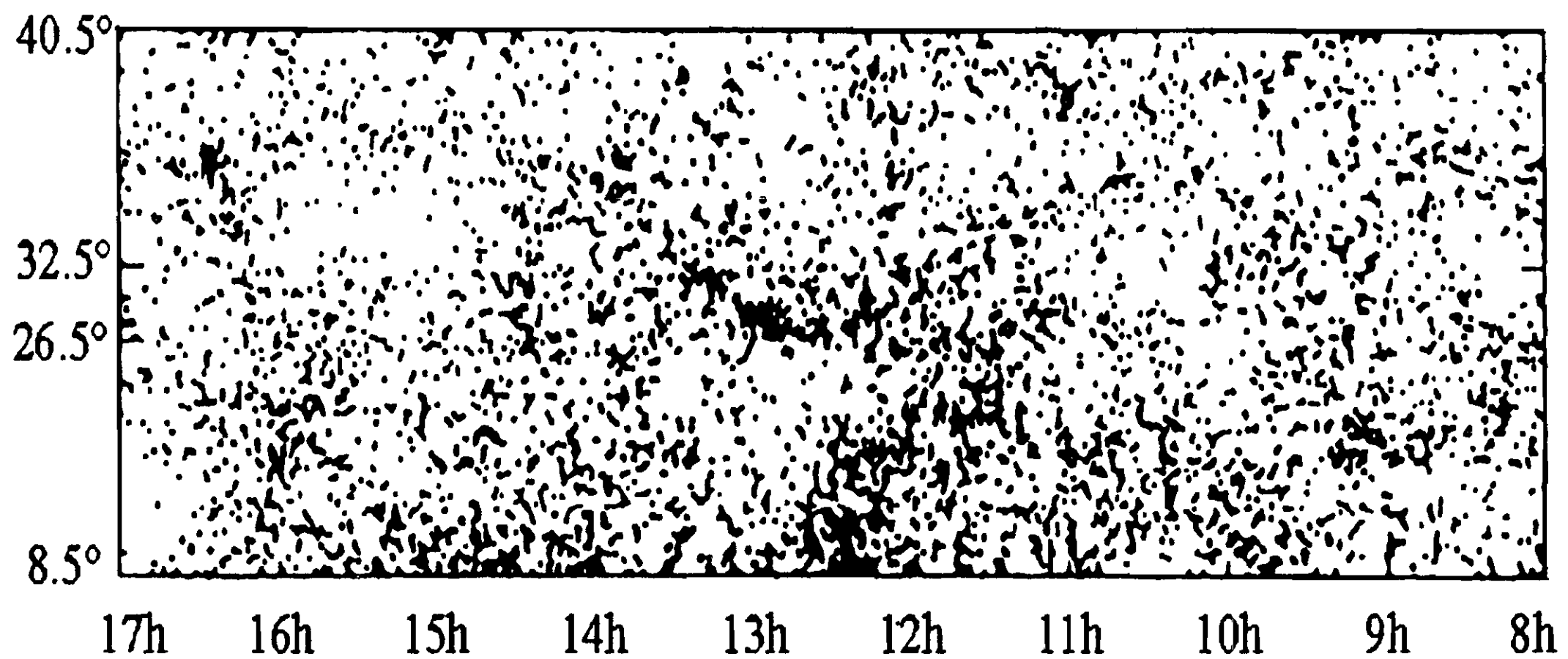


Figura 11.2: Distribuzione angolare estratta dal catalogo costruito da De Lapparent nel 1986.

“banda” della distribuzione mostrata in fig. 11.1, compresa fra  $8.5^\circ$  e  $50.5^\circ$  di latitudine e fra  $120^\circ$  e  $255^\circ$  di longitudine (la banda, cioè, mostrata in fig. 11.2), e proiettiamo su di uno spicchio della sfera celeste la zona compresa fra  $26.5^\circ$  e  $32.5^\circ$  indicata in figura. Ora ricaviamo dalle misure di redshift le distanze di queste galassie selezionate e costruiamo una rappresentazione tridimensionale come quella schematizzata in fig. 11.3, nella quale tutte le galassie sono considerate complanari anche se la loro latitudine galattica differisce di qualche grado.

Introduciamo ora due definizioni fondamentali:

A- la luminosità assoluta  $L$  di un oggetto celeste è definita come la potenza totale emessa da quell'oggetto (posto a distanza  $r$  dall'osservatore). Questa dipende sia dal numero di fotoni emessi (per unità di volume e per unità di tempo), sia dalle dimensioni dell'oggetto. La luminosità pertanto si manifesta attraverso un flusso apparente:

$$f = \frac{L}{4\pi r^2}. \quad (11.2)$$

B- a causa di ragioni storiche, la magnitudo relativa  $m$  di un oggetto avente flusso incidente pari a  $f$ , è data da [98]:

$$m = -2.5 \log f + cost. \quad (11.3)$$







Se la distribuzione è omogenea,  $n(\vec{r}_1) = n(\vec{r}_2) = n$ :

$$\delta^2 p_{1,2} = n^2 \delta V_1 \delta V_2 \quad (11.9)$$

dove con  $n$  si è indicata la densità media del campione di  $N$  oggetti che occupano un volume  $V$ :

$$\frac{N}{V} = n.$$

Ogni scostamento da una distribuzione casuale implica una modifica della (A.55) della App. A. In particolare, in questo caso, dobbiamo supporre che la probabilità di trovare una galassia in un punto sia aumentata dal fatto di averne trovata una vicina e viceversa: si dovrebbero trovare in effetti ammassi di galassie separati da vaste regioni vuote. Introduciamo allora un termine di correzione nella (11.9) imponendo che la probabilità si possa scrivere come:

$$\delta^2 p = n^2 \delta V_1 \delta V_2 [1 + \xi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)]. \quad (11.10)$$

La (11.10) costituisce la definizione implicita della *funzione di correlazione spaziale a due punti*  $\xi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  di Peebles [94]. La assunzione di omogeneità e di casualità su scale sufficientemente grandi, implica che  $\xi(\vec{r}_1, \vec{r}_2)$  tenda a zero per  $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \rightarrow \infty$ . Inoltre l'omogeneità implica anche che la correlazione non possa dipendere dalla posizione della coppia di oggetti ma solo dalla loro distanza.

Per ricavare la funzione di correlazione dai cataloghi di galassie è più utile calcolare la probabilità di trovare un “punto vicino” a distanza  $r$ .

Se ci poniamo nel punto  $r_1$  occupato da una galassia, la probabilità di trovarne un'altra in  $\delta V_2$  è ovviamente dalla (11.10):

$$\delta p(2|1) = \delta p_1 \delta p_2 = 1 \cdot n \delta V_2 [1 + \xi(r)] \quad (11.11)$$

Nell'approccio non frattale a questo punto si approssima la distribuzione di punti con una funzione “continua”  $n(\vec{r})$  di densità. Si possono cioè immaginare le galassie come i costituenti di un “fluido”



continuo con una densità variabile da punto a punto  $n(\vec{r})$ . Se si esegue la media su di un volume grande rispetto alle scale tipiche a cui le galassie sono correlate ci si riduce alla (11.10):

$$\frac{1}{V} \int_V n(\vec{r}) dV = n = \frac{N}{V}.$$

In questo caso "continuo" la probabilità congiunta di trovare una galassia nel volumetto  $\delta V_1$ , centrato attorno a  $\vec{r} + \vec{r}_1$ , ed un'altra nel volumetto  $\delta V_2$  attorno a  $\vec{r} + \vec{r}_2$  è data da:

$$\delta^2 p(2|1) = \frac{n(\vec{r} + \vec{r}_1)n(\vec{r} + \vec{r}_2)\delta V_1\delta V_2}{N^2} \quad (11.12)$$

che, mediata su tutto il campione, diventa:

$$P_{12} = \frac{1}{N^2 V} \int_V n(\vec{r} + \vec{r}_1)n(\vec{r} + \vec{r}_2)\delta V_1\delta V_2 dV. \quad (11.13)$$

Se confrontiamo quest'ultima equazione con la (11.10) e chiamiamo  $r_{12}$  il vettore  $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ , con un cambiamento di variabile  $\vec{r} + \vec{r}_1 \rightarrow \vec{r}$  otteniamo

$$n^2[1 + \xi(r_{12})] = \frac{1}{V} \int_V n(\vec{r})n(\vec{r} + r_{12})dV = \langle n(\vec{r})n(\vec{r} + r_{12}) \rangle \quad (11.14)$$

nella quale abbiamo considerato la funzione di correlazione  $\xi$  dipendente solo da  $|r_{12}|$ , dal che si ricava immediatamente la funzione di correlazione  $\xi(r_{12})$  (vedi Cap. A):

$$\xi(r_{12}) = \frac{\langle n(\vec{r})n(\vec{r} + r_{12}) \rangle}{n^2} - 1. \quad (11.15)$$

La funzione di correlazione descrive quindi la fluttuazione dalla occupazione media. Nel caso di una distribuzione omogenea su grande scala, formata da punti discreti posti ad una certa distanza la  $\xi(r_{12})$  ha l'andamento mostrato in fig. 11.5. Facciamo di nuovo notare che in questo tipo di trattazione si fa uso più volte dell'ipotesi di omogeneità su grande scala del campione. Questa è un'assunzione *a priori* che non può essere verificata in questo contesto. Si vedrà più avanti che ciò comporta dei risultati completamente ingiustificati, che non rispecchiano

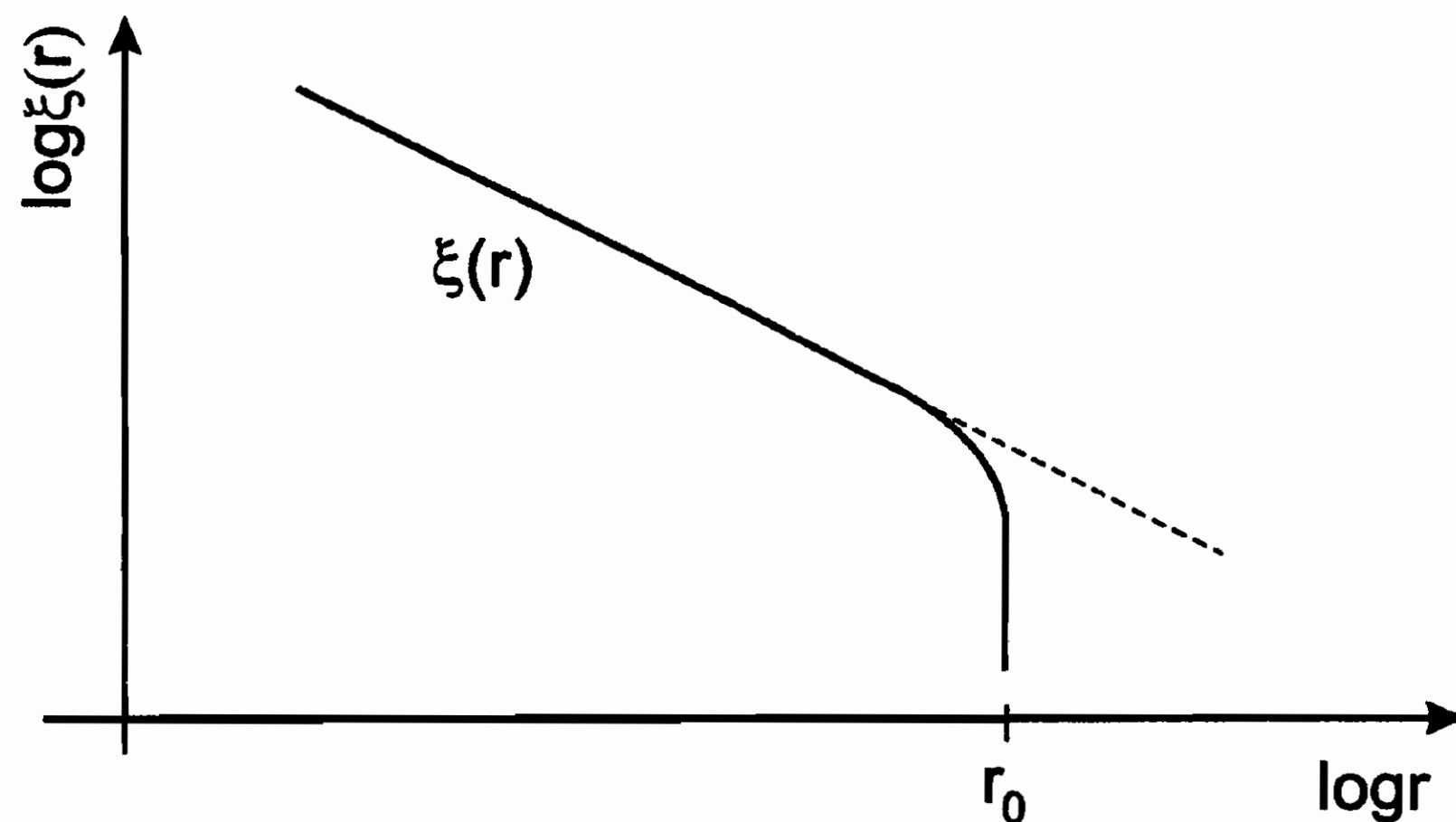


Figura 11.5: Andamento teorico previsto per la funzione di correlazione a due punti in scala bilogarithmica. È segnata anche la lunghezza di correlazione  $r_0$ .

il vero comportamento del campione [101]. Il fatto di usare una funzione di correlazione adimensionale, normalizzando a  $n^2$  introduce dei grossi problemi se la densità media non è una proprietà significativa, come ad esempio nel caso di una distribuzione frattale, anche se definita in modo univoco. Infatti per una distribuzione autosimile,  $n$  è funzione della risoluzione a cui si osserva il campione ovvero di  $R_{VL}$  del campione in esame.

A questo punto è necessario verificare i risultati ai quali si giunge conducendo uno studio impostato su criteri che non implicano necessariamente la omogeneità, considerando cioè il sistema rigorosamente discreto: questo non è altro che l'opera introdotta nelle statistiche quantistiche di cap.A.

Prendiamo in esame un catalogo tridimensionale, ad esempio CfA ed estraiamo da questo un sottocampione limitato in volume (vedi §11.2) contenente un numero  $N_g$  di galassie. Poniamoci sulla  $i$ -esima galassia e contiamo il numero di galassie  $\delta N_i$  comprese in un volumetto  $\delta V_i$  attorno ad essa. Se  $\delta V_i$  è molto grande, sommando i  $\delta N_i$  e dividendo per  $N_g$ , troviamo la media di "vicini" che ha ogni galassia. Se invece riduciamo sempre più il volume troviamo infine la probabilità che un punto disti da un altro meno del raggio  $r$  del volume  $\delta V_i$ . La probabilità di trovare un

oggetto del sistema nel generico "punto vicino" si scrive quindi:

$$P(r) = \frac{1}{N_g} \sum_{i=1}^{N_g} \delta N_i \quad (11.16)$$

che è l'analogia della (11.7) per il caso continuo.

La stima di  $\xi(r)$  segue dalla (11.11), tenendo conto della (11.16) [95, 102]:

$$1 + \xi(r) = \frac{\sum_{i=1}^{N_g} \delta N_i}{n \sum_{i=1}^{N_g} \delta V_i} = \frac{N_{gg}(r)}{n \sum_{i=1}^{N_g} \delta V_i}. \quad (11.17)$$

dove al numeratore compare ora il numero di coppie  $N_{gg}(r)$  nel campione a distanza  $r$ . Per valutare il denominatore è necessario costruire una distribuzione casuale poissoniana di punti tramite una simulazione Monte Carlo di densità media  $n_p$ . Dopodichè si conta il numero di coppie  $N_{gp}(r) = \sum_{i=1}^{N_g} \delta N_i^p$  fra le galassie e i punti della simulazione a distanza  $r$ . Si ha:

$$\sum_{i=1}^{N_g} \delta V_i = \frac{1}{n_p} \sum_{i=1}^{N_g} \delta N_i^p = \frac{1}{n_p} N_{gp}(r), \quad (11.18)$$

Utilizzando la (11.18) nella (11.17) si ottiene infine:

$$\xi(r) = \frac{N_{gg}(r) n_p}{N_{gp}(r) n} - 1. \quad (11.19)$$

Nella pratica astronomica, per tenere conto di effetti di bordo e di vuoti troppo grandi all'interno della distribuzione si introduce un fattore peso che dipende dalla posizione delle coppie nel campione. Con questo procedimento, si è trovato empiricamente per il catalogo (CfA) che, per piccoli  $r$ , la funzione di correlazione segue una legge di potenza illustrata qualitativamente nella fig. 11.6 [95].

La legge di potenza per la probabilità vuol dire distribuzione decisamente frattale. Poichè l'Universo può essere considerato uno spazio euclideo di dimensione 3, questa è anche la dimensione dello spazio di supporto della distribuzione frattale. Pertanto la funzione di correlazione viene parametrizzata, mettendo in risalto il fatto che l'esponente è legato alla dimensione frattale  $D$  della distribuzione, o alla sua codimensione  $C$ :

$$\xi(r) \approx A_G r^{-(3-D)} ; \quad 3 - D \approx 1.7. \quad (11.20)$$

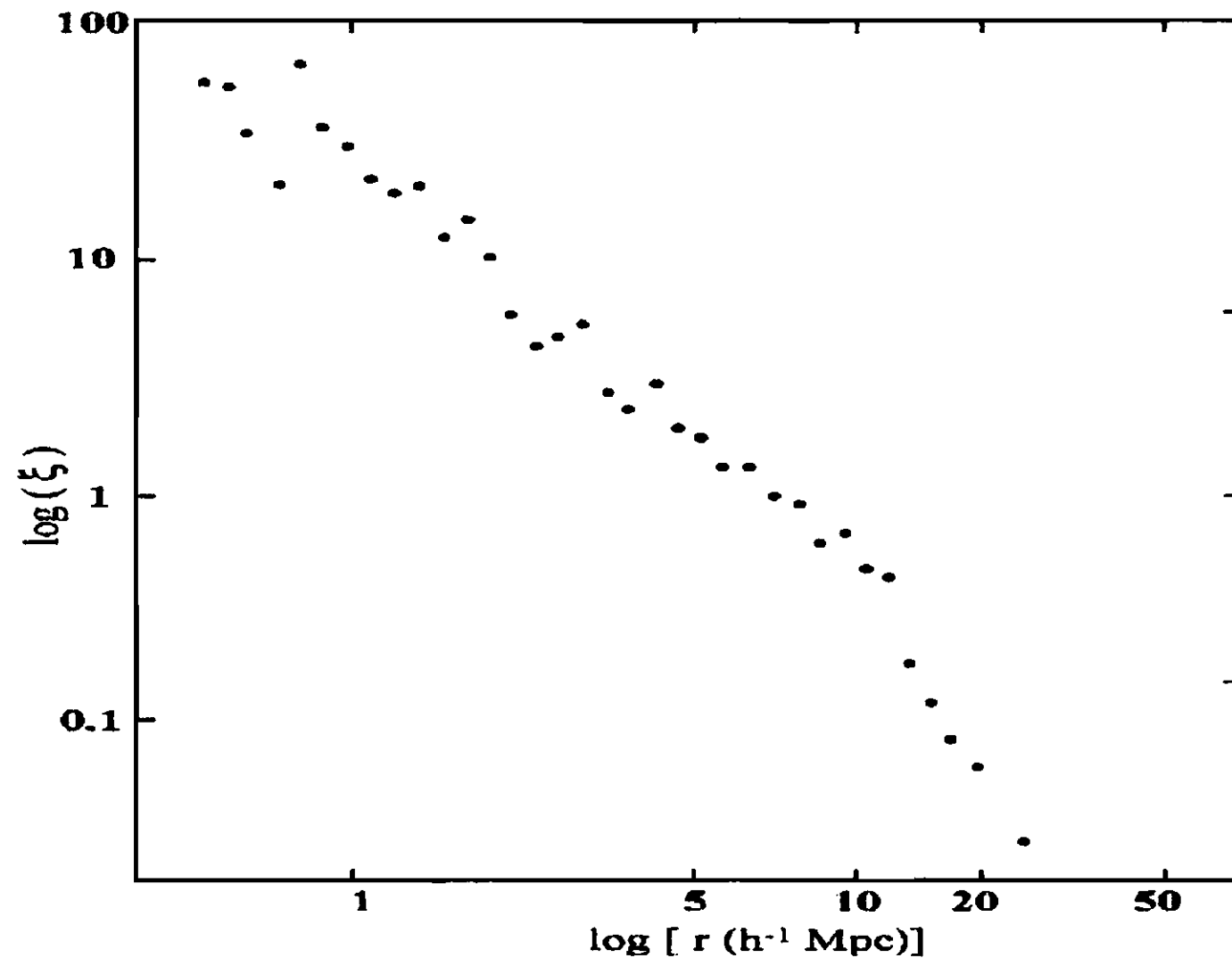


Figura 11.6: La funzione di correlazione a due punti in scala bilogarithmica per il catalogo (CfA).

La costante  $A_G$  è adimensionale ed è pari circa a 20 per la distribuzione di galassie.

L'andamento della funzione  $\xi(r)$  si discosta da questa legge di potenza a partire da un valore:

$$r = r_0^G \quad (11.21)$$

detta *lunghezza di correlazione* (o di *coerenza*) che segna la transizione da un regime correlato ad uno incorrelato [95]. La lunghezza  $r_0^G$  viene valutata dalla condizione:

$$\xi(r_0^G) = 1. \quad (11.22)$$

Nel caso del catalogo CfA è stato stimato il valore

$$r_0^G \approx 5h^{-1} Mpc. \quad (11.23)$$

Questo stesso valore è stato successivamente confermato da analisi condotte su altri cataloghi anche se è tuttora in discussione[102]. In effetti l'esistenza di una lunghezza di correlazione di pochi megaparsec sta a significare che non si dovrebbero osservare strutture più grandi di una decina di megaparsec, mentre queste sono presenti con costanza in diversi campioni. Si può dimostrare, e lo faremo in seguito, che una

lunghezza di correlazione di questo tipo non è in alcun modo legata a proprietà intrinseche della distribuzione in esame.

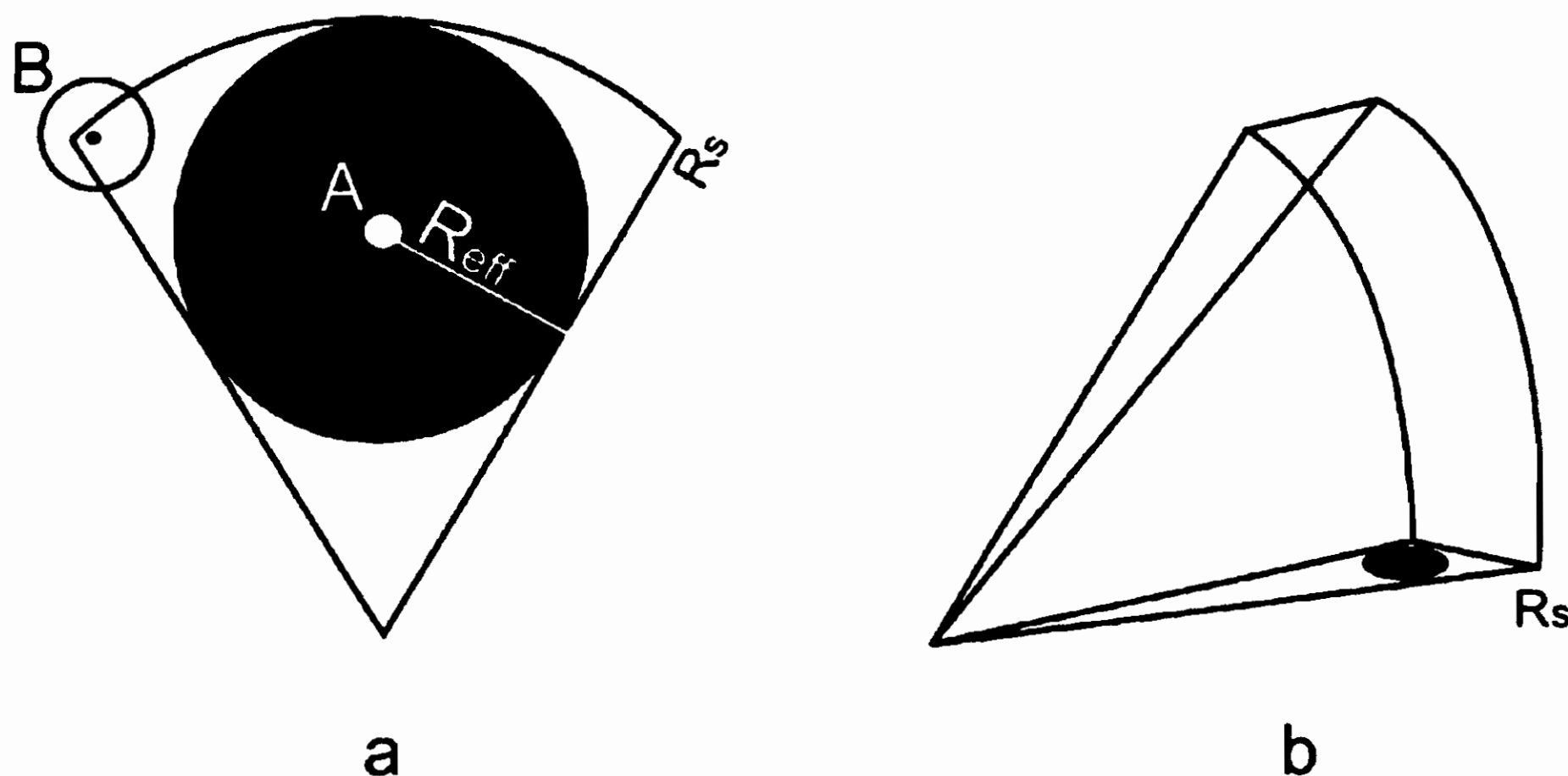


Figura 11.7: Nonostante la profondità del campione sia pari a  $R_S$ , l'analisi deve essere limitata ad  $r = R_{eff}$ , per non dover aggiungere punti arbitrari che potrebbero falsare i risultati. Nella trattazione che segue sono stati esclusi dalla statistica punti come il B della figura a, in quanto non completamente contenuti nel campione. Si noti come, (figura b), per cataloghi che coprono un piccolo angolo di cielo si ha  $R_{eff} \ll R_S$ .

Occorre dedicare molta attenzione al modo in cui si trattano le dimensioni finite del campione. Per evitare di introdurre "omogeneizzazioni" involontarie bisogna limitarsi a considerare (cfr. fig. 11.7)  $r < R_{eff}$  dove  $R_{eff}$  è il raggio della sfera massima contenuta nel campione di profondità  $R_{VL}$  e volume  $V$ . Se non ci si limita a questa distanza, si finisce con l'assumere implicitamente che le parti di distribuzione escluse dal rilevamento si comportino in modo analogo a quelle campionate. Dobbiamo inoltre scartare dalla statistica i punti analoghi al punto B di fig. 11.7, o i punti per i quali una parte della relativa sfera di raggio  $r$  si trova al di fuori del volume del campione.

Se si escludono tutte queste possibilità non vi è alcuna necessità di "pesare" i punti del sistema e si è sicuri di condurre una analisi priva di assunzioni.

## 11.4 La probabilità condizionata

Va ora preso in considerazione un approccio che non abbia bisogno di ipotesi di partenza e mediante il quale sia davvero possibile verificare la validità dell'assunzione di omogeneità nella distribuzione delle galassie.

Una quantità che riflette in modo dettagliato le proprietà macroscopiche di un sistema di particelle puntiformi è [103] la probabilità condizionata:

$$G(\vec{r}) = \langle n(\vec{r})n(\vec{r}') \rangle . \quad (11.24)$$

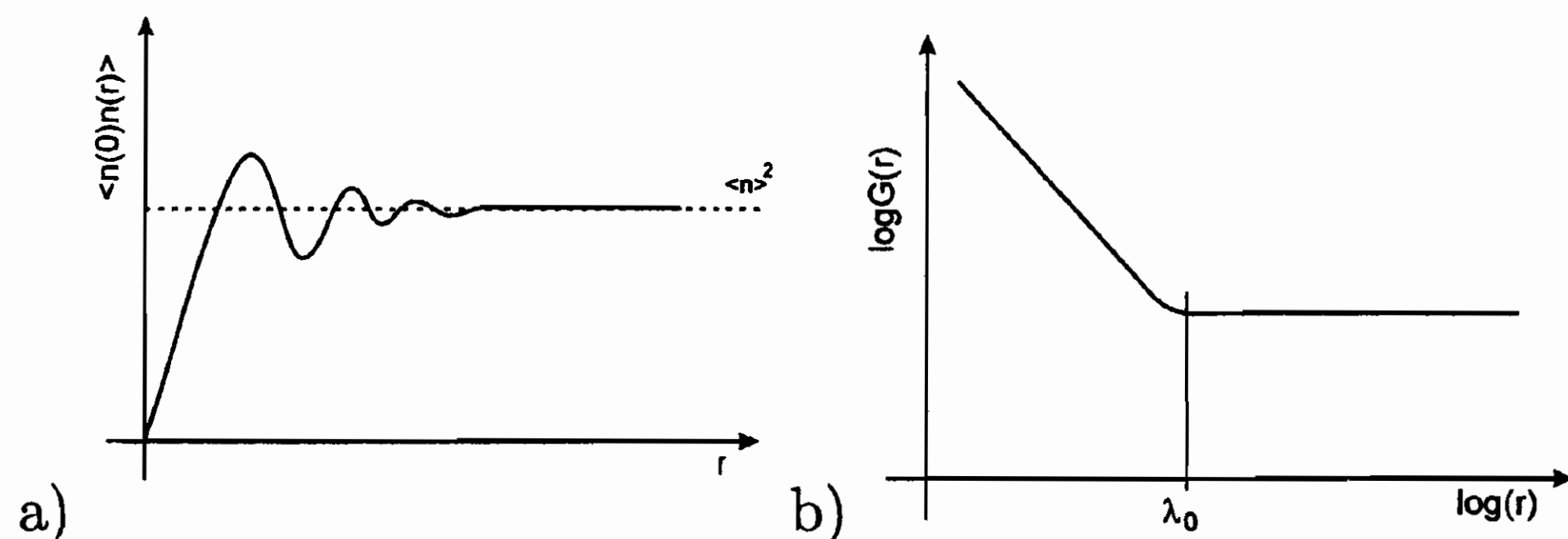


Figura 11.8: a- Andamento di  $\langle n(0)n(r) \rangle$  al variare di  $r$  per un ipotetico fluido in un recipiente; b- Andamento della funzione  $G(r)$  in scala bilogaritmica.

Questa quantità è proporzionale alla probabilità di trovare una galassia in  $\vec{r}$  se supponiamo che ce ne sia una in  $\vec{r}'$ . In questo senso è una misura di probabilità condizionata. Per distanze che diventano molto grandi, rispetto alla scala tipica di un possibile “ammassamento” (clustering) degli oggetti della distribuzione, la probabilità di trovare una galassia in  $\vec{r}'$  diventa indipendente da quello che succede in  $\vec{r}$ , cioè le densità diventano incorrelate:

$$\langle n(\vec{r})n(\vec{r}') \rangle \rightarrow \langle n(\vec{r}) \rangle \langle n(\vec{r}') \rangle = n^2 \text{ per } |\vec{r} - \vec{r}'| \rightarrow \infty. \quad (11.25)$$

Per una distribuzione omogenea, come ad esempio un fluido contenuto in un recipiente, la funzione  $\langle n(0)n(r) \rangle$  dovrebbe avere l'andamento riportato in fig. 11.8a, mentre la grandezza  $G(\vec{r})$  data dalla (11.24), per

la stessa distribuzione, è rappresentata in fig. 11.8b. Per piccole distanze però, tipicamente più piccole delle distanze intermolecolari, la funzione cresce partendo da zero fino ad arrivare ad un primo massimo quando  $r$  è pari alla distanza fra due molecole; in seguito, dopo alcune oscillazioni, si attesta attorno ad  $n^2$ [96]. Nel paragrafo precedente abbiamo visto come la funzione di correlazione  $\xi(r)$ , è resa adimensionale normalizzando  $G(r)$  a  $n^2$  (cfr la (11.24) con la (11.15)); inoltre abbiamo detto che si assume “a priori” che la distribuzione risulti omogenea a grande scala, senza che questa ipotesi sia verificata in quanto la funzione non ne controlla la validità.

Pietronero [96, 101] ha invece presentato un’analisi alternativa che si basa sulla definizione di una *densità condizionata* che risulta più utile della  $G(r)$  in quanto ha le dimensioni di una densità invece che quelle di una densità al quadrato. La densità condizionata è definita come :

$$\Gamma(\vec{r}) = \frac{\langle n(\vec{r}_0)n(\vec{r}_0 + \vec{r}) \rangle}{n} \quad (11.26)$$

Le due funzioni (11.24) e (11.26) differiscono semplicemente per un fattore  $\frac{1}{n}$ . Ciò permette di ricavare semplicemente la relazione:

$$G(\vec{r}) = n\Gamma(\vec{r}). \quad (11.27)$$

Esplicitando la media secondo la (11.12) si ha:

$$\Gamma(\vec{r}) = \frac{\frac{1}{V} \int_V n(\vec{r}_0)n(\vec{r}_0 + \vec{r})d\vec{r}_0}{\frac{N}{V}} \quad (11.28)$$

con il che  $\Gamma(r)$  risulta indipendente da  $V$ .

Facciamo correre  $d\vec{r}_0$  su tutto il campione: il termine  $n(\vec{r}_0)$  vale 1 se in  $r_0$  si trova una galassia; vale 0 altrimenti. Quindi se ci limitiamo ai valori di  $r_0$  in cui si trova una galassia possiamo scrivere:

$$\Gamma(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N n(\vec{r}_i + \vec{r}) \quad (11.29)$$

Per eliminare la dipendenza dalla direzione operiamo una media angolare sull'angolo solido  $d\Omega$ :

$$\Gamma(r) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{4\pi r^2 \Delta r} \int d\Omega \int_r^{r+\Delta r} n(\vec{r}_i + \vec{r}') d\vec{r}'. \quad (11.30)$$

La (11.30) ci dice come operativamente dobbiamo fare per valutare la densità condizionata di una certa distribuzione.

Se applicato ad un solo catalogo, l'uso di  $G(r)$ , piuttosto che  $\Gamma(r)$  è del tutto irrilevante, dato che si ha solo una traslazione dell'asse verticale di un fattore  $n$  fra le due funzioni. Se invece si devono confrontare dati che provengono da diversi cataloghi, è sicuramente più opportuno computare la densità condizionata, che è indipendente dal volume del campione [104].

Va osservato che la normalizzazione a  $n$  non introduce nessun effetto indesiderato [come accadeva invece per la  $\xi(r)$ ] in quanto dalla (11.29) si vede come in questo modo si ha solo un fattore  $N$  al denominatore che è comunque una quantità ben definita, anche se la distribuzione in esame non presenta fenomeni di omogeneizzazione. L'ulteriore fattore  $n$  della funzione di correlazione, invece, rimane una normalizzazione ad una densità media che non rappresenta una proprietà caratteristica di distribuzioni fortemente disomogenee.

Si ha anche, confrontando la definizione di  $\xi(r)$  data dalla eq. (11.15) con quella di  $\Gamma(r)$  data dalla eq. (11.26):

$$\xi(r) = \frac{\Gamma(r)}{n} - 1. \quad (11.31)$$

Nel prossimo paragrafo vedremo come queste idee vengono formalizzate nel caso di varie distribuzioni ed in particolare per una di carattere nettamente frattale.

## 11.5 Validazione delle funzioni usate

Prima di studiare direttamente i cataloghi di galassie, occorre valutare la vecchia funzione  $\xi(r)$  data dalla (11.19) e la nuova funzione  $\Gamma(r)$



data dalla (11.30) su distribuzioni simulate al calcolatore, di cui quindi conosciamo a priori il comportamento. La funzione di correlazione a due punti (11.15) è valutata tramite il procedimento descritto nel §11.3. Per la densità condizionata si conta il numero di galassie contenute in un guscio sferico di piccolo raggio  $r$ , centrato su ogni galassia del campione. Questo numero è poi diviso per il volume relativo onde ottenere una densità e quindi mediato su tutto il campione.

Se il guscio sferico attorno ad una galassia fuoriesce dal volume definito per contenere il campione, questa galassia è esclusa dalla statistica. Il raggio della sfera viene quindi aumentato e la procedura ripetuta. Il raggio massimo preso in esame è il raggio effettivo  $R_{eff}$  mostrato in fig. 11.7 e cioè il raggio della sfera massima completamente contenuta nel campione. Naturalmente per  $r$  grande si possono calcolare le funzioni solo su poche galassie vicino al centro del campione. Questo approccio riduce la statistica a disposizione, ma a differenza del metodo dei pesi adottato da Davis e Peebles, ha il pregio di essere assolutamente libero da ogni assunzione.

Tre sono i tipi di distribuzione che ricoprono un ruolo di particolare interesse nella nostra trattazione:

- 1- una distribuzione omogenea;
- 2- una distribuzione frattale a tutte le scale;
- 3- una distribuzione frattale che diventa omogenea per  $r > \lambda_0$ .

Per prima cosa simuliamo una distribuzione omogenea (mostrata nella fig. 11.9). Generiamo un grande numero di galassie con un generatore di numeri casuali e posizioniamole in un grande volume nello spazio tridimensionale. Da questo estraiamo un sottocampione di volume pari alla parte di catalogo (CfA) che verrà analizzata successivamente e che contiene 442 punti denominato *North Zwicky*, dal nome dell'astronomo che per primo ha raccolto i dati di quella parte di cielo e che è visibile nella fig. 11.12 del prossimo §. La figura è realizzata con un tipo di proiezione che rende minime le distorsioni, di modo che le aree abbiano lo stesso rapporto con lo spazio reale in ogni punto della proiezione.

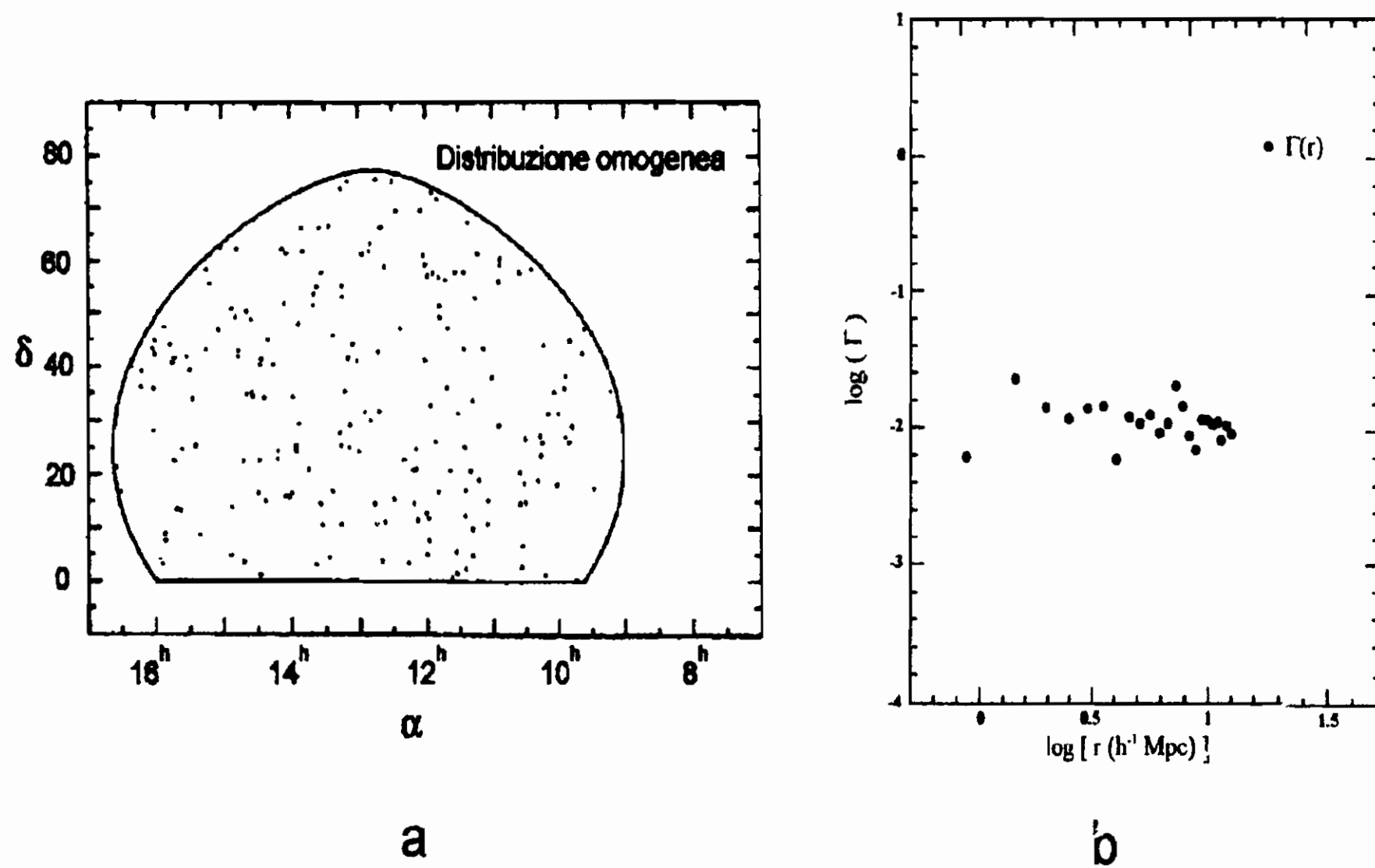


Figura 11.9: Simulazione di una distribuzione omogenea di galassie: a) proiezione bidimensionale della distribuzione; b) valutazione della densità condizionata per la distribuzione mostrata in figura a.

Osservando la distribuzione della densità condizionata ottenuta nella simulazione, in scala bilogarithmica, (fig. 11.9) si vede come questa presenti alcune fluttuazioni, specialmente per piccoli  $r$ , ma come risulti tutto sommato indipendente da  $r$ . Questo suggerisce che essa mostri una densità pressochè costante per ogni scala. Anche se difficilmente rintracciabile per piccole distanze, l'omogeneità appare *sperimentalmente* presente per distanze maggiori di  $8h^{-1}Mpc$ .

Prima di simulare una distribuzione frattale mediante il procedimento dei voli di Levy[157], descritto per la prima volta da Mandelbrot nel 1982, cerchiamo di ricavare per la densità condizionata e per la funzione di correlazione a due punti le rispettive forme analitiche sulla base delle proprietà dei frattali.

Riportiamo quindi di seguito alcune proprietà dei frattali applicate al nostro caso specifico.

Possiamo generalizzare il concetto di dimensione di cluster, introdotto nel §2.7: se supponiamo che in una sfera di raggio  $r_0$ , siano contenuti















implicita nei frattali. L'unica ipotesi che viene a cadere è quella di analiticità dello spazio, che è negata dai dati raccolti frutto delle osservazioni sperimentali.

Dalla fig. 11.12 si ricava una pendenza, e di conseguenza una dimensione frattale, della  $\Gamma(r)$  e della  $\xi(r)$  pari a:

$$3 - D \approx 1.6 \pm 0.1; \quad ; D \approx 1.4 \pm 0.1. \quad (11.44)$$

## 11.7 Analisi multifrattale

È possibile ora tentare di analizzare il catalogo stellare con la tecnica dei multifrattali introdotta nel §5.6 del Cap. 5 applicata al nostro problema.

A tale scopo associamo alla distribuzione geometrica delle galassie la loro massa  $\mu_i$ . La funzione continua di densità che ne descrive i punti rappresentativi può essere esplicitata come segue:

$$\rho(\vec{r}) = \sum_{i=1}^N \mu_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) \quad (11.45)$$

A questo punto siamo in grado di sondare le proprietà della distribuzione di materia visibile nell'Universo. La massa di ogni galassia può essere messa in relazione con la sua luminosità assoluta nel seguente modo:

$$M = k_i L^\beta \quad (11.46)$$

dove  $k_i$  rappresenta il rapporto massa/luce e può dipendere dal tipo di galassia  $i$ . L'esponente  $\beta$  è quello che racchiude le caratteristiche del multifrattale. Nella maggior parte degli studi [106] si trova (o si assume):

$$\beta \approx 1$$

che corrisponde a  $M/L = \text{costante}$ . Vi sono attualmente alcune indicazioni che presuppongono che il valore di  $\beta$  possa essere consistente con una lieve dipendenza della massa dalla luminosità ( $\beta \approx 1.25$ ), ma questo non ha nessuna influenza sulla natura multifrattale del fenomeno influenzandone solo i parametri.

È necessario estrarre dal catalogo CfA, descritto in precedenza, la magnitudine assoluta di ogni galassia usando la (11.5). Da questa si passa attraverso la (11.4) alla luminosità della galassia con la quale si stima la massa tramite la (11.46).

Poichè la massa delle galassie può variare di un fattore  $10^6$ , da circa  $10^7$  fino a  $10^{13}$  volte la massa del Sole, la variazione di scala è ampiamente sufficiente per scoprire se è presente un comportamento multifrattale all'interno del campione.

Consideriamo tutta la distribuzione contenuta in un cubo di lato  $L$  e dividiamolo in *box* di lato  $l$ , in modo da poter definire un processo di *box counting* simile a quello definito nel Cap. 5 §5.6. Valutiamo quindi la funzione  $N(q, \delta)$

definita dalla (5.28) con  $\delta = L/l$ , per i vari momenti  $q$  e al variare di  $\delta$ . Sia i grandi valori di  $\delta$  (tutto il campione contenuto in uno o due *box*) che i piccoli valori di  $\delta$  (*box* vuoti o che contengono una sola galassia) non danno grossi contributi al computo di  $N(q, \delta)$ .

Per  $q = 0$  si ottiene l'andamento di  $N(\delta)$  mostrato in fig. 11.13 che evidenzia proprietà di scaling con un andamento secondo una legge di potenza:  $N(q, \delta) \doteq \delta^D$ . L'esponente  $D(q = 0)$  di questa legge può essere ricavato dalla derivata nella zona lineare che fornisce una dimensione di *box counting*:

$$D(0) \approx 1.5 \pm 0.1$$

in sostanziale accordo con la (11.44), e quindi con la dimensione di cluster della distribuzione.

Per  $q = 2$  si ottiene invece (vedi fig. 11.14):

$$D(2) = -\tau(2) = 1.3 \pm 0.1. \quad (11.47)$$

L'analisi fin qui condotta (come quella dell'intero spettro di  $q$ ) ci porta a dire che non esiste alcuna evidenza per l'omogeneità della distribuzione completa della materia in questo campione.

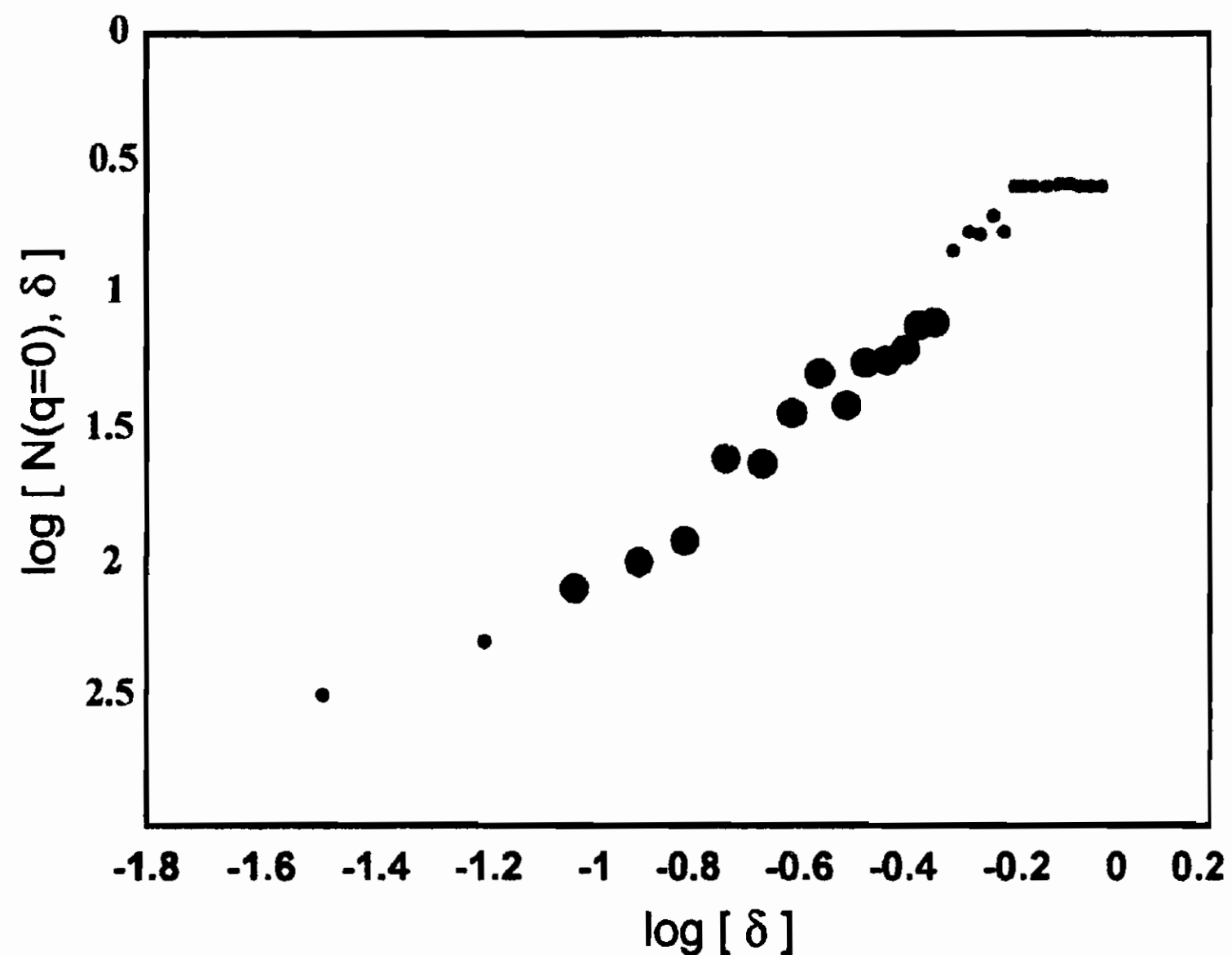


Figura 11.13: Andamento di  $N(q = 0, \delta)$  in funzione della risoluzione  $\delta$  in scala bilogarithmica. I punti più piccoli si riferiscono ai conteggi in cui tutte le galassie sono contenute in un solo *box* o viceversa ogni *box* contiene solo una galassia. Interpolando con una retta i punti compresi nella zona lineare si ottiene una pendenza di  $1.5 \pm 0.1$ .

Una distribuzione omogenea avrebbe in effetti implicato l'esistenza di “un singolo punto dello spettro multifrattale”, caratterizzato da  $f = \alpha = D = 3$ .

Si sarebbe ottenuto cioè:

$$\begin{cases} N(0, \delta) = \delta^{-3} & q = 0 & \tau(0) = 3 \\ N(2, \delta) = \delta^3 & q = 2 & \tau(2) = -3 \end{cases} \quad (11.48)$$

in evidente contrasto con quanto mostra il comportamento dei dati.

Continuando l'analisi per vari valori di  $q$  si deriva la funzione  $\tau(q)$ . Per valori di  $q$  maggiori o uguali a zero la curva è ben definita e fornisce una chiara evidenza di “multifrattalità”.

Dal comportamento di  $\tau(q)$  si ottiene infine lo spettro di  $f(\alpha)$  dalle

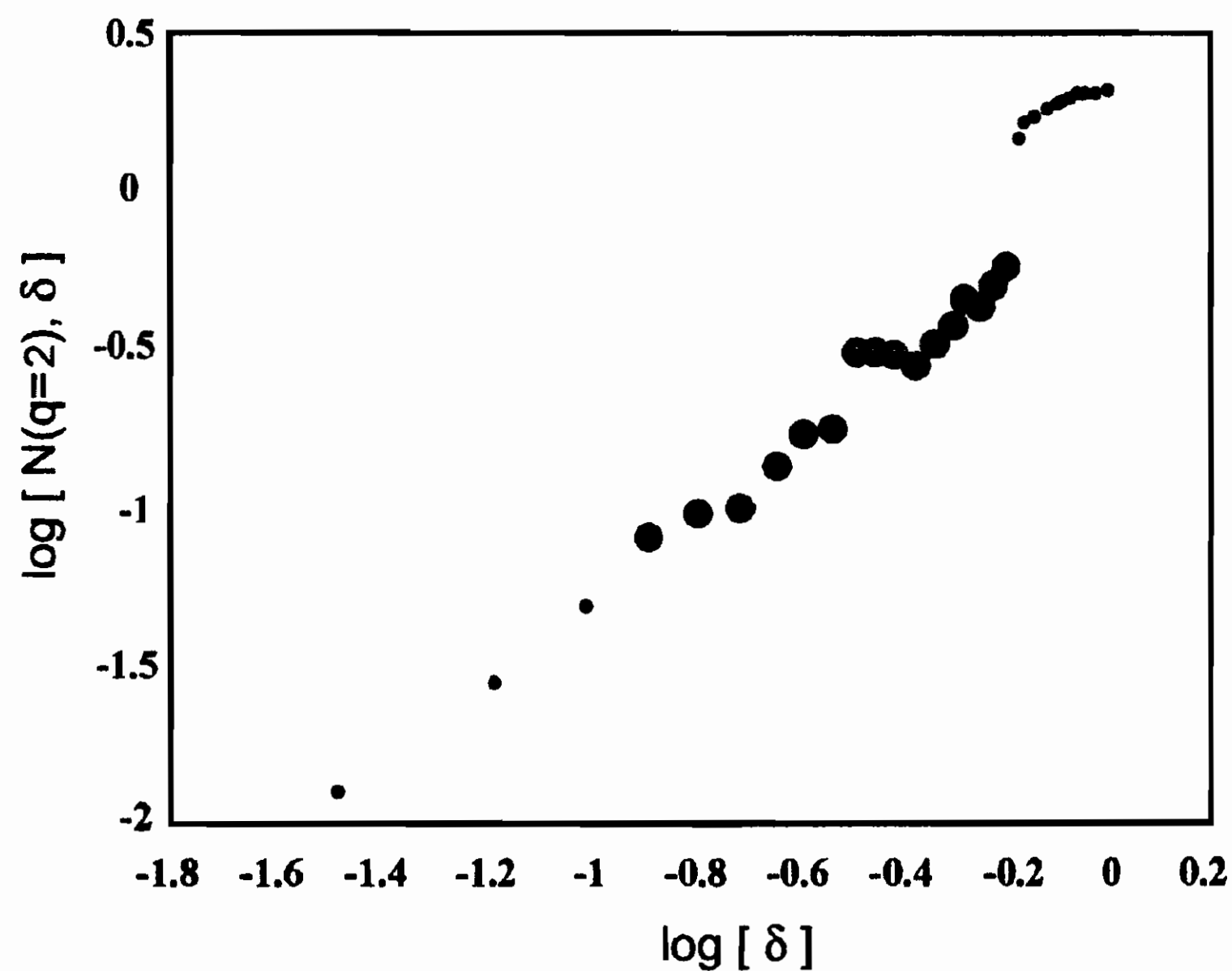


Figura 11.14: Andamento di  $N(q = 2, \delta)$  in funzione della risoluzione  $\delta$  in scala bilogarithmica. I punti più piccoli si riferiscono ai conteggi in cui tutte le galassie sono contenute in un solo *box* o viceversa ogni *box* contiene solo una galassia. Facendo il best fit dei punti compresi nella zona lineare si ottiene una pendenza di  $1.3 \pm 0.1$ .

(5.36), (5.37) che è riportato in fig. 11.15. Dal grafico si ricava:

$$\begin{aligned} q \rightarrow \infty & \quad f(\alpha) \rightarrow 0 & \quad \alpha_{min} = 0.65 \\ q = 0 & \quad f(\alpha) = 0 & \quad \alpha_0 \end{aligned} \quad (11.49)$$

## 11.8 Conseguenze dei risultati ottenuti

Abbiamo dunque trovato che il catalogo CfA, ma l'analisi può essere estesa con gli stessi risultati a tutti gli altri cataloghi tridimensionali ora disponibili, presenta caratteri multifrattali che confermano anche i risultati ottenuti in precedenza con la densità condizionale.

Oltre al fatto di non presentare alcuna tendenza all'omogeneizzazione nella distribuzione della materia visibile nell'Universo, vediamo quali



così come è stato formulato fino ad oggi e che hanno trovato completo riscontro nei dati sperimentali, sono l'isotropia della radiazione di fondo a  $2.7K$  e la Legge di Hubble.

La nuova visione dell'Universo come altamente inomogeneo si sposa poco bene con la grande isotropia della radiazione di fondo, che risulta praticamente costante in qualunque direzione la si osservi. Questo fatto non può certo essere preso a titolo di prova per cercare di screditare l'approccio che abbiamo seguito nella nostra trattazione e screditarne i risultati ottenuti; pone invece nuovi interrogativi circa la correttezza del modello del Big Bang caldo e richiede senza dubbio ulteriori perfezionamenti del modello stesso.

Per quanto riguarda la Legge di Hubble, questa è un fatto puramente sperimentale e come tale incontrovertibile. Fino ad oggi le teorie cosmologiche si erano limitate a dimostrare come l'esistenza di un legame fra velocità di allontanamento delle galassie e loro distanza potesse essere facilmente previsto per un Universo omogeneo in continua espansione. Ma questo è solo il modello più semplice che verifica i dati sperimentali. Non è assolutamente detto che lo stesso legame non possa essere ottenuto anche per una struttura dell'Universo notevolmente più complessa.

Ultimo fatto da non trascurare è la presenza fantomatica nel cosmo della "materia oscura": fino ad oggi non vi è stato nessun esperimento in grado di dimostrarne la presenza in modo certo e neppure un dato è disponibile circa la sua natura. Non è quindi possibile trarre alcuna conclusione riguardo la sua distribuzione. Potrebbe anche accadere che le vecchie ipotesi circa una distribuzione della materia analitica, omogenea e isotropa possano valere per la materia oscura e non per quella visibile.

In ogni caso si aprono numerose strade verso una nuova concezione della cosmologia di base che deve risolvere numerose contraddizioni e nuovi problemi e per gli astrofisici ci sarà molto da lavorare nei prossimi anni.

In primo luogo si può dire che supponendo la materia oscura in un qualche modo legata alla materia luminosa, bisogna introdurre delle di-

stribuzioni frattali di masse nei termini di sorgente delle equazioni di Einstein per determinare la metrica dell'Universo e questo apre già di per sé molte strade nei nuovi approcci alla cosmologia.

Un'altra importante conseguenza, in questo caso sperimentale, del carattere multifrattale della distribuzione, si ha nella distribuzione delle diverse luminosità osservate nel cielo e nella sua parametrizzazione, quella che è nota agli astrofisici come la *funzione di luminosità di Schechter*[107]:

$$\Phi(L) = AL^{-\delta}e^{-\frac{L}{L^*}} \quad (11.50)$$

dove l'esponente  $\delta$  ha un valore compreso fra 1 e 1.3. La massima luminosità, ovvero la massa più grande osservabile in una porzione di cielo segue una legge di potenza che si estende fino al valore  $L^*$ .





# Capitolo 12

## Multifrattali ed Economia

### 12.1 Introduzione

L'universalità del linguaggio matematico si manifesta nella sua flessibilità, nella sua applicabilità ai più disparati campi del sapere scientifico. I frattali, particolarmente nella loro generalizzazione statistica, come multifrattali statistici, confermando questo fatto, si prestano ad una applicazione anche nel settore economico, oltre a quelle più tradizionali viste nei capitoli precedenti. Lo stesso Mandelbrot ha recentemente pubblicato studi in questo campo, ad esempio[108]. Qui vogliamo semplicemente fare qualche cenno, per completezza, ad un filone di ricerca proprio dell'Economia, rimandando ai lavori originali, del resto recentissimi, chi volesse approfondire l'argomento.

La teoria "classica" delle fluttuazioni dei prezzi del mercato finanziario è la teoria del *portafoglio* ("portfolio theory" che traduciamo sempre con "teoria del portafoglio"), la quale, come tutte le teorie scientifiche, fa delle assunzioni di partenza (ipotesi) e da esse cerca di derivare qualche legge confrontabile con la realtà sperimentale.

Seppure non è questo volume la sede adatta a discutere nel dettaglio quanto sopra, per ragioni di mera informazione, vale la pena di ricordare semplicemente due diverse giustificazioni teoriche di base[109], a giustificazione delle assunzioni, entrambe partenti, invero, da ipotesi

abbastanza poco verosimili[110]:

- una assume che la funzione di utilità dei soggetti decisorì sia di tipo quadratico con evidenti limiti di significatività e applicabilità in campo economico;

- l'altra assume che i rendimenti dei titoli si distribuiscano in modo gaussiano, condizione smentita dalla recente evidenza empirica.

Nonostante ciò, la teoria classica del portafoglio continua ad essere uno strumento usato come pratico riferimento nella maggior parte delle situazioni concrete. Ciò in quanto in economia interessa maggiormente avere un modello che fornisca soluzioni semplici ed effettivamente praticabili, piuttosto che modelli più realistici ma di più difficile applicazione

L'approccio frattale critica le assunzioni di fondo della teoria del portafoglio, a causa delle inadeguatezze che questa manifesta nei confronti della *reale* situazione del mercato.

A grandi linee possiamo individuare due fondamentali ipotesi nella teoria del portafoglio, poste da Mandelbrot per la prima volta in discussione:

- la assunzione che i cambiamenti, le fluttuazioni dei prezzi siano *st statisticamente indipendenti* le une dalle altre: il prezzo di oggi non ha alcuna correlazione con il prezzo del giorno successivo, il "passato" non esercita alcuna influenza sul "futuro" (cfr Cap. 4);
- la distribuzione delle fluttuazioni è ritenuta *gaussiana*, la nota distribuzione "normale", i cui limiti di applicabilità sono stati ampiamente discussi nei capitoli precedenti, in particolare nell'Appendice A.

Le conseguenze delle due ipotesi sono facilmente intuibili: il semplice calcolo dell'integrale della gaussiana nell'intervallo di  $3\sigma$  dà circa il 99.7% : soltanto il tre per mille degli eventi normalmente distribuiti dista più di tre deviazioni standard dalla media. Sperimentalmente questo non si verifica. Diciamo che entro 3 deviazioni standard si ritrova

circa il 5% delle fluttuazioni di mercato. L'applicabilità della teoria del portafoglio risulta dunque limitata al 95% dei casi osservati. Questo fatto potrebbe sembrare tutto sommato rassicurante, ma è proprio quel 5% di eventi *rari* ad essere decisivo sia sul piano concreto dell'investitore - che ha come unico obiettivo la massimizzazione del guadagno per un dato livello di rischio - sia sul piano "storico", essendo proprio quelle tempeste, rare ma non impossibili, a costituire gli eventi degni di nota e da ricordare. Come caso limite, basti pensare allo storico *Venerdì Nero* di Wall Street, che diede inizio alla *grande crisi del 1929*; tale evento fu di rilevanza mondiale, mentre i periodi di relativa calma passarono del tutto inosservati rispetto ad esso.

Naturalmente il discorso vale anche in senso opposto, relativamente ai periodi di "boom" economico, fintantoché vi siano fluttuazioni notevoli nei prezzi. Si può dire che la teoria tradizionale del portafoglio non indica all'investitore le tempeste e le burrasche dei prezzi di listino, bensì le pone per ipotesi come del tutto improbabili; l'investitore reale, ciononostante, si ritrova ad incontrare burrasche ben più frequentemente del previsto. È così possibile che il guadagno previsto dall'investitore non venga realmente ottenuto (e la teoria pertanto non regge il confronto con la realtà sperimentale).

## 12.2 Multifrattali e listino di Borsa

L'approccio multifrattale, partendo dalla critica radicale della teoria di portafoglio, ha come obiettivo una migliore descrizione della realtà dei mercati finanziari e cerca di dare *stime* più accurate dei rischi e dei guadagni, tenendo conto in modo più stringente delle possibili fluttuazioni. Naturalmente non vengono eliminate le fluttuazioni "calme", descrivibili con distribuzioni gaussiane, ma ad esse si aggiungono anche quelle più selvagge e violente, con una opportuna probabilità. Tutto ciò va inquadrato in un approccio fortemente sperimentale, nel senso che i vari parametri teorici vanno calibrati sui dati sperimentali storici, onde

ricavare qualche indicazione *probabilistica* sul futuro.

Il presupposto fondamentale della teoria proposta da Mandelbrot è l'utilizzo di distribuzioni frattali, con fluttuazioni maggiori di quelle gaussiane, più imprevedibili di quelle ordinarie. Queste distribuzioni, essendo frattali, possiedono naturalmente delle proprietà di *invarianza di scala* (si veda il Cap. 2), inesistenti nelle distribuzioni statistiche ordinarie (e per questo poco studiate dagli statistici). L'esistenza di invarianza di scala implica l'esistenza di grandezze conservate, un fatto estremamente rilevante soprattutto per il fisico abituato al ruolo che le leggi di conservazione giocano nelle teorie fisiche. Nel caso della economia l'invarianza di scala si vede chiaramente osservando l'andamento dei prezzi in funzione del tempo: esso è sostanzialmente invariato anche cambiando l'unità dei tempi. Se si confrontano gli andamenti dei prezzi in funzione del tempo, espresso rispettivamente in ore, giorni, mesi o anni si osservano piccole variazioni del comportamento cosicché non si riesce a distinguere tra un grafico su scala giornaliera o su scala annuale. Vi sono chiaramente ed ovviamente, come sempre, dei limiti: come non si può pensare di misurare il perimetro della Norvegia con l'approssimazione del centimetro così non ha alcun senso considerare ad esempio fluttuazioni nell'arco dei secondi (vedi Cap. 2).

Quanto osservato fin qui è un fenomeno di *autoaffinità*, vedi Cap. 2 in quanto la funzione che esprime la dipendenza dei prezzi in funzione del tempo rimane invariata se si cambiano contemporaneamente la scala dei tempi e la scala dei prezzi di due fattori *differenti*. Il fattore di scala dei prezzi risulta sempre piccolo qualunque sia il fattore di scala dei tempi. Convieni ricordare che l'autoaffinità differisce dall'autosimilarità proprio perché i fattori di scala sono diversi, ma, come abbiamo visto nel Cap. 2, essa è una generalizzazione del concetto di autosimilarità. La comune esperienza può quindi essere tradotta matematicamente mediante l'utilizzo di una funzione autoaffine che modellizzi le fluttuazioni osservate. Tuttavia questo non è sufficiente, poiché si deve costruire un modello che sappia riprodurre sia i periodi



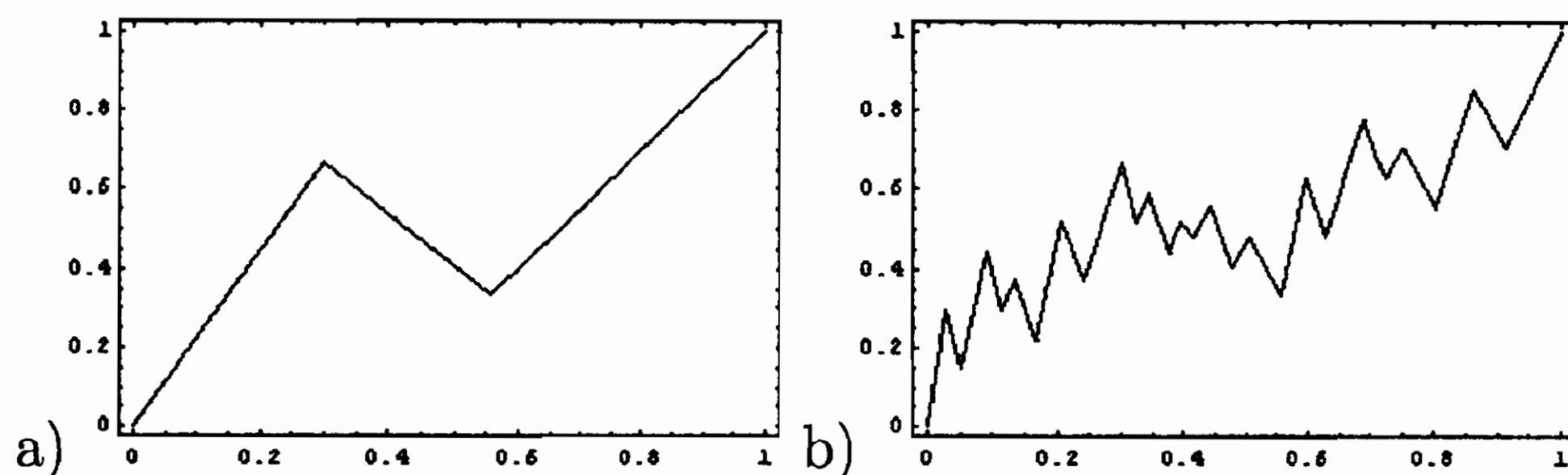


Figura 12.2: a- Generatore con ascissa pari a .3; b- terzo passo con tale generatore.

il generatore può venire scelto con il primo segmento più o meno ripido. Per fare ciò basta variare l'ascissa del punto di intersezione tra il primo segmento del generatore e il secondo. Nelle figure seguenti mostriamo i generatori modificati e il risultato della terza iterazione.

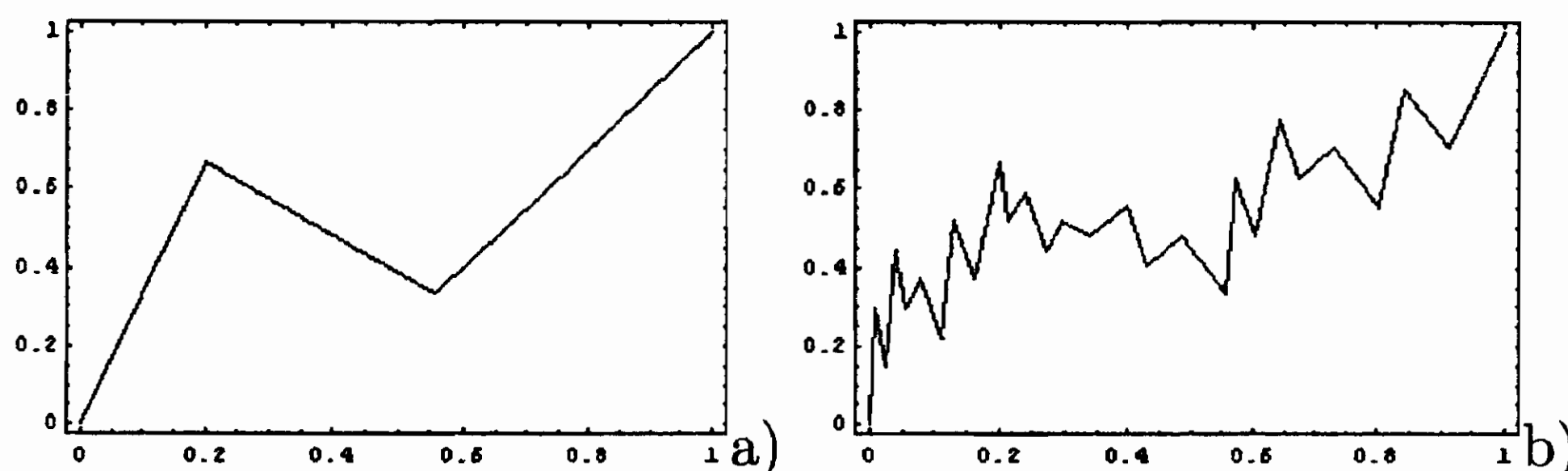


Figura 12.3: a- Generatore con ascissa pari a .2; b- terzo passo con tale generatore.

Si osserva chiaramente, che, allo spostarsi dell'ascissa del secondo estremo del primo segmento del generatore verso valori più piccoli, ovvero all'aumentare della ripidità del primo segmento del generatore, corrisponde la comparsa di sempre maggiori fluttuazioni. Con questo semplice esercizio pedagogico si può simulare un mercato diventa *volatile*. Il caso di fig. 12.5 è un caso limite, in cui si vedono dei picchi notevoli in tempi piccolissimi, seguiti a lunghi periodi di stasi (prezzi costanti). È chiaro che tale caso non è la "normalità", ma un buon modello deve prevedere

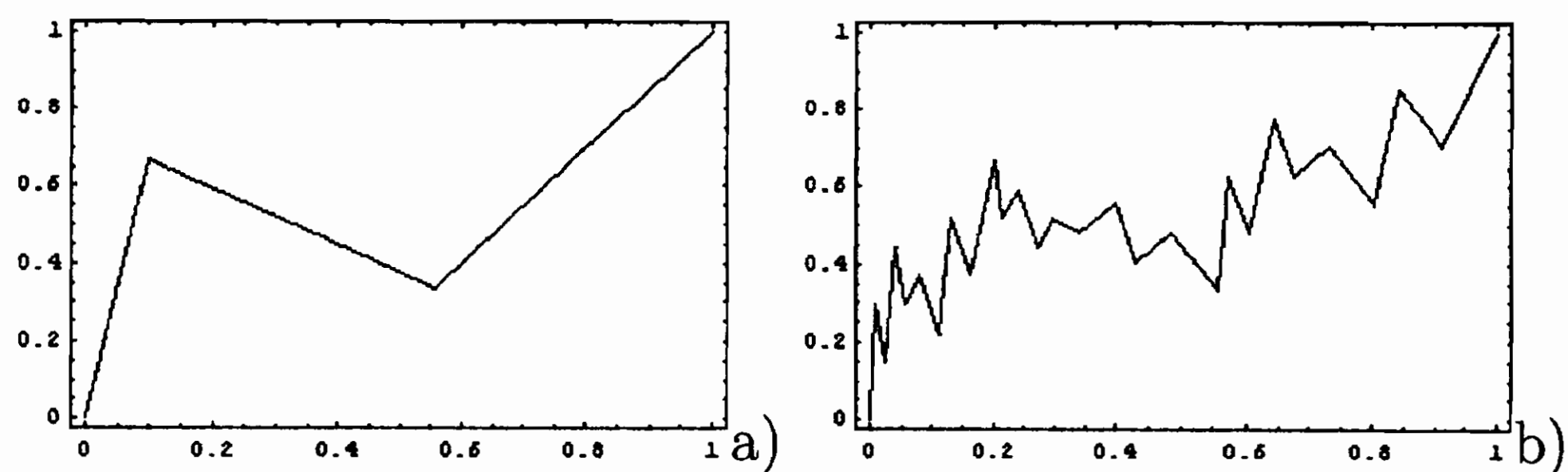


Figura 12.4: a) Generatore con ascissa pari a .1; b) terzo passo con tale generatore.

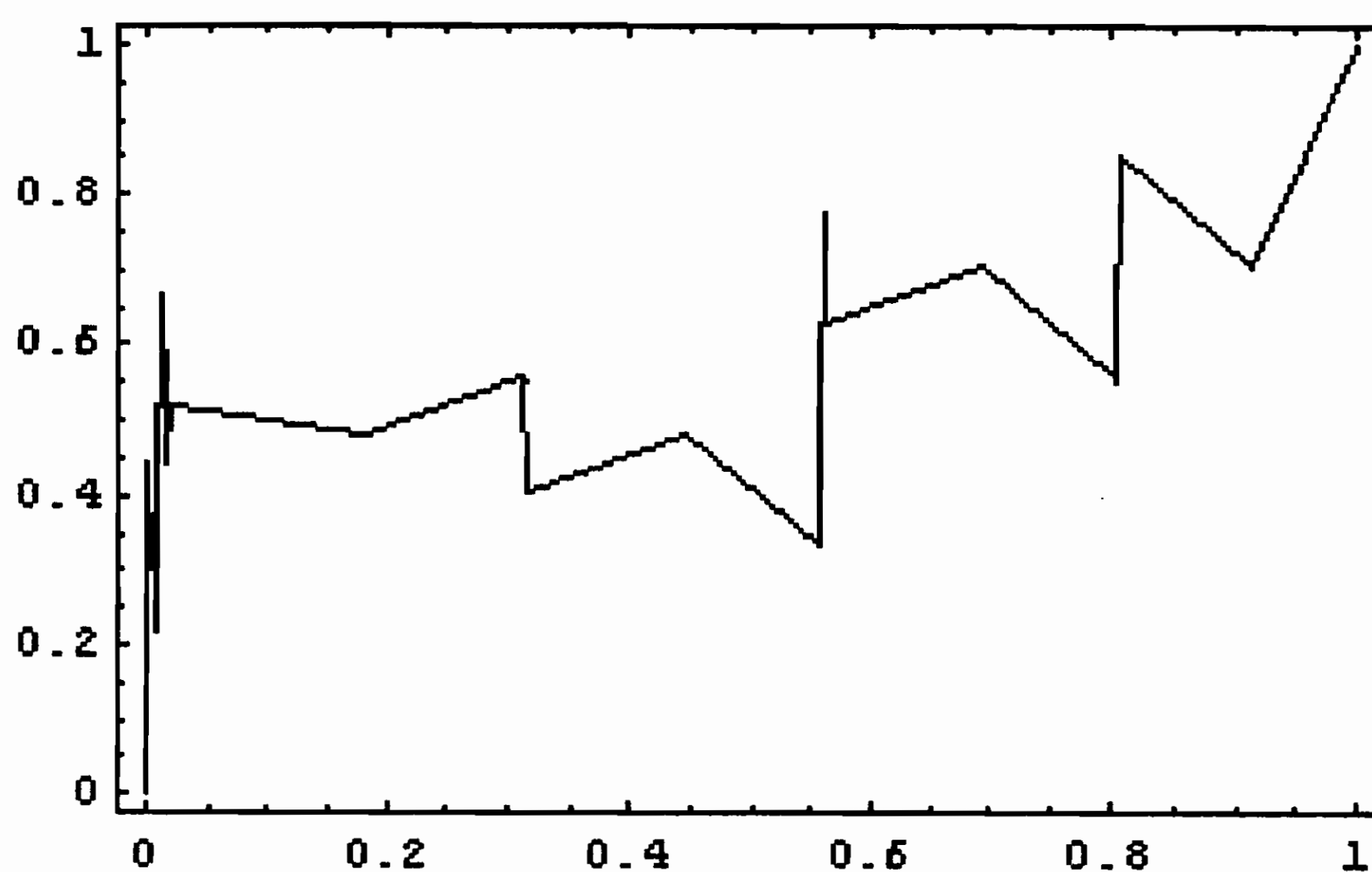


Figura 12.5: Terzo passo con ascissa del generatore pari a .01.

che ciò possa accadere, con una opportuna (limitata) probabilità.

In questo modo, al variare del generatore nello spazio dei parametri, si ricostruiscono un'infinità di situazioni, tra le quali risaltano quelle volatili e selvagge quando l'ascissa assume valori prossimi a zero e quelle tranquille quando l'ascissa assume valori prossimi a  $4/9$ . Questi generatori modificati, a partire dal generatore iniziale, sono dei generatori *multifrattali*, in quanto sono delle realizzazioni dello stesso generatore iniziale ottenute modificandone i parametri, muovendosi cioè nello

spazio multidimensionale dei parametri (cfr. fig. 7.1 del Cap. 7). Naturalmente il modello può essere raffinato mescolando in modo casuale (o meglio pseudocasuale), ad ogni passo, i generatori. Si possono fare così delle permutazioni dei generatori, scegliere una permutazione a caso utilizzando i generatori di numeri casuali dei calcolatori ed ottenere un frattale ancora più realistico e “dinamico” (vedi le funzioni di Weierstrass dipendenti da numeri random, Cap. 3).

Vale la pena di ricordare che questi multifrattali sono sempre interpretabili come distribuzioni statistiche (delle fluttuazioni dei prezzi) e non sono un semplici giochi geometrici basati su una curva “strana”. Naturalmente lo sviluppo e l’affinamento dei generatori e degli algoritmi è cruciale al fine di ricostruire correttamente le fluttuazioni dei prezzi, ma è chiaro che una volta che si ha in mano un algoritmo sufficientemente certificato, magari calibrato sulla storia passata, si possono studiare le sue proprietà statistiche, ad esempio i suoi momenti statistici (si veda il Cap. 7), calcolare la probabilità che un dato prezzo abbia una data oscillazione, come stima del valore reale, od anche vedere se esistono fenomeni di persistenza o antipersistenza (vedi il moto browniano), che creano una correlazione fra passato e futuro del tutto ignota al modello del portafoglio, basato sulle ipotesi del modello enunciate in §12.1.

### **12.3 Il mercato finanziario: un sistema complesso**

Nel paragrafo precedente, a puro scopo pedagogico, abbiamo descritto brevemente un modello multifrattale, senza soffermarci particolarmente sulla natura dei mercati finanziari. L’utilizzo di modelli frattali si può meglio comprendere nell’ambito della teoria dei sistemi complessi. Per *sistema complesso* (cfr. Cap. 9) si intende un sistema *aperto* ovvero interagente con altri sistemi (anch’essi complessi), un sistema *composto da moltissimi elementi* interagenti, con tanti parametri di interazione, un sistema non descrivibile in modo deterministico, anche se le leggi



### 12.3. IL MERCATO FINANZIARIO: UN SISTEMA COMPLESSO377

che lo regolano sono deterministiche (per una trattazione completa dell'argomento rimandiamo ai testi citati in bibliografia, in particolare [111]-[113]).

Il mercato finanziario è effettivamente un sistema complesso:

- è un sistema aperto, in quanto interagisce con altri settori economici (ad esempio la produzione). Alla reciproca influenza tra il mercato finanziario e gli altri settori economici e sociali, si aggiungono le interazioni sempre crescenti tra i mercati delle varie nazioni; inoltre il mercato dei titoli azionari non è del tutto scorrelato da quello dei titoli obbligazionari ... e quant'altro;
- è composto da moltissimi elementi, con intricati legami. Ad esempio l'enorme numero di titoli che compongono il listino, le influenze reciproche di questi titoli (un titolo industriale risente subito di un periodo di crescita economica, un titolo bancario ne risente solo in un secondo tempo, per cui l'andamento dei titoli bancari presenta peculiarità diverse dall'andamento dei titoli industriali).

Già da questo breve elenco risulta del tutto plausibile ritenere il mercato finanziario un sistema complesso [114]-[117]. Come già accennato nel Cap. 9, moltissimi sistemi complessi posseggono proprietà di invarianza di scala, come è il caso del mercato finanziario di paragrafo 12.2. Se si aggiunge la presenza di dipendenza sensibile dalle condizioni iniziali<sup>1</sup> diventa del tutto improponibile un modello deterministico. Ma anche un modello caotico è del resto difficilmente applicabile, in quanto un modello caotico è un modello in cui si conoscono molto bene le leggi che lo regolano (ad esempio la meccanica classica), ma queste leggi danno luogo a soluzioni non deterministiche. Poiché nel caso dell'Economia siamo ben lontani dall'avere questa conoscenza, siamo costretti a ricorrere ai *processi stocastici*.

---

<sup>1</sup>caso che si verifica ampiamente nel Cap. 9 dove variando anche di poco le condizioni iniziali la soluzione finale varia di molto.

## 12.4 Modelli stocastici

### 12.4.1 Processi di Wiener e fenomeni di diffusione

Per processo stocastico si intende una funzione di una o più variabili aleatorie (estratte cioè da una data distribuzione di probabilità) e del tempo. In formule

$$f(t) = f(\epsilon, t) .$$

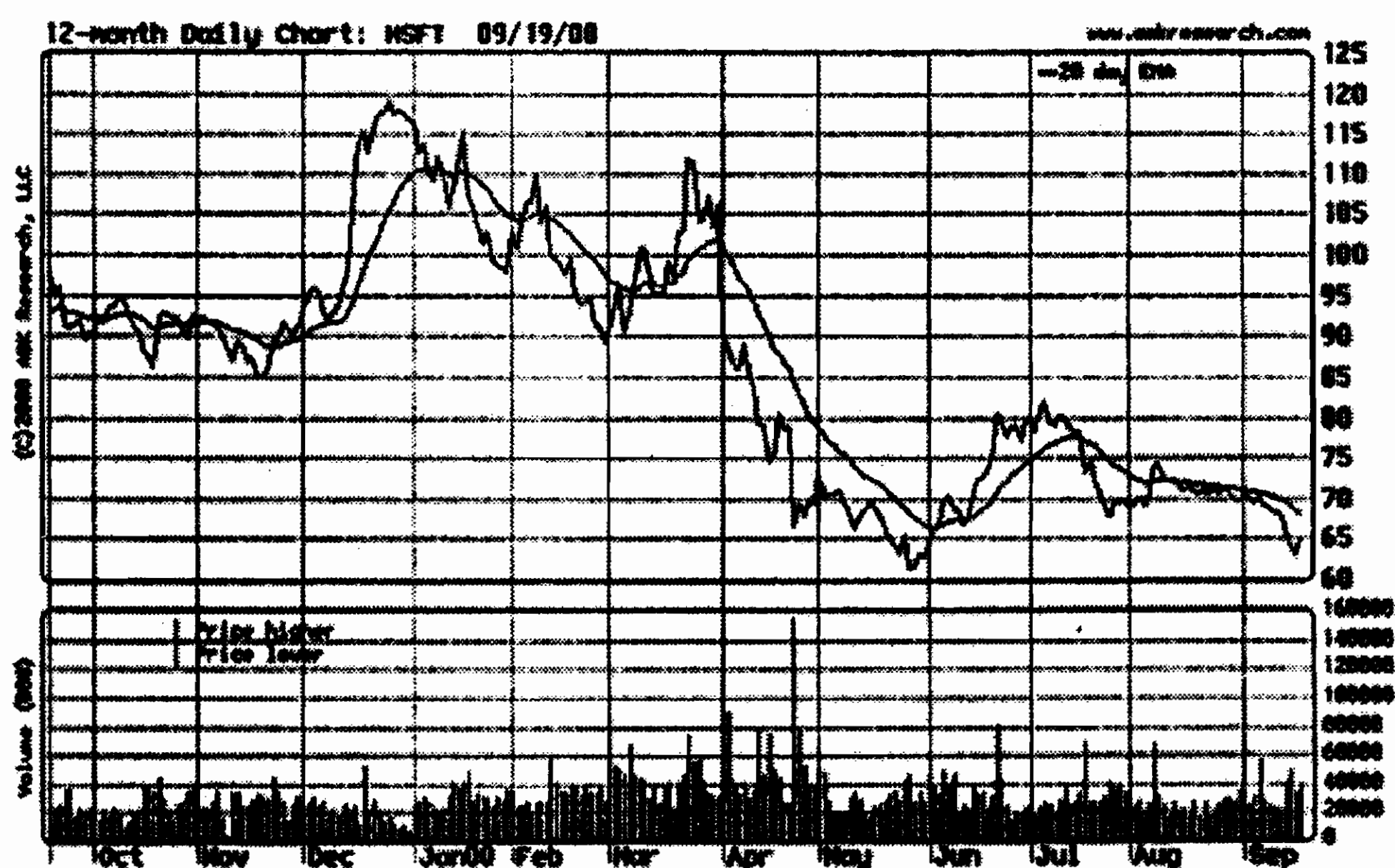


Figura 12.6: Andamento dei prezzi delle azioni Microsoft.

Un processo stocastico che modelli i prezzi dei titoli deve tenere conto sia del “trend”, l’andamento globale, sia delle fluttuazioni, il rumore. Infatti si osservi la figura 12.6 rappresentante l’andamento dei prezzi Microsoft durante un anno. Si vedono bene il trend, il rumore ed anche le variazioni di trend. Non è quindi possibile utilizzare un semplice moto browniano (o “random walk”), ma si può ricorrere ad una sua generalizzazione: il processo di Wiener<sup>2</sup> generalizzato.

<sup>2</sup>Wiener lo abbiamo già incontrato nel Cap. 4.

Un processo di Wiener semplice è il mero passaggio al continuo di un moto browniano. Nel moto browniano unidimensionale (cfr. Cap. 4) di una particella che ha percorso  $n$  passi, ciascuno di tempo  $\tau$  e lunghezza  $l$ , la varianza è pari a

$$\sigma^2 = nl^2 .$$

Tenendo conto che il tempo trascorso è  $t = n\tau$ , si può scrivere

$$\sigma^2 = \frac{tl^2}{\tau} . \quad (12.1)$$

Come visto in Cap. 4, si può assumere che la distribuzione di probabilità a cui appartiene la variabile spostamento di una particella soggetta a moto browniano sia una gaussiana, di varianza data dalla (12.1). Infatti la (12.1) è equivalente alla (4.19), pur di porre  $\frac{l^2}{\tau} = 2\Theta$ . Tale varianza varia *nel tempo*, come succede tipicamente nei processi stocastici, in particolare per la (12.1) la dipendenza dello spostamento quadratico medio, radice quadrata della varianza, in funzione del tempo è semplicemente:

$$\langle \Delta z \rangle \equiv \sqrt{\sigma^2} = l\sqrt{\frac{t}{\tau}} , \quad (12.2)$$

avendo chiamato  $\langle \Delta z \rangle$  lo spostamento quadratico medio unidimensionale (o nella direzione considerata). Ricordiamo che  $t$  è il tempo totale trascorso, quindi in generale è un  $\Delta t$  (pari a  $t - t_0$ ).

Se invece di considerare i valori medi consideriamo *ogni* singolo spostamento  $\Delta z$  in un intervallo di tempo  $\Delta t$ , al posto della (12.2) dovremo scrivere:

$$\Delta z = \epsilon\sqrt{\Delta t} \quad \epsilon \text{ variabile gaussiana standard} \quad (12.3)$$

Nella (12.3) sono sottintesi per semplicità dei fattori di scala di tempo e di spazio, tali da rendere l'equazione dimensionalmente corretta (questi fattori corrispondono a  $\tau$  e a  $l$  nelle (12.1) e (12.2)).

Dalla (12.3) tenendo conto che  $\epsilon$  è una variabile normale standard (di media nulla e varianza unitaria) si ottiene:

$$\mu(\Delta z) = 0 \qquad \sigma^2(\Delta z) = \Delta t \qquad (12.4)$$

La varianza è giustamente espressa come nella (12.1), a meno dei fattori di scala.

Il limite nel continuo della (12.3), ovvero per  $\Delta t \rightarrow 0$  è il processo di Wiener:

$$dz = \epsilon \sqrt{dt} \qquad \text{PROCESSO DI WIENER} \qquad (12.5)$$

A mano a mano che ci si avvicina al processo limite di Wiener, ad esempio mediante simulazioni al calcolatore come quelle viste in precedenza, si ottiene una struttura più fine, con tantissime fluttuazioni. Riportiamo in figura 12.7 alcune di queste, per maggiore chiarezza.

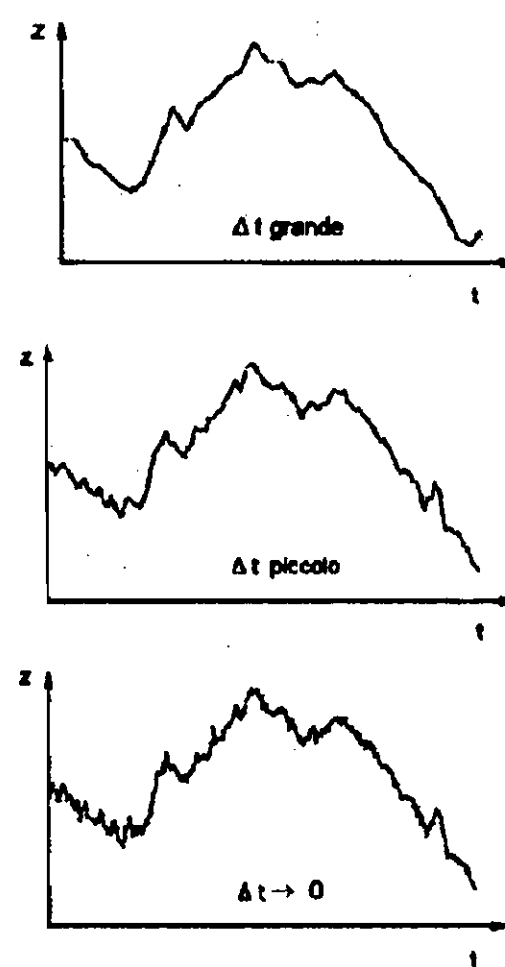


Figura 12.7: Approssimazioni successive al processo di Wiener.

Vale la pena sottolineare che vi è un legame profondo tra i processi di random walk ed i fenomeni di *diffusione*. In particolare a scopo propedeutico si può mostrare come il passaggio da un random walk discreto in una sola dimensione (ad esempio il moto browniano) ad un processo di Wiener dà luogo ad un'equazione di diffusione. Chiamiamo  $v_{k,n}$  la probabilità che, all' $n$ -esimo passo, una particella che si muove di moto browniano si sia spostata di  $k$  unità (ad esempio di  $k$  mm).





che è, in una dimensione, la non meno celebre equazione di diffusione del calore o di Fourier. Anche l'equazione del calore ha trovato, *mutatis mutandis*, una applicazione economica, su cui non ci soffermiamo <sup>5</sup>.

Vale la pena di sottolineare tuttavia che, anche per la trattazione delle opzioni, vale un discorso analogo a quello fatto per la teoria del portafoglio. I modelli di valutazione delle opzioni più comunemente utilizzati in finanza dagli operatori di borsa assumono tutti che il prezzo del titolo sottostante segua un moto geometrico browniano (cioè soddisfi l'equazione differenziale stocastica (12.11), né modelli ritenuti più realistici, basati su distribuzioni di tipo Levy troncate o su modelli a volatilità stocastica non hanno finora avuto maggiore fortuna. È utile precisare che il comportamento dei prezzi empiricamente osservabile su un dato mercato è necessariamente influenzato dalle caratteristiche di funzionamento e dalle regole di negoziazione che sono diversi per le diverse sedi di contrattazione. È stato recentemente mostrato [120, 121], per esempio che il comportamento di fig. 12.6 è caratteristico di mercati dotati di figure professionali a sostegno della liquidità dei titoli e può essere riprodotto tenendo conto delle diverse condizioni operative utilizzando una opportuna combinazione di processi stocastici.

#### 12.4.2 Processi di Wiener generalizzati e processi di Ito

Ritornando al processo di Wiener precedentemente introdotto, dobbiamo procedere ad una generalizzazione ulteriore in quanto, come abbiamo detto precedentemente (si veda fig. 12.6) nella reale fluttuazione dei prezzi non v'è soltanto il rumore browniano, ben descritto dal processo di Wiener, ma ad esso è sovrapposto un andamento complessivo: andamento che in economia è noto come trend, ma che ad un fisico ricorda probabilmente il fenomeno della  *deriva*  (basta pensare ad un moto

---

<sup>5</sup>Per chi volesse approfondire il legame tra processi stocastici e fenomeni di diffusione può fare riferimento alle bibliografie [118] e [119] e, per le applicazioni economiche, alla bibliografia [116].

browniano di particelle cariche in un debole campo elettrico: al moto browniano puro si aggiunge una velocità di deriva causata dal campo elettrico). Fortunatamente, non è difficile tenere conto matematicamente di questo contributo aggiuntivo, ottenendo così il processo di Wiener generalizzato:

$$dx = adt + bdz \quad \text{WIENER GENERALIZZATO (12.13)}$$

con  $a$  e  $b$  costanti e

$$dz = \epsilon\sqrt{dt} .$$

Qui,  $z$ , visto come funzione del tempo, è un normale processo di Wiener. Ponendo  $a = 0$  si ricade nel caso precedente, mentre ponendo  $b = 0$  si ottiene, integrando, un moto rettilineo uniforme

$$x(t) = x_0 + a(t - t_0) .$$

Questo significa che nel processo di Wiener generalizzato il rumore browniano è una oscillazione non più attorno allo zero ma attorno all'andamento lineare del moto rettilineo uniforme. La fig. 12.8 evidenzia chiaramente la differenza tra il processo di Wiener e il processo di Wiener generalizzato.

Questo modello è ancora troppo semplice per riuscire a descrivere la situazione reale dei mercati. Il suo punto debole sta nell'assumere la costanza delle due grandezze  $a$  e  $b$  nel tempo e nella variabile aleatoria. Ma ora la generalizzazione è diretta:

$$dx = a(x, t)dt + b(x, t)\epsilon\sqrt{dt} \quad \text{PROCESSO DI ITO (12.14)}$$

Questo processo è detto *processo di Ito*, al posto delle costanti  $a$  e  $b$  vengono introdotte le funzioni qualsiasi  $a(x, t)$  e  $b(x, t)$ .

La ragione per cui si è obbligati ad introdurre i processi di Ito è legata alla natura specifica del problema economico dei prezzi delle azioni. Infatti in primo luogo è empiricamente falso ritenere che esista un tasso di crescita  $a$  costante nel tempo, in quanto i trends cambiano



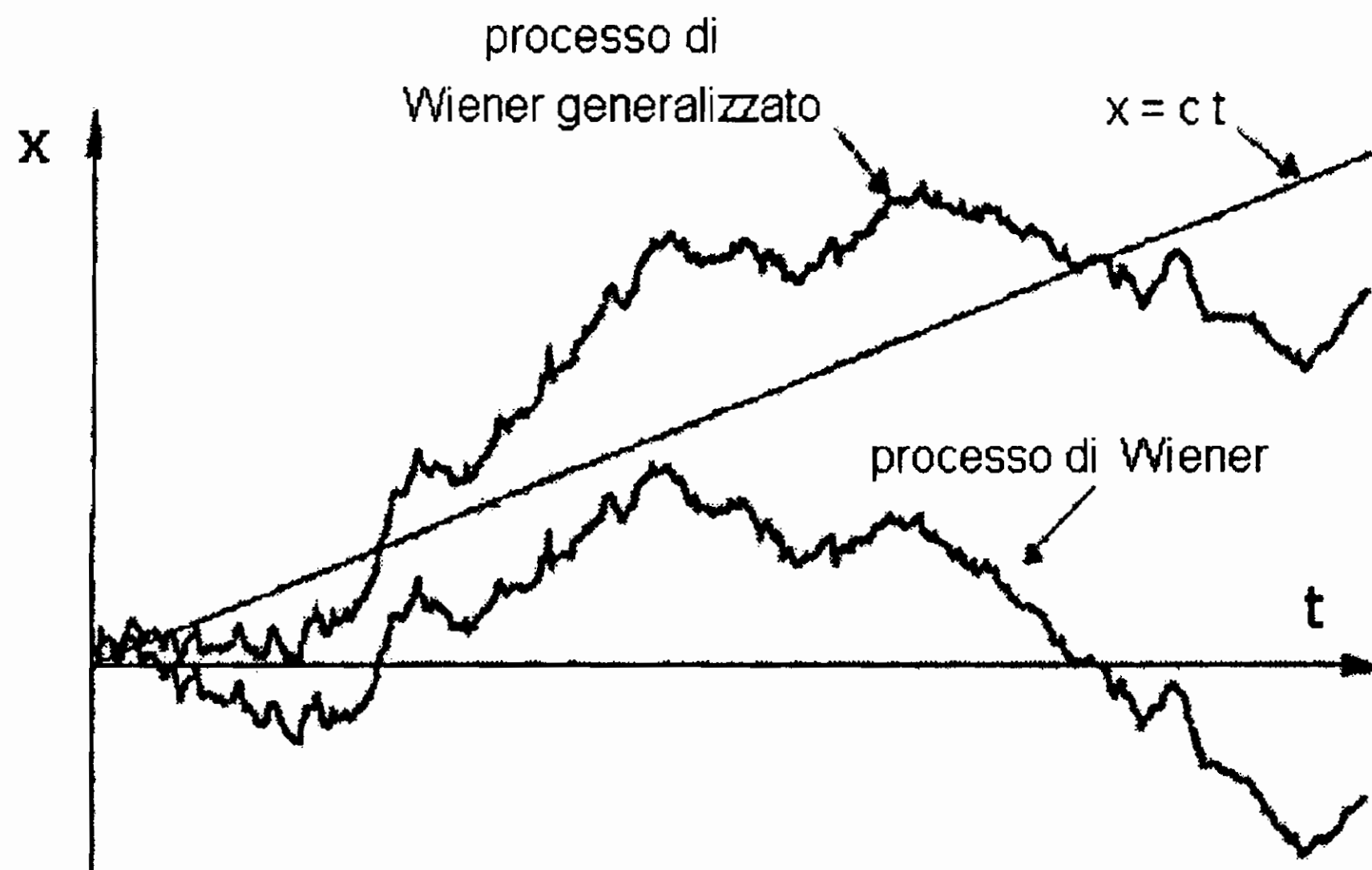


Figura 12.8: Differenze tra processo di Wiener e processo di Wiener generalizzato.

necessariamente nel tempo (si veda ancora fig. 12.6). In secondo luogo le variazioni di prezzo sono indipendenti dal valore assoluto del prezzo, in quanto ciò che conta non è tanto il prezzo in assoluto bensì il suo *rendimento* che è la variazione percentuale del prezzo,  $dS/S$ . Il rendimento è il vero parametro di riferimento, il guadagno o la perdita dell'investitore. Pertanto l'equazione stocastica da studiare è:

$$dS/S = \mu dt + \sigma dz , \quad (12.15)$$

con  $z$  che soddisfa la (12.5).

Se  $\mu$  e  $\sigma$  sono costanti, come approssimativamente succede, allora formalmente il secondo membro della (12.15) è un processo di Wiener generalizzato (vedi la (12.13)). In realtà la (12.15) rappresenta *sempre*

un processo di Ito. Infatti se scriviamo la (12.15) come

$$dS = S\mu dt + S\sigma dz, \quad (12.16)$$

per quanto possano essere costanti  $\mu$  e  $\sigma$ , compare comunque il prezzo  $S$  che è una funzione del tempo. È dunque la natura stessa del problema, l'importanza maggiore del rendimento, il fattore di incremento relativo, rispetto al prezzo stesso, che implica l'utilizzo di processi di Ito e non di Wiener generalizzati (matematicamente tutto questo procedimento costituisce una serie di generalizzazioni, ma nel confronto con la realtà scegliere la corretta formulazione non è affatto banale).

Vediamo ora di studiare con più attenzione la (12.16). Se poniamo  $\sigma = 0$  otteniamo

$$dS/S = \mu dt$$

che ha per soluzione :

$$S(t) = S_0 \exp[\mu(t - t_0)]. \quad (12.17)$$

La (12.17) ha un ben preciso significato finanziario: rappresenta infatti la capitalizzazione continua (o istantanea), dato un tasso  $\mu$  di rendimento continuo nell'unità di tempo. In altri termini se un investitore investe un capitale  $S_0$  al tempo  $t_0$  con un tasso di rendimento nell'unità di tempo costante pari a  $\mu$ , in regime di capitalizzazione *continua*, si ritrova dopo un tempo  $\Delta t = t - t_0$  un capitale pari a  $S_0 \exp[\mu(t - t_0)]$ . Per ogni  $\Delta t$  pari a  $1/\mu$ ; il capitale aumenta di un fattore  $e$  (costante di Nepero  $e \approx 2.718$ ). Il fatto di aver ritrovato la comune legge di capitalizzazione non ci meraviglia, ma ci conferma sulla correttezza del modello. In questo ragionamento abbiamo volutamente ignorato la parte casuale del processo, avendo posto  $\sigma = 0$ . Ma la fluttuazione quadratica media  $\sigma$ , che va a moltiplicare la variabile aleatoria  $z$ , è la deviazione standard del processo di Wiener ed è chiamata *volatilità* in Economia (vedi §12.2).

In questo modo si ritrovano, applicati ad un modello stocastico, i concetti visti nell'Introduzione e in §12.2. In questo caso i parametri del

modello,  $\mu$  e  $\sigma$ , sono rispettivamente il rendimento per unità di tempo dell'azione e la volatilità del prezzo dell'azione e si ripercuotono sui prezzi mediante la (12.16). Va precisato che  $\mu$  non è il rendimento effettivo (vero), che in effetti non esiste, nel senso che non è determinabile a priori, piuttosto deve essere interpretato come un rendimento stimato, presunto o auspicabile.

Questo significa che l'investitore deve sempre tener conto di entrambi i parametri  $\mu$  e  $\sigma$ , ad esempio cercare un  $\mu$  sufficientemente alto in relazione a  $\sigma$ , la volatilità ovvero il rischio. Naturalmente un basso rischio permette di guadagnare anche con rendimenti bassi, ma si ottengono altrettanto bassi guadagni <sup>6</sup>.

### 12.4.3 Il lemma di Ito e sue conseguenze

A questo punto mostriamo un lemma che ha interessanti conseguenze. Partendo dalla definizione di processo di Ito, eq. (12.14), si dimostra il seguente *lemma* di Ito.

Data una funzione regolare qualunque di  $x$ , a sua volta funzione di  $t$ , e  $t$ ,  $G(x, t)$ , con  $x(t)$  processo di Ito, che soddisfa cioè alla (12.14), per essa vale la relazione:

$$dG = \left( \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b \epsilon \sqrt{dt} , \quad (12.18)$$

ovvero anche la  $G(x, t)$  soddisfa un processo di Ito, ma con tasso di deriva  $A(x, t)$

$$A(x, t) = \frac{\partial G}{\partial x} a + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 \quad (12.19)$$

e varianza  $B(x, t)$

$$B(x, t) = \frac{\partial G}{\partial x} b . \quad (12.20)$$

---

<sup>6</sup>come è noto, nel regno delle speculazioni esistono innumerevoli modi per guadagnare (perdere). Ad esempio è addirittura possibile guadagnare con un  $\mu$  bassissimo, mediante una vendita "allo scoperto". Si vendono cioè azioni che non si hanno (!) e solo in un secondo tempo le si acquistano (prima si vendono e poi si acquistano), in tal caso se il titolo è in picchiata è chiaro che tale operazione comporta un guadagno (il titolo viene venduto prima, quando valeva di più).

Si può osservare che il lemma di Ito è una semplice conseguenza del teorema del differenziale totale, che dà i termini del prim'ordine nella (12.18), con in più un termine del second'ordine in  $x$ .

Applichiamo ora il lemma di Ito alla funzione  $G(S) = \log(S)$ , logaritmo naturale dei prezzi, con  $S$  che soddisfa la (12.16) ( $S$  è un processo di Ito). Ricavando le funzioni  $A(x, t)$  e  $B(x, t)$ , mediante le eq. (12.19) e (12.20), si ottiene facilmente:

$$d \log(S) = (\mu - \sigma^2/2)dt + \sigma \epsilon \sqrt{dt}. \quad (12.21)$$

Ma la (12.21) è un processo di Wiener generalizzato e non un processo di Ito (è scomparsa la dipendenza da  $S$ , quindi nell'approssimazione di  $\mu$  e  $\sigma$  costanti, i coefficienti sono costanti).

Ricordando che un processo di Wiener generalizzato deriva da una distribuzione *gaussiana* (deriva infatti dal processo di Wiener che è il caso continuo del random walk, moto browniano *gaussiano*) si può affermare che *il logaritmo naturale dei prezzi dei titoli è una variabile statistica gaussiana*. Se il logaritmo di una distribuzione è gaussiana allora, per definizione, la distribuzione di partenza è *lognormale* (si veda Capitolo A e figura 12.9).

Riportiamo per chiarezza la definizione della distribuzione lognormale ed i suoi primi 4 momenti statistici:

$$\text{Lognorm}(\mu, \sigma) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{(\log(x) - \mu)^2}{2\sigma^2}\right] \quad (12.22)$$

$$\text{media} = \exp(\mu + \sigma^2/2) \quad (12.23)$$

$$\text{varianza} = \exp(2\mu + \sigma^2)(\exp(\sigma^2) - 1) \quad (12.24)$$

$$\text{skewness} = \sqrt{\exp(\sigma^2) - 1}(2 + \exp(\sigma^2)) \quad (12.25)$$

$$\text{curtosi} = 3 \exp(2\sigma^2) + 2 \exp(3\sigma^2) + \exp(4\sigma^2) \quad (12.26)$$

Dalla (12.21) segue che la media della lognormale dei prezzi, ad un tempo  $t$ , partendo da un tempo  $t_0$ , è

$$\mu_{\log n}(t) = (\mu - \sigma^2/2)(t - t_0) \quad (12.27)$$

e la varianza

$$\sigma_{\log n}^2(t) = \sigma^2(t - t_0) . \quad (12.28)$$

Vale la pena di notare il caratteristico allargamento nel tempo della varianza, già presente nel moto browniano gaussiano (in ogni processo stocastico media e varianza non sono più costanti, ma diventano *funzioni* del tempo).

A questo punto è possibile calcolare sia il valore medio del prezzo al tempo  $t$  sia la varianza del prezzo a tale tempo, cosicché si ha una stima sia del prezzo futuro sia dell'*errore* statistico di tale prezzo (dato dalla varianza).

Se, infatti, sostituiamo la media e la varianza della lognormale dei prezzi, eq. (12.27) ed eq. (12.28), nella formula generale della media della lognormale, la (12.23), scrivendo al posto del  $\mu$  della (12.23) il  $\mu_{\log n}(t)$  dato dalla (12.27) e al posto del  $\sigma$  della (12.24) il  $\sigma_{\log n}(t)$  dato dalla (12.28), semplificando e tenendo conto dell'ovvio fattore moltiplicativo (di "normalizzazione" al tempo iniziale) si ricava:

$$\langle S(t) \rangle = S(t_0) \exp[\mu(t - t_0)].$$

Analogamente per la varianza, sostituendo la (12.27) e la (12.28) questa volta nella (12.24),  $\mu \rightarrow \mu_{\log n}(t)$  e  $\sigma \rightarrow \sigma_{\log n}(t)$ . Svolgendo i calcoli si ottiene:

$$\sigma^2 \equiv \langle (S(t) - \langle S(t) \rangle)^2 \rangle = S(t_0)^2 \exp[2\mu(t - t_0)] (\exp[\sigma^2(t - t_0)] - 1)$$

## 12.5 Comportamento empirico dei prezzi

Come nostra abitudine, studiati i modelli, è indispensabile vedere in che misura essi si confrontano con la realtà sperimentale. Le principali discrepanze fra le previsioni dei modelli stocastici e le analisi empiriche fatte[112] sono:

1. il prezzo dell'azione non segue un proceso di Ito, a causa delle notevoli fluttuazioni temporali del rendimento e della volatilità;

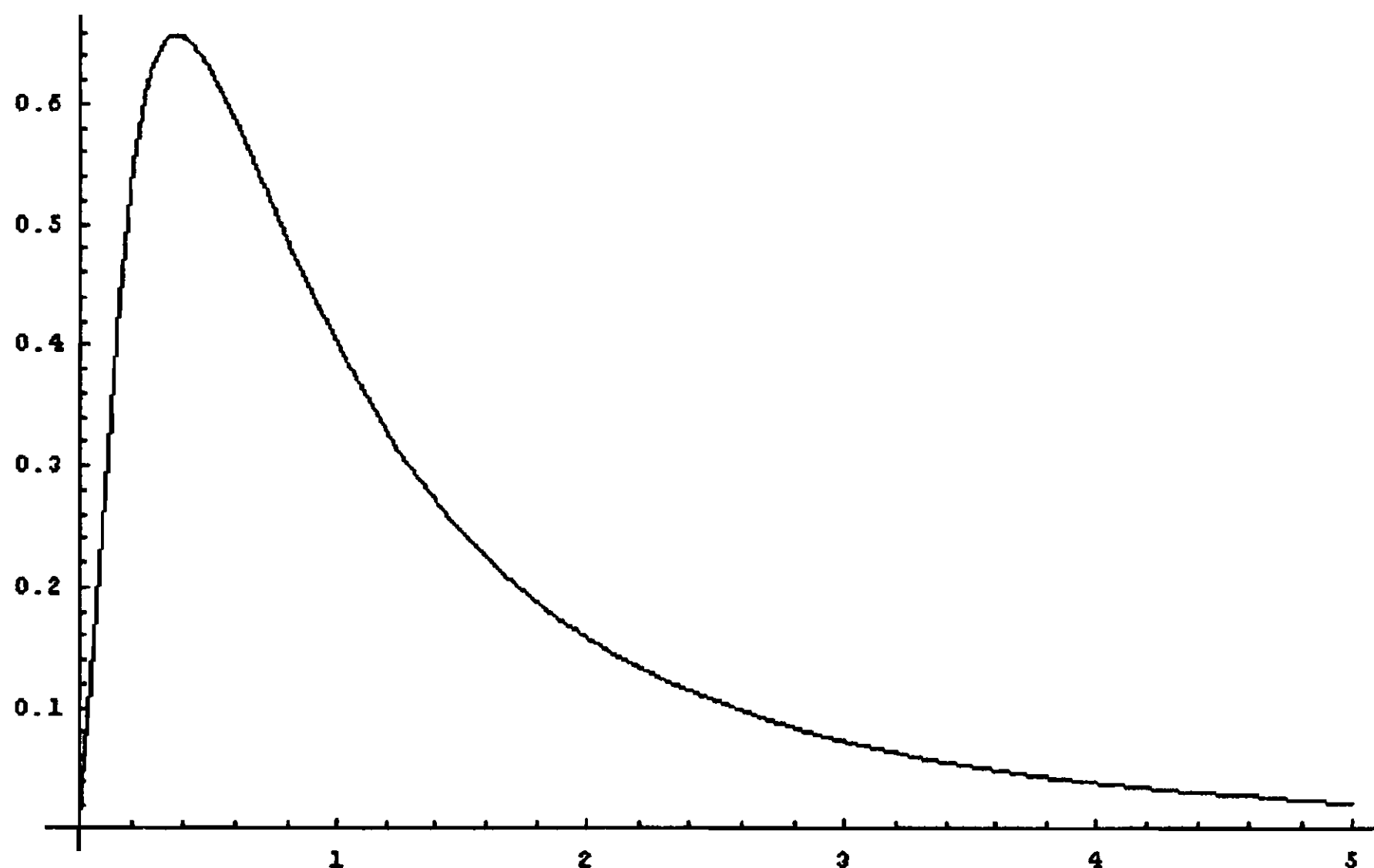


Figura 12.9: La distribuzione lognormale standard [ $\mu = 0$ ,  $\sigma^2 = 1$ , skewness  $\simeq 6.18$  (!)].

2. i prezzi non seguono sperimentalmente una distribuzione lognormale. Ricordando come abbiamo derivato la lognormalità dei prezzi- abbiamo supposto la costanza di rendimento e volatilità- la non lognormalità dei prezzi non è in contrasto con il punto 1;
3. il tasso ufficiale di sconto non è costante nel tempo (fatto che ha grande rilevanza pratica).

Queste limitazioni indicano che i modelli precedenti costituiscono delle semplificazioni, delle approssimazioni. Questo non deve far pensare che tali modelli siano da rigettare completamente, si pensi ad esempio al ruolo che ha nella meccanica classica il *punto materiale*, che nella realtà fisica non esiste.

D'altra parte è possibile dare una ragionevole spiegazione teorica degli andamenti sperimentali dei prezzi. Infatti il grosso limite dei processi di Ito e della lognormalità dei prezzi è la ancora forte dipendenza, in origine, dalle statistiche gaussiane. Essi sono infatti delle elaborazioni migliori, delle filiazioni dei processi di random walk *gaussiano* (moto browniano geometrico).

Come abbiamo detto nell'introduzione le distribuzioni dei prezzi presentano code molto maggiori di una gaussiana. Le caratteristiche empiriche dei prezzi presentano un andamento soltanto in parte compatibile con la lognormale.

Infatti studiando il *logaritmo* della variazione dei prezzi ad intervalli del minuto, si osserva che queste variazioni sono simmetriche, ma non sono gaussiane, a causa di una maggiore presenza di valori ad elevate deviazioni standard (cfr. la fig. 12.10). Se l'andamento dei prezzi fosse lognormale, si sarebbe dovuto ottenere un ottimo accordo tra il logaritmo delle fluttuazioni e la gaussiana standard. Tale accordo non v'è in realtà nemmeno per le piccole fluttuazioni, anche perché il picco centrato sullo zero è più alto del picco gaussiano (cfr. fig. 12.10).

Per superare questo ostacolo, si può ricordare però che il random walk (cfr. Cap. 4 e App. A) dà luogo ad una distribuzione gaussiana se vale il teorema del limite centrale nella forma classica di DeMoivre-Gauss. Se infatti sono soddisfatte le ipotesi di tale teorema, la somma di  $n$  variabili casuali indipendenti ed identicamente distribuite tende asintoticamente ad essere distribuita in modo gaussiano. Se però le  $n$  variabili indipendenti sono distribuite secondo Cauchy (la distribuzione di Cauchy è anche nota come distribuzione Lorentziana o di Breit-Wigner, vedi Cap. A), non avendo varianza finita, non tendono affatto alla gaussiana, bensì tendono ancora ad una distribuzione di Cauchy.

Grazie al teorema di Lévy (cfr. Cap. A), sotto ipotesi molto generali (rispetto all'ordinario teorema del limite centrale), è garantita la convergenza della somma di  $n$  variabili indipendenti ed identicamente distribuite ad una *opportuna* distribuzione limite, detta di Lévy o distribuzione stabile<sup>7</sup>. La forma funzionale analitica chiusa non è nota in generale ma solo in alcuni casi, si può tuttavia sempre scrivere la *funzione caratteristica* (trasformata di Fourier della distribuzione, cfr. App. A).

---

<sup>7</sup>per una trattazione rigorosa e completa sulle distribuzioni stabili citiamo [122]. Come testi di riferimento di statistica e calcolo delle probabilità [113], [119], [118].

Essa è la seguente:

$$\log \phi(q) = \begin{cases} i\mu q - \gamma|q|^\alpha [1 - i \frac{\beta q}{|q|} \tan(\pi/2\alpha)] & \text{se } \alpha \neq 1 \\ i\mu q - \gamma|q| [1 + i \frac{2\beta q}{\pi|q|} \tan(|q|)] & \text{se } \alpha = 1 \end{cases} \quad (12.29)$$

con

$$\begin{aligned} 0 &\leq \alpha \leq 2 \\ \gamma &> 0 \\ \mu &\in \mathbb{R} \\ -1 &\leq \beta \leq 1 \end{aligned}$$

In particolare  $\alpha$  è proprio il *parametro di Lévy* introdotto nel Cap.A (noto in statistica anche come “indice di stabilità”),  $\mu$  è chiamato “parametro di shift”,  $\gamma$  è un fattore di scala e  $\beta$  è un parametro di asimmetria della distribuzione.

Tenendo presente la (12.29), possiamo ora proporre una distribuzione capace di reggere il confronto sperimentale. Infatti se il processo di random walk è gaussiano, browniano geometrico, ne segue la teoria precedentemente vista. Se invece le distribuzioni di partenza (corrispondenti al primo step del random walk - nel caso browniano semplice la binomiale) non soddisfano alle ipotesi del teorema del limite centrale, ma soddisfano alle ipotesi del teorema di Lévy, ne segue che il processo deve avere un andamento compatibile con una delle (12.29). Se ora si prova a fare un fit con una distribuzione di Lévy, in pratica se si confronta la distribuzione sperimentale del logaritmo dei prezzi con la funzione caratteristica di Lévy dipendente dai parametri  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\mu$  e  $\delta$  che vengono fissati dal fit, si ottiene un impressionante accordo tra i valori previsti e quelli sperimentali, si veda la fig. 12.10.

Come si nota in fig. 12.10, nelle code la distribuzione di Lévy *sovrastima* le fluttuazioni, ma la gaussiana non approssima mai bene le variazioni dei prezzi, nemmeno per le piccole fluttuazioni (non lognormalità dei prezzi). Potremmo dire che mentre la gaussiana è



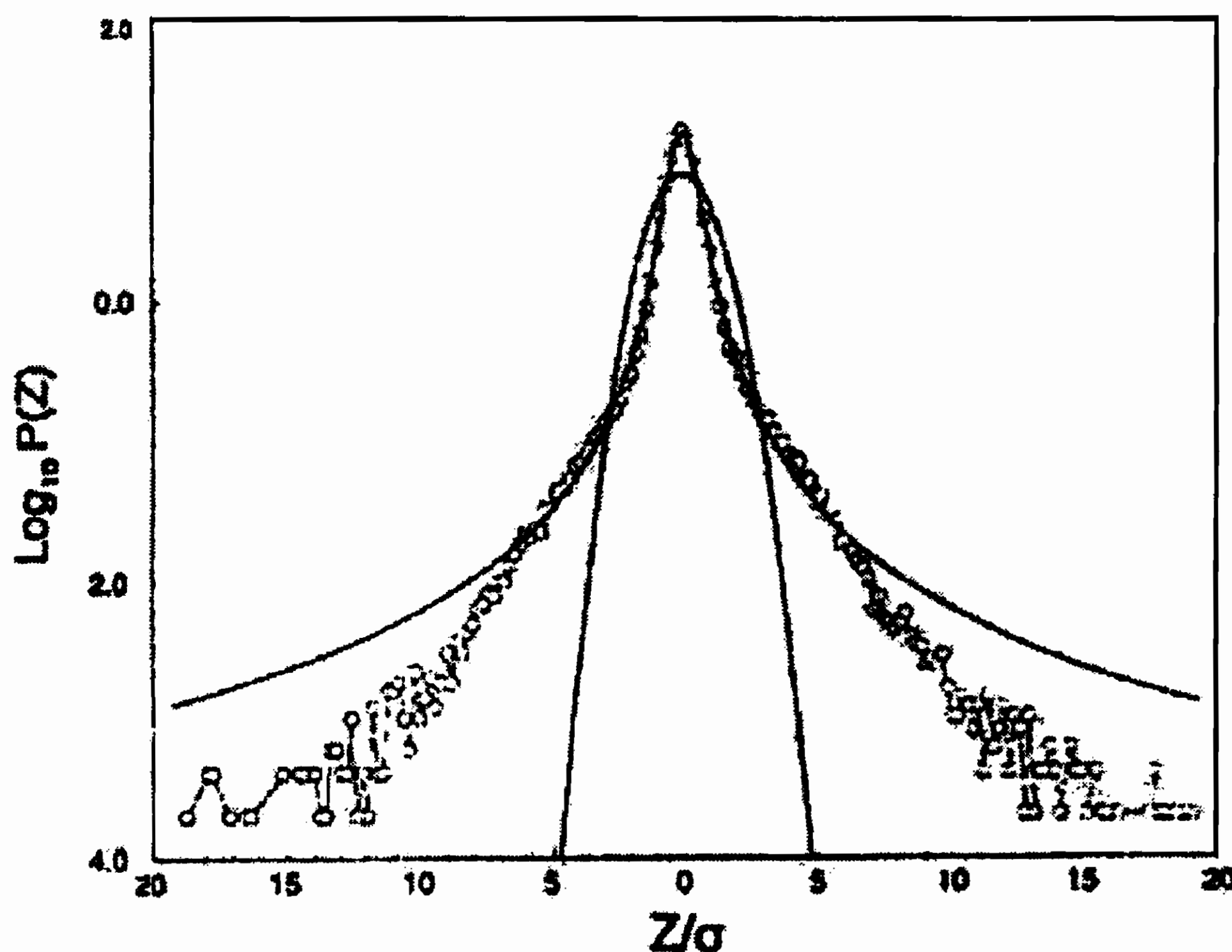


Figura 12.10: Confronto tra le variazioni dei prezzi di un titolo e due previsioni teoriche, gaussiana e di Lévy.

troppo poco frattale, portando quindi a risultati in pessimo accordo con i dati empirici, le distribuzioni di Lévy sono, per certi versi, un po' troppo frattali. Infatti esse hanno varianza *infinita*, il che è in palese disaccordo con i dati sperimentali: questa è la principale ragione per cui le distribuzioni Lévy non riescono a riprodurre bene i valori molto lontani dalla media. Per superare il problema della varianza infinita si possono utilizzare delle distribuzioni di Lévy *troncate*, aventi cioè la forma:

$$p(x) \equiv \begin{cases} 0 & x < -l \\ c p(x)_{\text{Levy}} & -l \leq x \leq l \\ 0 & x > l \end{cases} \quad (12.30)$$

dove  $p(x)_{\text{Levy}}$  è una distribuzione di Lévy e  $c$  è una costante di normalizzazione. Queste distribuzioni troncate hanno la proprietà di approssimare le distribuzioni normali di Lévy, se le osservazioni sono fatte ad intervalli di tempo  $\Delta t$  piccoli (ad esempio pochi minuti), mentre se il

$\Delta t$  diventa grande - a grande scala - esse tendono ad una distribuzione gaussiana.

Ciò è possibile in quanto la varianza delle (12.30) è finita (dunque vale il teorema del limite centrale), in particolare il parametro  $l$  è legato proprio alla scala alla quale avviene il cambiamento tra le due condizioni limite. Scegliendo opportunamente  $l$  si ottengono in effetti buoni risultati, tuttavia si sono riscontrati dei limiti di validità anche nell'utilizzo delle distribuzioni di Lévy troncate. Infatti le (12.30) non riescono a spiegare la variazione della volatilità nel tempo. Per giunta, i parametri  $\alpha$  e  $\gamma$ , non sono costanti, ma dipendono fortemente dal tempo (in particolare  $\gamma$ ). Ciò implica che gli incrementi dei prezzi non sono indipendenti, ovvero che le variabili aleatorie che si sommano nei processi non sono tra di loro indipendenti ed identicamente distribuite <sup>8</sup>.

Ma questa è proprio l'assunzione della teoria del portafoglio che, come abbiamo visto nell'Introduzione, Mandelbrot ha posto in discussione e rigettato.

Possiamo quindi dire che le analisi empiriche rivelano i limiti anche dei processi stocastici utilizzati, ma il fatto che una opportuna distribuzione di Lévy sia in accordo impressionante con i dati entro 6 deviazioni standard suggerisce che il limite dei processi di Ito e similari non stia nell'utilizzo di un processo stocastico, ma nella non sufficiente frattalità del modello utilizzato, nel particolare processo stocastico scelto, ancora troppo dipendente dal random walk gaussiano. Quindi l'approccio stocastico non è in contrasto con l'approccio multifrattale, bensì i due metodi si intersecano, con buone possibilità di comprendere meglio i processi finanziari.

## 12.6 Conclusione

Concludiamo questo breve Capitolo osservando che il modello multifrattale da una parte vede la realtà economica dei prezzi come

---

<sup>8</sup>vi sono inoltre problemi nel determinare con esattezza il valore di  $l$ , quando non si ha a disposizione un numero sufficiente di dati.

intrinsecamente caotica ed imprevedibile, dall'altra scopre in questo sistema complesso delle relazioni di invarianza, di ordine. Da una parte critica le previsioni gaussiane della teoria classica, dall'altra ricerca nuove distribuzioni statistiche in grado di fornire previsioni affidabili. In altri termini la maggiore caoticità che il mondo (economico ma non soltanto) mostra, dal punto di vista delle teorie frattali, si affianca alla ricerca di un ordine, di proprietà di invarianza, di persistenza ... In questo modo si arriva al notevole risultato di studiare quantitativamente fenomeni complessi ed intrattabili con le usuali distribuzioni statistiche. Sottolineiamo infine due possibili estensioni di quanto detto:

- la dipendenza della varianza rispetto al tempo come espressa nella (12.3), è quella del moto browniano gaussiano. Questo moto, come visto nel Cap. 4, non è che un caso particolare del moto browniano *frazionario*, quando il parametro di Hurst  $H$  è pari ad  $1/2$ . È naturale pensare alla generalizzazione a processi con  $0 \leq H \leq 1$ ;
- l'assunzione di variabili statistiche indipendenti ed identicamente distribuite è questionabile. Si possono quindi studiare, come nel moto browniano frazionario, correlazioni a lungo range fra le variabili (persistenza ed antipersistenza).

Queste sono le conclusioni alle quali si giunge studiando l'Economia con l'occhio del fisico.



# Capitolo 13

## L'incidente di Seveso

### 13.1 Introduzione: 10 luglio 1976

In questo e nel prossimo capitolo illustriamo l'applicazione dei frattali a due situazioni particolari: la distribuzione al suolo del contaminante chimico dovuto all'incidente di Seveso[123] e lo studio dell'evoluzione dell'inquinamento radioattivo dovuto all'incidente nucleare di Chernobyl[124, 125]. I due avvenimenti hanno caratteristiche differenti: l'incidente di Seveso ha portato alla diffusione nell'aria di una sostanza specifica, tossica e pesante, la diossina, ed ha contaminato una estensione di pochi chilometri quadrati; la radioattività "implicata" nel caso di Chernobyl, invece, è un fenomeno che ha coinvolto decine e decine di nuclidi radioattivi diversi, espulsi in sospensione nell'aria proiettata fino a diversi chilometri di altezza nell'atmosfera ed ha contaminato molti Paesi per una estesa parte dell'Europa.

I due incidenti hanno però un'importante caratteristica comune: le misure sperimentali non sono né facilmente né direttamente utilizzabili; infatti, a causa della scarsità delle misure e della grande disomogeneità di quelle presenti, si è reso necessario un importante lavoro di indagine preliminare, prettamente tecnica, per renderle utilizzabili[124, 125]. In entrambi i casi i frattali portano a risultati molto soddisfacenti.

Nel comune di Meda [123], al confine con la cittadina di Seveso









La fig. 13.3 mostra, in un "lego plot" la distribuzione geometrica dei prelievi e la relativa concentrazione di TCDD al suolo, misurata in  $\mu\text{g}/\text{m}^2$ . La scala verticale è logaritmica perchè i valori numerici variano su un arco di cinque ordini di grandezza.

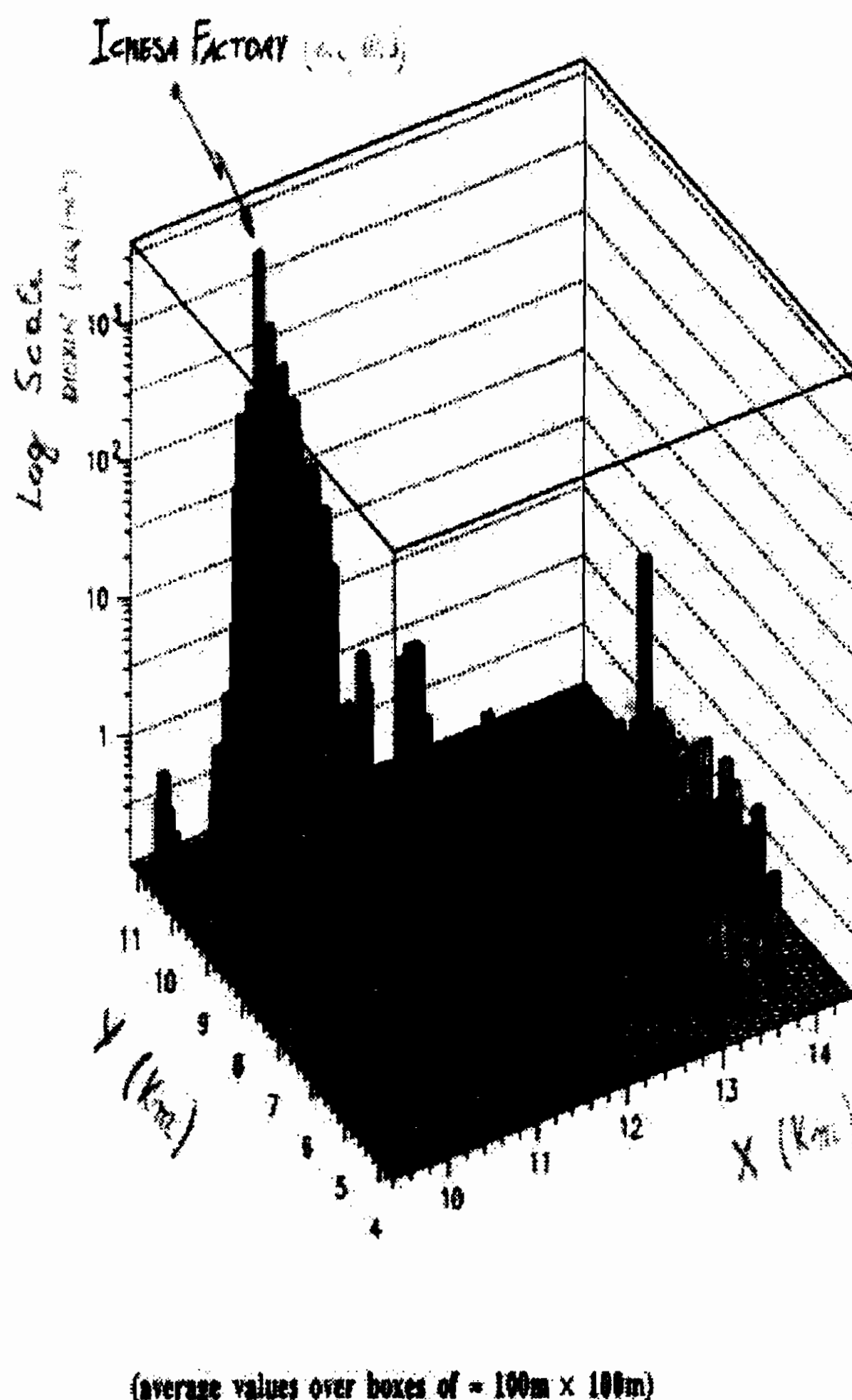


Figura 13.3: Distribuzione bidimensionale (in scala logaritmica) dei dati sperimentali di rilevamento in zona A nella campagna 1976/77.

### 13.3 Metodo empirico

La prima operazione da compiere in caso di analisi in emergenza è di fare una rapida mappatura a "curve di livello". Ciò è stato fatto nel

















da generare viene fissato attraverso un parametro di copertura legato alla densità dei punti disponibili nel campionamento.

Il campo simulato  $\epsilon(i, j)$ , ottenuto dalla sovrapposizione degli impulsi primari, viene infine normalizzato imponendo che la concentrazione media (in regioni predefinite), calcolata effettuando una media spaziale della concentrazione di diossina ricostruita  $\epsilon(i, j)$ , coincida con quella misurata nella campagna di rilievo originale nella regione corrispondente.

In sostanza vengono simulate le somme di impulsi frattali che si aggiungono o sottraggono all'intensità (media) stimata dai dati sperimentali costruiti utilizzando tutte le misure disponibili. IL risultato della simulazione è illustrato nella fig. 13.9

### 13.5.1 Confronto tra modello e dati sperimentali

Per verificare la validità del modello applicato, si possono confrontare i dati ottenuti dal modello monofrattale con le misure sperimentali esistenti. Il confronto è rappresentato in fig. 13.10 per la linea di massima contaminazione.

Per una corretta valutazione occorre considerare due problemi: la mancanza di misure vicino al reattore ICMESA e il fatto che la zona B sia stretta e lunga (cfr. fig. 13.6b).

In primo luogo si osserva che vicino allo stabilimento ICMESA mancano misure di concentrazione elevata (mancanza giustificata dalla presenza di strade e di molte costruzioni di abitazione); in secondo luogo si osserva che la zona di massima contaminazione (circa al livello più basso della zona B) non contiene misure che sono però ben riprodotte dalla simulazione; infine, a partire dalla pos.40 (ben oltre la zona A), le previsioni della simulazione sono molto in difetto. Una concausa di questo disaccordo è la presenza di oltre il 70% di valori n.v. a queste distanze dall'ICMESA. Nella fig.13.10 sono riportate solo le misure di poco sopra la sensibilità ( $0.75\mu\text{g}/\text{m}^2$ ). Se si tiene conto della grande massa dei valori nulli riscontrati in quella zona la simulazione recupera l'accordo.

La linea orizzontale segna il livello di  $1\mu\text{g}/\text{m}^2$  di concentrazione con il che, il disaccordo si ridurrebbe a qualche  $10^{-2}\mu\text{g}/\text{m}^2$  in una zona comunque di sicurezza da un punto di vista epidemiologico.

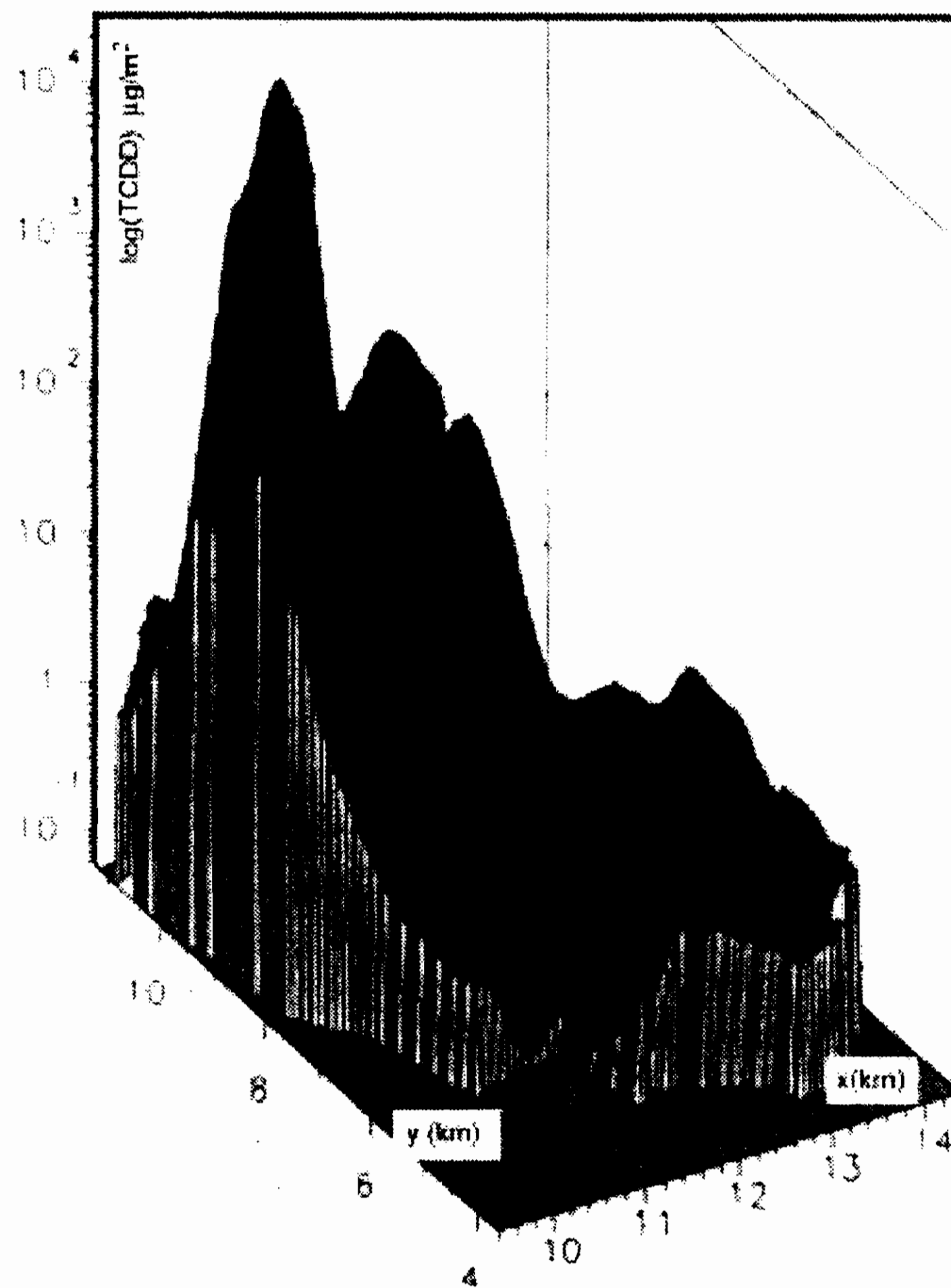


Figura 13.9: Simulazione monofrattale, mediante FSP, della distribuzione totale di TCDD nelle zone A+B+R.

## 13.6 Analisi con i multifrattali universali

Per un'analisi più fenomenologica e nello stesso tempo più generale dell'episodio, studiamo l'inquinamento provocato dall'incidente di Seveso utilizzando i multifrattali universali ovvero sia considerando l'episodio come fenomeno atmosferico puramente caotico e stocastico. Come noto, i parametri fondamentali dei multifrattali universali sono 3:

- la funzione codimensione  $c(\gamma)$ , dove  $\gamma$  è l'ordine di singolarità;
- la codimensione del campo medio  $C_1$ ;

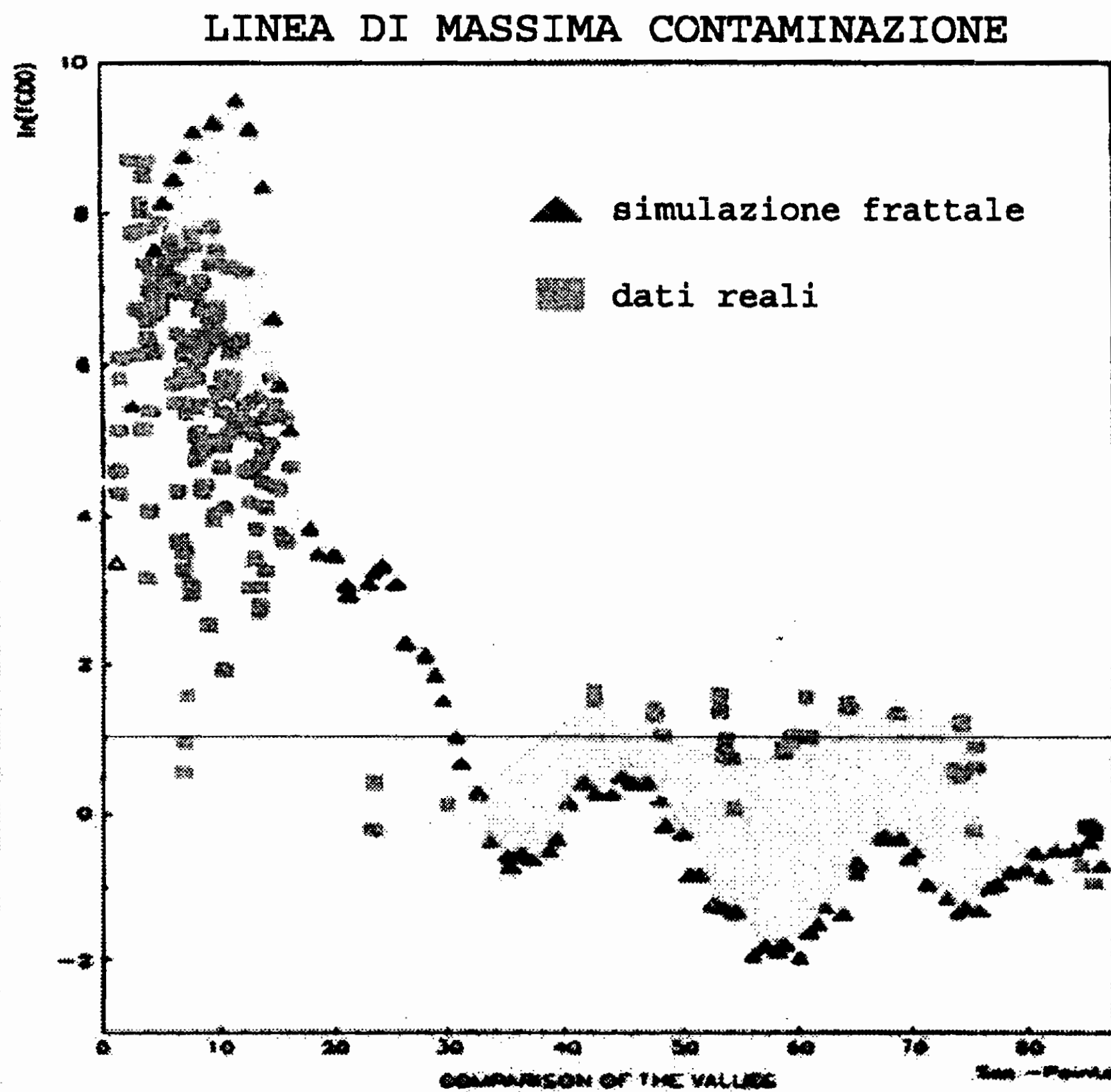


Figura 13.10: Confronto tra i dati simulati col modello monofrattale e i dati sperimentali lungo la linea di massima contaminazione.

- il grado di multifrattalità o parametro di Levy  $\alpha$

Per procedere alla determinazione dei parametri stabiliamo una griglia di riferimento con risoluzione  $\lambda$  e definiamo il campo  $\epsilon_\lambda(\underline{x})$  come la quantità di inquinante (con risoluzione  $\lambda$ ) relativa alla posizione  $\underline{x}$  della griglia. Considerando  $\epsilon_\lambda$  come una variabile casuale la distribuzione dell'inquinamento si riduce ad essere una singola realizzazione di un processo stocastico. Dalla statistica dei campi multifrattali segue:

$$Pr(\epsilon_\lambda > \lambda^\gamma) \propto \lambda^{-c(\gamma)}$$

in cui la funzione codimensione è data da:

$$c(\gamma) = C_1 \left( \frac{\gamma}{\alpha' C_1} + \frac{1}{\alpha} \right)^{\alpha'}$$

dove  $\alpha'$  è il “grado di multifrattalità” e  $(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha'}) = 1$ .

La funzione  $c(\gamma)$  si ottiene utilizzando la legge dello scaling multiplo delle distribuzioni di probabilità (PDMS) da cui:

$$\Pr(\epsilon_\lambda > \lambda^\gamma) = \Pr\left(\frac{\log(\epsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} > \gamma\right) \approx \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda} \propto \lambda^{c(\gamma)}$$

dove  $N_\lambda(\gamma)$  è il numero delle "scatole" in cui la disuguaglianza  $\frac{\log(\epsilon_\lambda)}{\log(\lambda)} > \gamma$  è verificata e  $N_\lambda$  è il numero totale di scatole di risoluzione  $\lambda$ . Prendendo il logaritmo degli ultimi due membri otteniamo:

$$\log \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda} = -c(\gamma) \log(\lambda) + cost.$$

Infine  $c(\gamma)$  si ottiene effettuando un fit lineare di  $\log \frac{N_\lambda(\gamma)}{N_\lambda}$  rispetto a  $\log(\gamma)$  per diversi valori di  $\lambda$  e  $\gamma$ .

Il risultato si può osservare nella fig. 13.11, dove sono riportati i grafici di  $c(\gamma)$  e di  $\alpha$  ottenuti separatamente per le campagne di misura 1976/77 e 1980/81 eseguite con metodiche abbastanza diverse.

Si ricava che, per entrambe le campagne, il fenomeno risulta essere un processo stocastico con  $\alpha \approx 0.42$  e con una codimensione di campo medio di circa  $C_1 \approx 1.0$ . L'andamento delle curve è però difficile da interpretare. I dati mostrano un salto, dai valori di zona A a quelli di zona B immediatamente vicini, abbastanza strano poichè appare inverosimile che vi sia nella realtà un salto così netto a distanza di pochi metri: possono esistere fluttuazioni anche consistenti ma la variazione di concavità indica che per un ampio intervallo di valori di  $\gamma$ , il campo risulta appiattito.

Gli andamenti osservati sembrano essere conseguenza delle procedure di estrazione della TCDD le quali, non sempre, sono state completamente sotto controllo dal punto di vista statistico. Tuttavia, anche in questo caso, risulta chiaro che l'analisi tramite il metodo frattale mette in evidenza le proprietà di scaling della funzione che descrive il fenomeno di inquinamento. I multifrattali universali forniscono quindi una facile modellizzazione per prevedere cosa potrebbe accadere in futuri incidenti... ovviamente indesiderati.

## 13.7 Un diversivo interessante

E' interessante accennare, infine, al metodo utilizzato per la raccolta dei campioni di suolo in funzione della profondità[127]. Una ricerca

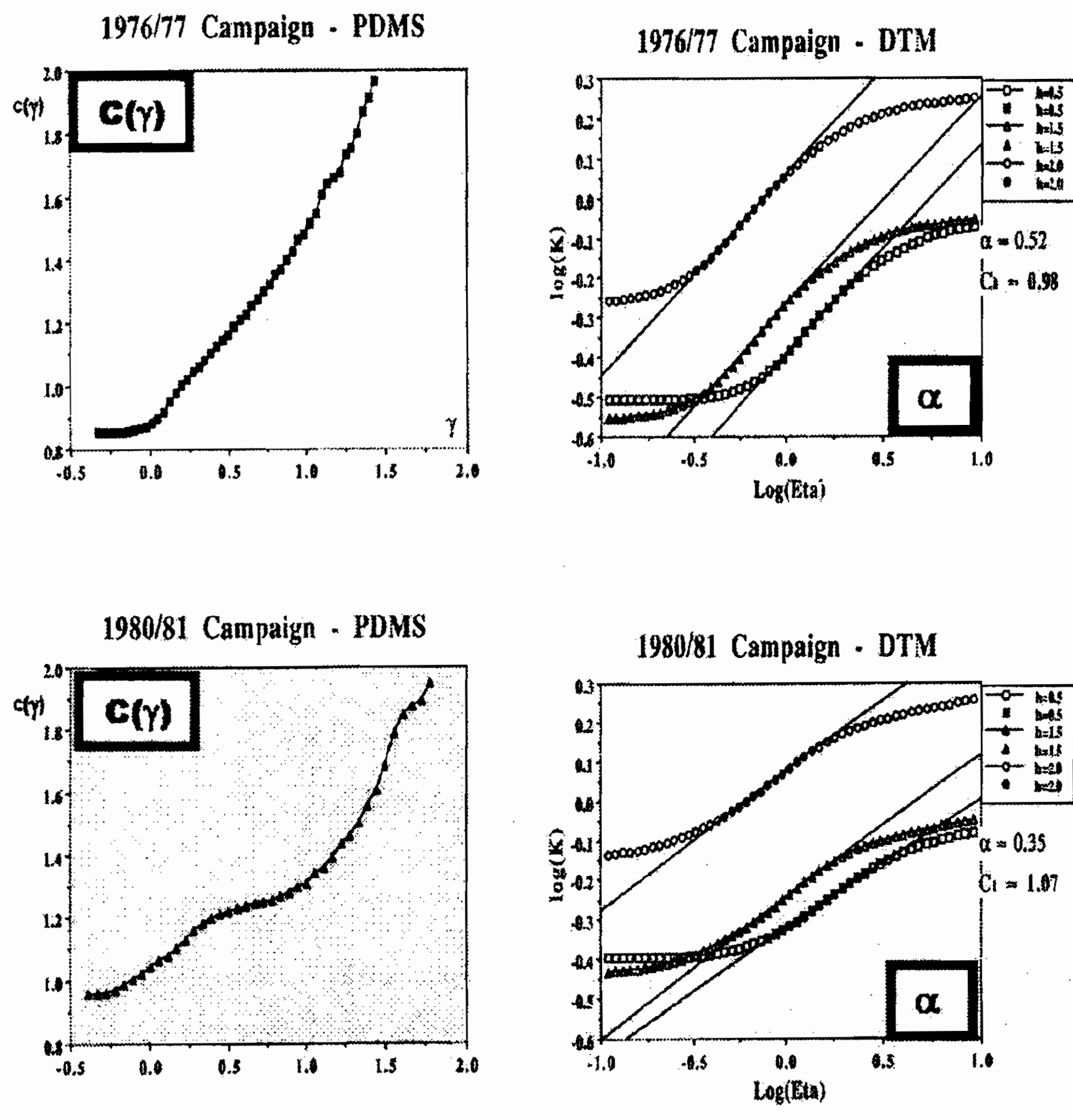


Figura 13.11: A sinistra: grafico della codimensione frattale  $c(\gamma)$  per le campagne di misurazione del 1976/77 e 1980/81; a destra: determinazione del grado di multifrattalità  $\alpha$ .

dell'Università del Missouri, nella stazione di Times Beach, mostra che la TCDD penetra nel terreno per circa 1cm all'anno. Nelle tre campagne di misura del suolo attorna a Seveso, sono stati presi dei campioni di terreno secondo la tecnica schematizzata in fig. 13.12. I tre campionamenti sono stati effettuati in maniera differente: nel 1976 ci si è fermati a una profondità di 20cm, nel 1979 a 100cm, mentre nel 1977 si è arrivati fino a circa 160cm. I valori di inquinante così ottenuti sono stati analizzati con due metodi empirici, peraltro usati spesso nelle analisi statistiche dei dati sperimentali, differenti per controllarne l'efficacia. Il primo metodo (detto *Empirical Double Shift Method*) dà ugual peso ai differenti livelli

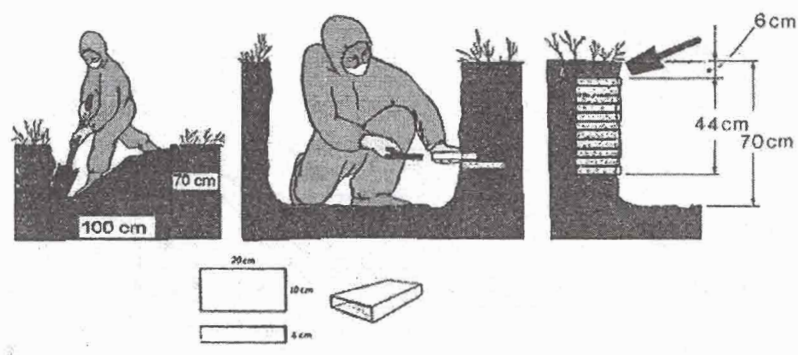


Figura 13.12: Illustrazione della tecnica di campionamento del terreno

di TCDD; il secondo (detto *Most Significant Range Renormalization*) dà maggior credito alle zone dove la concentrazione di TCDD è più elevata.

Il secondo metodo fornisce dei risultati più quantitativi che tramite una funzione interpolante porta al risultato rappresentato in fig. 13.13. Si nota come il decadimento esponenziale dell'inquinante nei primi centimetri di terreno sia seguito da un livellamento a profondità maggiori. Ciò porta a concludere che il livello piatto costituisce la prima e sola misura di concentrazione di TCDD nel terreno agricolo.

Occorre riflettere sul fatto che sul terreno possono depositarsi sia sostanze nocive che sostanze innoche le quali tuttavia, possono subire nel tempo trasformazioni chimiche o biochimiche in grado di produrre sostanze tossiche.

Il dato in esame pertanto assume una valenza particolare in quanto fornisce una indicazione di come molecole indesiderate si possono formare nel terreno agricolo e con questo contribuire al pericolo di intossicazione *incolpevole* quand'anche si assumano nell'organismo soltanto prodotti naturali. I valori riportati nella figura possono essere considerati quantitativamente irrilevanti dal punto di vista patologico, tuttavia propongono alla comunità civile un dato prima di allora non disponibile.

Il dato sperimentale qui considerato non ha nulla a che vedere con la analisi frattale o multifrattale del fenomeno *Seveso*, tuttavia vuole testimoniare il fatto che, nella analisi dei dati, un buon fisico non trascura mai di estrarre tutta la informazione *scientifica* che l'insieme dei dati

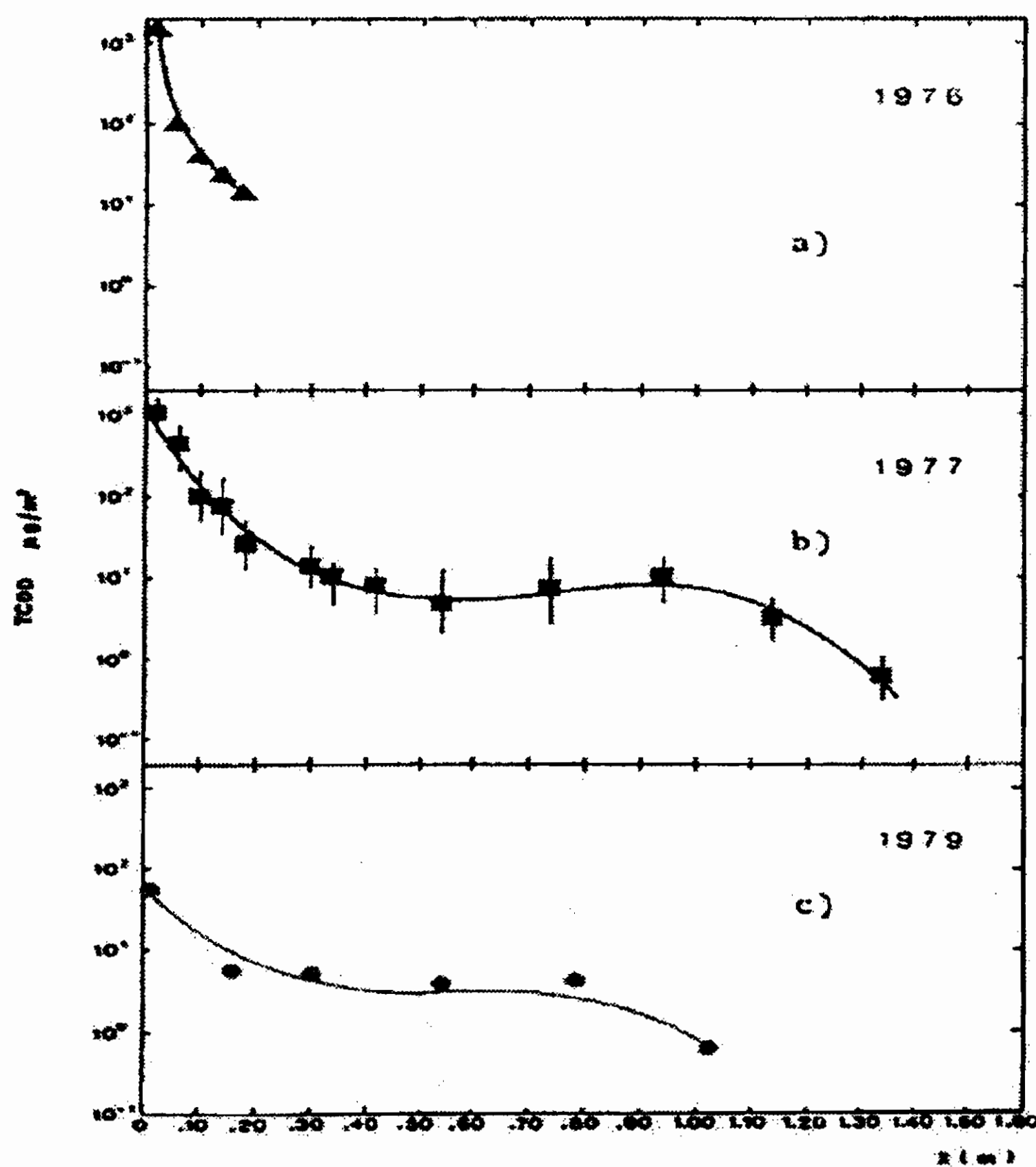


Figura 13.13: Rappresentazione della quantità di TCDD nel terreno nei diversi anni di campionamento interpolata secondo il metodo indicato nel testo.

è in grado di fornire. Tuttavia l'informazione messa a disposizione della comunità scientifica è di per sé interessante in quanto fornisce una conoscenza prima mancante nel panorama internazionale delle sostanze cosiddette supertossiche. Infatti, se la TCDD viene assorbita e penetra nel terreno ad una velocità di circa 1 cm all'anno, i casi sono due: o è accaduto un analogo incidente durante il Secolo XIX (ma allora non vi erano processi industriali in grado di produrre triclorofenolo (TCP) e diserbanti chimici analoghi a quelli prodotti a Seveso) o la TCDD trovata a grande profondità è quella che viene naturalmente sviluppata da processi di degenerazione biologica del suolo. È ben noto che, qualunque elemento o sostanza ci si riproponga di trovare nel terreno si scova, magari in quantità trascurabili dal punto di vista pratico.





# Capitolo 14

## Il caso Chernobyl

### 14.1 Introduzione

In questo capitolo illustriamo lo studio dell'inquinamento radioattivo in aria e al suolo causato dall'esplosione della centrale nucleare di Chernobyl. Gran parte del lavoro illustrato in questo capitolo è stato tratto da una lunga serie di pubblicazioni originali[124, ?] tra cui le tesi di Laurea degli (allora) studenti S. Cerlesi, A. Ravera, E. Milani, E. Quinto [145]

### 14.2 L' incidente di Chernobyl

Il 26 Aprile 1986, dunque, avviene il più grave incidente mai accaduto in una centrale nucleare per la produzione di energia elettrica. Alle ore 01.24 una serie di errori e il disinserimento dei sistemi di sicurezza provocano l'esplosione del reattore 4 della centrale, che disperde in aria tonnellate di biossido di uranio, grafite incandescente e prodotti di fissione, tra cui:  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$  e  $^{132}\text{I}$ . Il pennacchio caldo, denso di fumi, polveri e radionuclidi raggiunge i 5 km di altezza, la ricaduta di particelle radioattive interessa tutti i paesi europei, partendo dalla Scandinavia, per poi investire i paesi dell'Europa centro-meridionale nei primi giorni del maggio 1986. Il deposito al suolo degli agenti inquinanti avviene principalmente per "via umida", cioè tramite il trascinarsi degli

Nuclide	Emi-vita	Attività	Organi interessati
$^{134}\text{Cs}$	2.07 anni	$54 \cdot 10^{15} \text{Bq}$	Muscoli
$^{137}\text{Cs}$	30,09 anni	$85 \cdot 10^{15} \text{Bq}$	Muscoli
$^{131}\text{I}$	8 giorni	1750	Tiroide

Table 14.1: Tabella dei principali nuclidi presenti nella nube radioattiva ( $10^{15} \text{Bq} = 1 \text{PetaBq}$ ).

agenti inquinanti ad opera della pioggia (*wash out*), oppure le particelle stesse possono diventare nuclei di condensazione delle gocce, che a loro volta precipitano sotto forma di pioggia o neve (*rain out*). L'entità del fallout radioattivo è influenzata da un gran numero di fattori, quali la situazione meteorologica, la geografia del terreno, eccetera. Inoltre, poiché a livello del suolo si possono verificare fenomeni di "ruscellamento" delle acque, tali da determinare alte concentrazioni di radionuclidi, i valori di contaminazione possono variare di molto anche in zone tra loro vicine. Altri fenomeni che possono influenzare considerevolmente la misura dell'inquinamento sono la struttura e la composizione (ph, tipo di argille o sabbie presenti) del terreno, la vegetazione ed quant'altro.

### 14.3 Provenienza e selezione dei dati

La maggior parte dei dati raccolti riguardano il  $^{137}\text{Cs}$ , lo  $^{131}\text{I}$  e la serie dei relativi radionuclidi ( $^{134}\text{Cs}$  e  $^{132}\text{I}$ ) a causa della loro massiccia presenza, del lungo periodo di dimezzamento, dell'accumulo in organi specifici e della loro tossicità. In particolare lo iodio viene fissato molto velocemente nella tiroide che corre il rischio di diventare una sorgente radioattiva localizzata all'interno del corpo umano. Per fortuna l'assorbimento di I da parte della tiroide subisce una saturazione. Per questa ragione si somministrano, preventivamente, alte dosi di Iodio non radioattivo inducendo una reazione di rigetto naturale dell'elemento radiattivo che viene espulso per le vie normali. Il  $^{137}\text{Cs}$  ha una vita media ( $\tau = 30\text{anni}$ ) che lo fa apparire stabile a tutti gli effetti pratici. La sua permanenza nell'aria, allora, è dominata dai fattori atmosferici.

Le misure relative alla ricaduta di radioattività causata dall'incidente di Chernobyl sono state fatte da Istituzioni pubbliche e private, come

detto, diversissime tra loro, in diversi paesi europei; la maggior parte dei dati fu raccolta in una apposita banca dati, nell'archivio informatico R.E.M. (Radioactivity Environmental Monitoring) sviluppato presso il Joint Research Center (J.R.C.) della Commissione delle Comunità Europee a Ispra, in provincia di Varese. I dati provenienti dall'ex Unione Sovietica sono stati invece recuperati dalle pubblicazioni in lingua russa del *Soviet Hydromet Office*[133] raccolti a Mosca, Obninsk e Minsk tra il 1989 e il 1992. I dati del banca dati R.E.M. sono stati forniti da vari enti statali, regionali o locali in rapporti scritti ovvero su supporto magnetico. Un primo lavoro di controllo dei dati è stato effettuato presso il J.R.C. conservando solo quelle misure per le quali erano specificate in maniera completa la data (inizio e termine del campionamento nel caso di misure riferite al fallout), le tecniche di rilevamento (tipo dei filtri, dei terreni o dei tamponi utilizzati) e la locazione geografica (latitudine e longitudine). I dati utilizzati nello studio sono stati estratti dalla banca dati R.E.M. in modo da ottenere un campione utilizzabile nella verifica dei modelli di trasporto a lungo raggio, nello studio del comportamento fisico-chimico dei radionuclidi e per la descrizione della distribuzione dei livelli di contaminazione nei Paesi europei[134].

Per quanto riguarda il fallout in aria sono state impiegate le misure rilevate nel nord Italia relative ai radionuclidi  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{132}\text{I}$ ,  $^{103}\text{Ru}$ ,  $^{132}\text{Te}$ . Ogni singolo dato è riportato in un record informatico contenente numerose informazioni sulla rilevazione archiviata. Per quanto riguarda i dati utilizzati per le successive analisi e simulazioni sono stati presi in considerazione solo le informazioni riguardanti, la quantità di radioattività (espressa in  $\text{Bq m}^{-2}$ ) e la data di campionamento; quanto alla posizione della misura (longitudine e latitudine) viene per lo più riportata quella del capoluogo di provincia cui appartiene la località di effettuazione della misura. È importantissimo sottolinearlo in quanto questa circostanza condiziona pesantemente la risoluzione spaziale di tutte le simulazioni frattali eseguite. Altre indicazioni presenti nell'archivio (spessore e dimensione del campione, tecnica adottata, etc.) sono scarsamente utilizzabili. Le misure di deposizione accumulata di  $^{137}\text{Cs}$  e  $^{134}\text{Cs}$  al suolo coprono l'intero periodo di deposizione individuato dal passaggio della nube sull'Europa; il lavoro illustrato in questo capitolo è si concentra sulla sola analisi dell'inquinamento dovuto al  $^{137}\text{Cs}$  (nel §14.5 verranno utilizzati anche i dati riguardanti i nuclidi  $^{131}\text{I}$ ,  $^{132}\text{I}$ ,  $^{103}\text{Ru}$  e  $^{132}\text{Te}$ ).



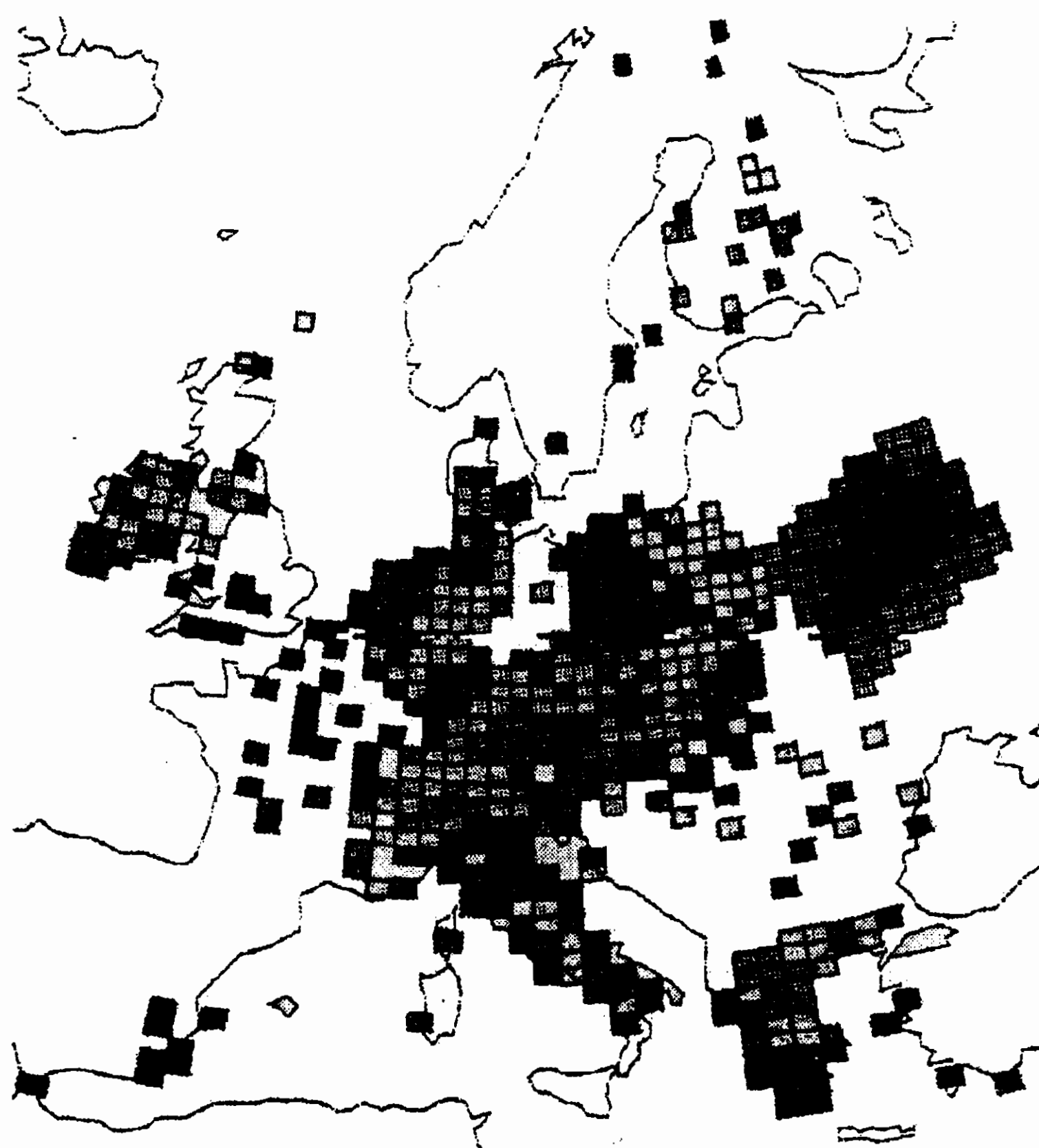


Figura 14.1: Illustrazione della contaminazione radioattiva in Europa in seguito all'esplosione della centrale nucleare di Chernobyl. La contaminazione è proporzionale alla sfumatura scura.

Un ulteriore elemento utile è costituito dalla presenza, negli archivi informatici, di più di una misura effettuata nella stessa località; in tali casi si è scelto di utilizzare la media fra le misure, considerando la deviazione standard come indicazione dell'incertezza della misura.

La diversità tra le date di effettuazione delle misure, in certi casi superiore all'anno, ha portato ad un problema di omogeneità temporale. Per questo motivo si è dovuto procedere ad una "rinormalizzazione" delle date delle misure, per fare in modo che i dati fossero tutti riferiti ad un unico giorno scelto arbitrariamente; è stata scelta la data del 1 luglio 1987, presumendo che in quella data fossero cessati tutti i processi di diffusione e di ricaduta. Questa "rinormalizzazione" è stata ottenuta applicando la legge del decadimento radioattivo corrispondente a ciascun

Località	Latid. (gradi)	Longit. (gradi)	Data	Dep. $^{134}\text{Cs}$ ( $\text{kbq m}^{-2}$ )	Dep. $^{137}\text{Cs}$ ( $\text{kbq m}^{-2}$ )	Riferim.
Aich-Assach	47,410	13,810	01.05.86		56,800	ARCS-89D1
Alkoven	48,280	14,090	01.05.86		89,100	ARCS-89D2
Barnkopf	48,384	15,005	01.05.86		N	ARCS-89D11
Bolder A-H	47,50	17,00	1986	14,000	29,000	UKAEA-87RI

Table 14.3: Estratto dei dati relativi all'Austria

nuclide:

$$N(t_2) = N(t_1)e^{-\frac{t_2-t_1}{\tau}} \quad (14.1)$$

dove  $N(t)$  rappresenta il numero di nuclidi radiattivi misurato al tempo  $t$ , e  $\tau$  rappresenta la vita media del nuclide in esame. In questo modo, nota la misura al tempo  $t_1$ , è possibile ottenere una stima della radioattività al tempo  $t_2$ <sup>1</sup>.

Da un punto di vista fisico, questa operazione va effettuata con una certa cautela; infatti, se una delle due date è molto vicina a quella dell'incidente, possono entrare in gioco fattori di fall-out, che possono portare a una sovrastima, o a una sottostima, dei livelli di contaminazione. In generale, per date "più lontane" (come nel caso di località geograficamente lontane da Chernobyl), la procedura porta ad approssimazioni accettabili.

Da ultimo, si è riscontrato che alcune datazioni sono state fatte in maniera incompleta, in quanto in alcuni casi, come data di effettuazione della misura, sono stati riportati solo il mese e l'anno o, addirittura, solo l'anno. Per minimizzare l'errore nella stima delle date incomplete si è convenuto che il campionamento fosse stato effettuato a metà mese o a metà anno. Nella Tabella 14.4 sono riassunte le informazioni relative ai campioni di diversi paesi europei, riportando il numero di misure originali (# Staz. Originali), il numero dei dati utilizzabili dopo il "controllo di qualità" (# Staz. Utilizzate), valori di minimo e massimo di deposizione al suolo e, come riferimento, l'area totale del Paese interessato dal fenomeno. È facile notare come la densità "geografica" di informazioni sia estremamente bassa ed in alcuni casi del tutto inutilizzabile.

<sup>1</sup> purtroppo ciò non può tener conto degli effetti atmosferici ma permette comunque di avere una stima grossolana della presumibile misura.



I passi necessari per completare una analisi frattale del fenomeno ricaduta radiattiva sono tre:

1. si deve ponre attenzione alla dinamica temporale del fenomeno tramite lo studio delle curve di arrivo degli inquinanti in Italia usando formule empiriche controllate tuttavia a livello europeo nel quadro di un contratto di ricerca finanziato dalla CEE;<sup>[134]</sup>;
2. si procede ad una analisi monofrattale dell'inquinamento in aria nel nord Italia;
3. si effettua una analisi multifrattale relativa alla deposizione al suolo degli agenti contaminanti nell'Europa occidentale.

Infine si provvede ad una verifica dei risultati ottenuti tramite il confronto con i dati posseduti. Per motivi di spazio, in questo capitolo non viene illustrato lo studio completo del fenomeno, ma ci si limita ad alcuni esempi che ne confermano la validità. Chi fosse interessato può comunque riferirsi al lavoro originale<sup>[145]</sup>.

## **14.5 Concentrazione in aria: curve di arrivo**

I dati relativi all'arrivo della nube radioattiva, generata dall'incidente di Chernobyl, in Italia e in Francia, possono essere descritti da un'unica funzione empirica dipendente da pochi parametri<sup>[141]</sup>. Questa funzione risulta valida per le diverse province e per i diversi nuclidi. Restringendo l'interesse al <sup>137</sup>Cs, a causa della sua lunga vita media (circa 30 anni) e quindi della sua permanenza nell'ambiente, è stata elaborata una procedura che permette di calcolare i parametri della funzione in quelle province in cui la scarsità di dati non ne consente una stima; nel caso dell'Italia, questa procedura ha permesso di valutare le costanti della funzione in 4 ulteriori province.

### **14.5.1 Funzione interpolante**

Come detto, è possibile utilizzare un'unica funzione per descrivere la presenza in aria dei diversi radionuclidi nelle diverse province italiane; la



funzione, opportunamente scelta [141], è la seguente:

$$y(t) = K + \exp\left[-\frac{A}{\tau}t + B\right]\left[1 - \exp\left(\frac{C}{\tau} - t\right)\right] \quad (14.2)$$

dove il tempo è espresso in giorni, contati dalla data dell'incidente. E' evidente che la funzione dipende da pochi parametri ai quali è possibile dare la seguente interpretazione fisica:

$\tau$ : vita media del nuclide in esame, valore ricavato dalla letteratura;  
K: "background" radioattivo;

A: Parametro indipendente dalla località geografica, legato al nuclide in esame: fornisce una stima della velocità di decadimento della concentrazione in aria (indipendente dalla vita media del nuclide). Esso infatti dipende almeno prevalentemente, se non esclusivamente, dalle caratteristiche fisico-chimiche del trasporto.

B: Costante moltiplicativa (positiva) caratteristica della provincia in esame e legata all'intensità del fenomeno inquinante. Si è rilevato che il rapporto tra i valori di B per diversi nuclidi in diverse province è costante, confermando l'ipotesi che la composizione della nube che ha trasportato l'inquinante sia rimasta uniforme e che le quantità degli agenti inquinanti fossero in rapporto costante.

C: Parametro di calibrazione (definito positivo) legato al tempo di arrivo della nube in una data località, indipendente dal nuclide in esame, ma caratteristico della provincia. Si può osservare che  $\sqrt{C}$  cade in un intorno del picco della funzione interpolante che, generalmente, corrisponde, con ottima approssimazione, al giorno di arrivo della nube.

Le misure raccolte nell'archivio R.E.M. (relative ai nuclidi  $^{137}\text{Cs}$ ,  $^{134}\text{Cs}$ ,  $^{131}\text{I}$ ,  $^{132}\text{I}$ ,  $^{103}\text{Ru}$  e  $^{132}\text{Te}$ ) sono state interpolate con la curva (14.2) su 15 province italiane (vedi Tab. 14.5) seguendo due procedure. La prima, detta *Single Fit*, consiste nel considerare le province singolarmente e di ottenere quindi una stima dei 4 parametri (A, B, C e K) diversa in ogni differente località geografica. La seconda, detta *Global Fit*, è basata sul fatto che il parametro A può essere considerato indipendente dalla località geografica ed è quindi possibile assumere un unico valore di A per un fissato nuclide. Si effettua quindi l'interpolazione globalmente su tutte le province, riducendo così il numero di parametri da stimare. Per  $n$  province, infatti, bisogna valutare  $n$  valori per B, C e K e uno solo per A, per un totale di  $3n + 1$  valori contro i  $4n$  del single fit. In più, se si considera che il valore ordinario di K è decisamente inferiore ai valori

di radioattività ambientale del luogo, è possibile considerarlo come una costante dedotta dai dati di radioprotezione e ridurre così ulteriormente il numero di valori a  $2n + 1$ . Nella Tabella 14.5 sono riportati, per ogni provincia, i dati disponibili (limitatamente ai nuclidi in esame) e la procedura di interpolazione adottata.

Prov.	$^{137}Cs$	$^{131}I$	$^{103}Ru$	$^{132}Te$
AL	26 <i>G - S</i>	34 <i>G - S</i>	34 <i>S</i>	18 <i>S</i>
LT	47 <i>G - S</i>	73 <i>G - S</i>	51 <i>G - S</i>	33 <i>S</i>
MI	82 <i>G - S</i>	160 <i>G - S</i>	51 <i>G - S</i>	83 <i>S</i>
MT	82 <i>G - S</i>	68 <i>G - S</i>	68 <i>G - S</i>	
PC	50 <i>G - S</i>	75 <i>G - S</i>	55 <i>G - S</i>	48 <i>S</i>
PV	78 <i>G - S</i>	58 <i>G - S</i>	76 <i>G - S</i>	47 <i>S</i>
RM	114 <i>G - S</i>	130 <i>G - S</i>	101 <i>G - S</i>	81 <i>S</i>
VC	58 <i>G - S</i>	78 <i>G - S</i>	37 <i>G - S</i>	27 <i>S</i>
PA	14 <i>G - S</i>	12 <i>G - S</i>		
BO	32 <i>G - S</i>	41 <i>G - S</i>	43 <i>G - S</i>	21 <i>S</i>
CE		15 <i>S</i>	16 <i>G - S</i>	
GE		10 <i>G - S</i>		10
PD		25 <i>G - S</i>		
PI		25 <i>G - S</i>		
TS	12 <i>G - S</i>	37 <i>G - S</i>	23 <i>G - S</i>	10 <i>S</i>

Table 14.5: Per ogni provincia e per ogni nuclide viene indicato il numero di dati e la procedura di interpolazione: *G* - Global fit, *S* - Single fit.

Come si può osservare, non in tutti i casi è stato possibile applicare entrambi i metodi e, in alcune province evidenziate dalle celle vuote, non è stato possibile ottenere risultati accettabili a causa di problemi di convergenza emersi nell'utilizzo degli algoritmi numerici. Questi problemi sono da attribuire alla limitata quantità dei dati disponibili, alla distanza (più di 10-15 giorni) dei rilevamenti dalla data dell'incidente oppure alla concentrazione delle misure in pochi giorni. Riportiamo in Tabella 14.6, a titolo d'esempio, i valori dei parametri B, C e K per le 11 province esaminate dell'isotopo  $^{137}Cs$  interpolati secondo il global fit. Il valore di A ricavato dal fit globale è:

$$A = -0.433 \pm 0.004.$$

Si può osservare che, a parte il valore anomalo ottenuto per il parametro

		B	C	K
AL	26	$3.58 \pm 0.13$	$47.1 \pm 0.97$	$3.90 \cdot 10^{-04} \pm 6.21 \cdot 10^{-05}$
LT	47	$3.98 \pm 0.11$	$80.9 \pm 1.50$	$6.49 \cdot 10^{-03} \pm 1.12 \cdot 10^{-05}$
MI	82	$3.55 \pm 0.79$	$30.7 \pm 0.44$	$4.02 \cdot 10^{-03} \pm 8.47 \cdot 10^{-04}$
MT	66	$4.42 \pm 0.05$	$56.2 \pm 1.67$	$7.82 \cdot 10^{-04} \pm 8.51 \cdot 10^{-05}$
PC	50	$3.50 \pm 0.74$	$81.0 \pm 2.12$	$2.65 \cdot 10^{-03} \pm 3.39 \cdot 10^{-04}$
PV	76	$3.40 \pm 0.32$	$36.9 \pm 0.31$	$7.28 \cdot 10^{-04} \pm 2.47 \cdot 10^{-05}$
RM	114	$4.00 \pm 0.79$	$39.3 \pm 0.56$	$1.12 \cdot 10^{-04} \pm 1.04 \cdot 10^{-05}$
VC	58	$3.22 \pm 0.12$	$29.3 \pm 0.59$	$1.16 \cdot 10^{-03} \pm 1.48 \cdot 10^{-04}$
PA	14	$1.00 \pm 1.34$	$33.9 \pm 77.3$	$2.79 \cdot 10^{-03} \pm 3.02 \cdot 10^{-04}$
BO	32	$2.64 \pm 0.75$	$46.3 \pm 1.66$	$1.35 \cdot 10^{-03} \pm 1.43 \cdot 10^{-04}$
TS	12	$4.40 \pm 0.18$	$100 \pm 74.0$	$9.93 \cdot 10^{-02} \pm 1.16 \cdot 10^{-04}$

Table 14.6: I parametri B, C e K relativi al  $^{137}Cs$ , interpolati secondo la procedura di Global Fit.

C della provincia di TS, la procedura fornisce risultati attendibili stimando l'arrivo della nube in un periodo compreso tra i 5 e i 9 giorni dopo l'incidente.<sup>2</sup>

### 14.5.2 Pseudomisure: recupero di valori di A, B, C

Lo studio dell'inquinamento da radionuclidi in aria è stato svolto sui dati relativi al  $^{137}Cs$ , in quanto, per le sue caratteristiche di stabilità, è il miglior indicatore dello stato della contaminazione. Come visto, però, non in tutte le province è stato possibile stimare direttamente i parametri della funzione (14.2) relativi al  $^{137}Cs$ .

Per recuperare informazioni certamente preziose, è stata applicata una tecnica originale che ha permesso di stimare tali parametri anche in province dove non è possibile ottenerli altrimenti.

In tutto il procedimento il valore del parametro K è stato trascurato in quanto il suo valore è abbastanza vicino a zero.

Il parametro A viene assunto costante in tutte le province ed uguale al valore calcolato con il global fit.

<sup>2</sup>I dati di TS vanno pertanto utilizzati con cautela.

Il parametro C, invece, è stato valutato mediante il valor medio di  $\sqrt{C}$  desunto dagli altri nuclidi esaminati nella stessa provincia.

Per quanto riguarda il parametro B, è possibile verificare empiricamente che il rapporto  $B_{Cs}/B_n$  (dove n indica il generico nuclide) per i diversi nuclidi è costante in tutte le province; per questo è possibile usare i valori di B per nuclidi diversi da  $^{137}Cs$  e ricavare il valore di  $B_{Cs}$  moltiplicando il valore di  $B_n$  della provincia in esame per il valore del rapporto tra le concentrazioni dei due nuclidi.

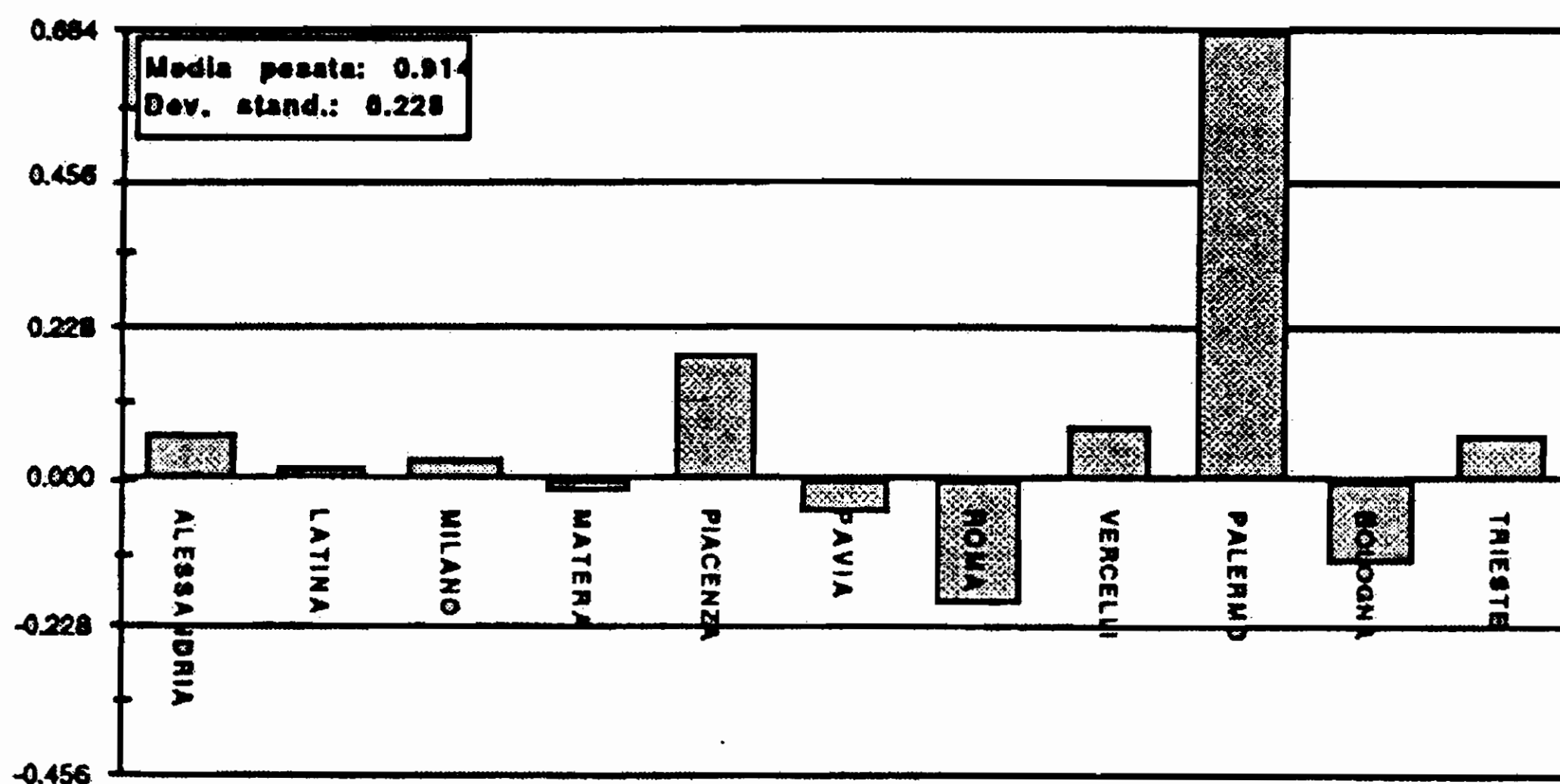


Figura 14.2: Andamento dei rapporti  $B_{Cs}/B_I$ ; in ordinata viene riportata la differenza tra il valore di tale rapporto e la media pesata.

## 14.6 Recupero di informazioni

Per la ricostruzione dei parametri delle curve di arrivo a partire dai dati disponibili nelle varie province, si è reso a questo punto necessario studiare una procedura che permettesse di ricavare i dati mancanti partendo dai dati disponibili per gli altri radionuclidi. Sono stati elaborati i seguenti protocolli di lavoro:

- Metodo I: stima dei parametri del Cesio utilizzando i dati di Iodio e Rutenio;

- Metodo II: stima dei parametri del Cesio utilizzando i dati di Iodio e Tellurio;
- Metodo III: stima dei parametri del Cesio utilizzando i dati di Iodio;
- Metodo IV: stima dei parametri del Cesio utilizzando i dati di Rutenio;

### 14.6.1 Stima del parametro B

Come già menzionato, il parametro B fornisce una stima della concentrazione di agente inquinante nella nube.

Come primo passo sono stati calcolati, per ogni provincia che permetteva di utilizzare l'equazione, i rapporti tra il valore di  $^{137}\text{Cs}$  e gli altri nuclidi in esame tramite la formula banale:

$$R(i) = \frac{B(\text{Cs})_{prov}}{B_n(i)},$$

dove  $i$  indica la provincia.

Nel caso dell'utilizzo di due elementi (metodo "I" e "II") è stata utilizzata la media pesata sul numero di dati in possesso per ciascun nuclide utilizzato, secondo la seguente formula:

$$R(i) = \frac{1}{n(i)} \left( n_1(i) \frac{B(\text{Cs})_{prov}}{B(\text{nuc1})_{prov}} + n_2(i) \frac{B(\text{Cs})_{prov}}{B(\text{nuc2})_{prov}} \right)$$

dove  $n_1(i)$  e  $n_2(i)$  indicano il numero di misure per i nuclidi 1 e 2 e  $n(i)$  indica il numero totale di misure per provincia.

Per trovare la stima della variabilità del rapporto così ottenuto<sup>3</sup> bisogna interpolare i dati sugli errori  $\sigma_{\text{Cs}}(i)$  e  $\sigma_{\text{nuc}}(i)$  tramite i seguenti passaggi:

$$R(i)_{min} = \frac{B_{\text{Cs}}(i) - \sigma_{\text{Cs}}(i)}{B_n(i) + \sigma_n(i)}$$

$$R(i)_{max} = \frac{B_{\text{Cs}}(i) + \sigma_{\text{Cs}}(i)}{B_n(i) - \sigma_n(i)}$$

$$\sigma_n(i) = \frac{R(\text{nuc})_{max} - R(\text{nuc})_{min}}{2}$$

---

<sup>3</sup>In realtà non si può stimare un "errore" in senso stretto bensì solo una scostamento ammissibile come se fosse un errore

Ottenuto il valore di  $R$  per ogni singola provincia si provvede ad ottenere il valore di  $R$  generale valutandone la media ponderata, con peso definito dal numero di dati per ogni provincia, e la corrispondente variabilità (deviazione standard):

$$R = \frac{1}{n_{TOT}(i)} \sum_i n(i)R(i)$$

ove  $n(i)_{TOT}$  indica il numero totale di dati utilizzati.

A questo punto è possibile ricostruire il valore  $B'_{Cs}(i)$  moltiplicando il valore di  $R$  così ottenuto per il valore  $B$  noto di un altro nuclide:

$$B'(Cs)_{prov} = RB_n(i)$$

Nel caso dei protocolli che utilizzano due nuclidi il prodotto diventa:

$$B'_{Cs}(i) = R(i) \left( \frac{n_1(i)}{n(i)} B_{n_1}(i) + \frac{n_2(i)}{n(i)} B_{n_2}(i) \right).$$

		B(Cs)	B(I)	R(Cs/I)
AL	60	$3.58 \pm 0.13$	$4.20 \pm 0.01$	$0.85 \pm 0.05$
LT	120	$3.98 \pm 0.11$	$4.44 \pm 0.08$	$0.90 \pm 0.04$
MI	242	$3.55 \pm 0.79$	$3.99 \pm 0.08$	$0.89 \pm 0.22$
MT	134	$4.42 \pm 0.05$	$4.74 \pm 0.05$	$0.93 \pm 0.02$
PC	125	$3.50 \pm 0.74$	$4.82 \pm 0.08$	$0.73 \pm 0.17$
PV	134	$3.40 \pm 0.32$	$3.51 \pm 0.05$	$0.97 \pm 0.11$
RM	244	$4.00 \pm 0.79$	$3.61 \pm 0.07$	$1.11 \pm 0.24$
VC	136	$3.22 \pm 0.12$	$3.86 \pm 0.09$	$0.84 \pm 0.05$
PA	26	$1.00 \pm 1.34$	$4.20 \pm 0.10$	$0.24 \pm 0.33$
BO	73	$2.64 \pm 0.75$	$2.54 \pm 0.05$	$1.04 \pm 0.32$
TS	49	$4.40 \pm 0.18$	$5.16 \pm 0.13$	$0.85 \pm 0.06$

Table 14.7: Rapporti tra i parametri  $B$  relativi al  $^{137}\text{Cs}$  e  $^{131}\text{I}$ . Nella seconda colonna è indicato il numero di misure considerate per la relativa provincia.

Nella Tabella 14.7 sono riportati i valori dei rapporti calcolati utilizzando le formule sopraesposte per il metodo "III"; gli stessi valori portano al diagramma di fig. 14.2.

Riportiamo, a titolo di esempio, un grafico (cfr. fig. 14.2) del rapporto  $B_{Cs}/B_I$ , la media pesata è 0.91 e la deviazione standard  $\sigma=0.23$ . Si può vedere che, a parte il valore di Palermo, in tutte le province la differenza tra la media pesata ed il singolo rapporto è inferiore alla deviazione standard. Per tutti gli altri rapporti tra nuclidi diversi ( $B_{Cs}/B_{Ru}$  e  $B_{Cs}/B_{Te}$ ) la situazione è analoga<sup>4</sup>.

### 14.6.2 Stima del tempo di arrivo della nube $\sqrt{C}$

Il parametro  $\sqrt{C}$  fornisce una stima del tempo di arrivo della nube di inquinante in una data località; possiamo presumere che il suo valore non dipenda dal nuclide considerato, in quanto tutti i nuclidi sono miscelati nella nube, ma solo dalla provincia in esame<sup>5</sup>. Se ne può pertanto ricostruire il valore partendo dalla media degli altri nuclidi in esame (metodi I e II) oppure interpolando il valore di  $C$  del singolo nuclide analizzato (metodi III e IV).

In maniera analoga al caso del parametro  $B$ , quando si utilizzano due nuclidi si adotta la media pesata, rispetto al numero di misure, con la formula:

$$C'_{Cs}(i) = \frac{n_{n1}(i)}{n_{TOT}(i)} C_{n1}(i) + \frac{n_{n2}(i)}{n(i)} C_{n2}(i)$$

a cui risulta associato la variabilità:

$$\sigma(i) = \frac{n_{n1}(i)}{n_{TOT}(i)} \sigma_{n1}(i) + \frac{n_{n2}(i)}{n(i)} \sigma_{n2}(i)$$

dove:

$n1, n2$  indicano i nuclidi interessati

$C(i)$  il valore del parametro  $C$  per i nuclidi indicati, calcolato interpolando i dati sperimentali e quello ricostruito, per ogni provincia

$\sigma(i)$  rappresenta la variabilità sulle stime ( $n1, n2$ ) e sulla ricostruzione per ogni data provincia

<sup>4</sup>Ancora una volta il risultato di PA, in fig. 14.2 va utilizzato con cautela, anche perché il numero di dati è estremamente limitato. (cfr. Tabelle 14.5 e 14.6)

<sup>5</sup>In realtà vi è stata una sequenza di esplosioni, ma queste non hanno differenziato in modo significativo le quantità relative dei radionuclidi, in quanto l'evoluzione temporale è misurata in giorni.

$n(i)$  numero di province usate per la misura dei singoli nuclidi ( $n_1, n_2$ ) e numero totale ( $n_{TOT}(i)$ ), valore utilizzato come peso statistico nella stima della media.

Nel caso dell'utilizzo di un solo nuclide (metodi III e IV) vengono assunti, come valore di  $C_{Cs}$  e come variabilità, il valore di C del nuclide utilizzato (Iodio o Rutenio) e la relativa variabilità.

## 14.7 Controllo delle procedure

Una volta elaborata la procedura per la determinazione dei parametri, si è dovuto procedere alla verifica della validità dei protocolli impiegati.

A tutte le province (indipendentemente dalla presenza o meno di dati riguardanti il Cs) si sono applicati i singoli metodi. Chiaramente non in tutte le province e per tutti i nuclidi è possibile applicare tutti i metodi. Le curve elaborate con i parametri così ottenuti sono state confrontate con i dati reali (ovvero le curve ricostruite dai dati sperimentali con il *Single* o *Global Fit*).

Riportiamo a titolo di esempio, nella fig. 14.3a,b, le curve relative alle province di Milano e Roma, quelle con la maggior presenza di dati e quindi di maggior interesse per un confronto. Per ogni figura è sviluppata la banda di variabilità (curve corrispondenti ai valori max e min) e sono puntualmente riportati i dati sperimentali (quadrato nero) con il loro errore (bande verticali). Analizzando tutti i grafici (non solo quelli riportati in figura) si è potuto notare a subito che, generalmente, il "metodo III" offre i risultati migliori; questo è dovuto alla particolare attenzione dedicata al nuclide  $^{131}I$ , a causa della sua pericolosità per l'uomo (in particolare bambini) e quindi alla grande quantità di dati disponibili.

In Tabella 14.8 vengono riportate le ricostruzioni fatte ed il metodo utilizzato; i valori sono immediatamente confrontabili con i dati della Tabella 14.6. Per i casi di RM, VC, BO e TS il metodo III non risulta applicabile.

Come già ripetuto si può notare che le province di Palermo e Trieste hanno problemi di interpolazione a causa della scarsità di misure originali di  $^{137}Cs$  e del loro concentrazione in un intervallo temporale lontano dall'evento.



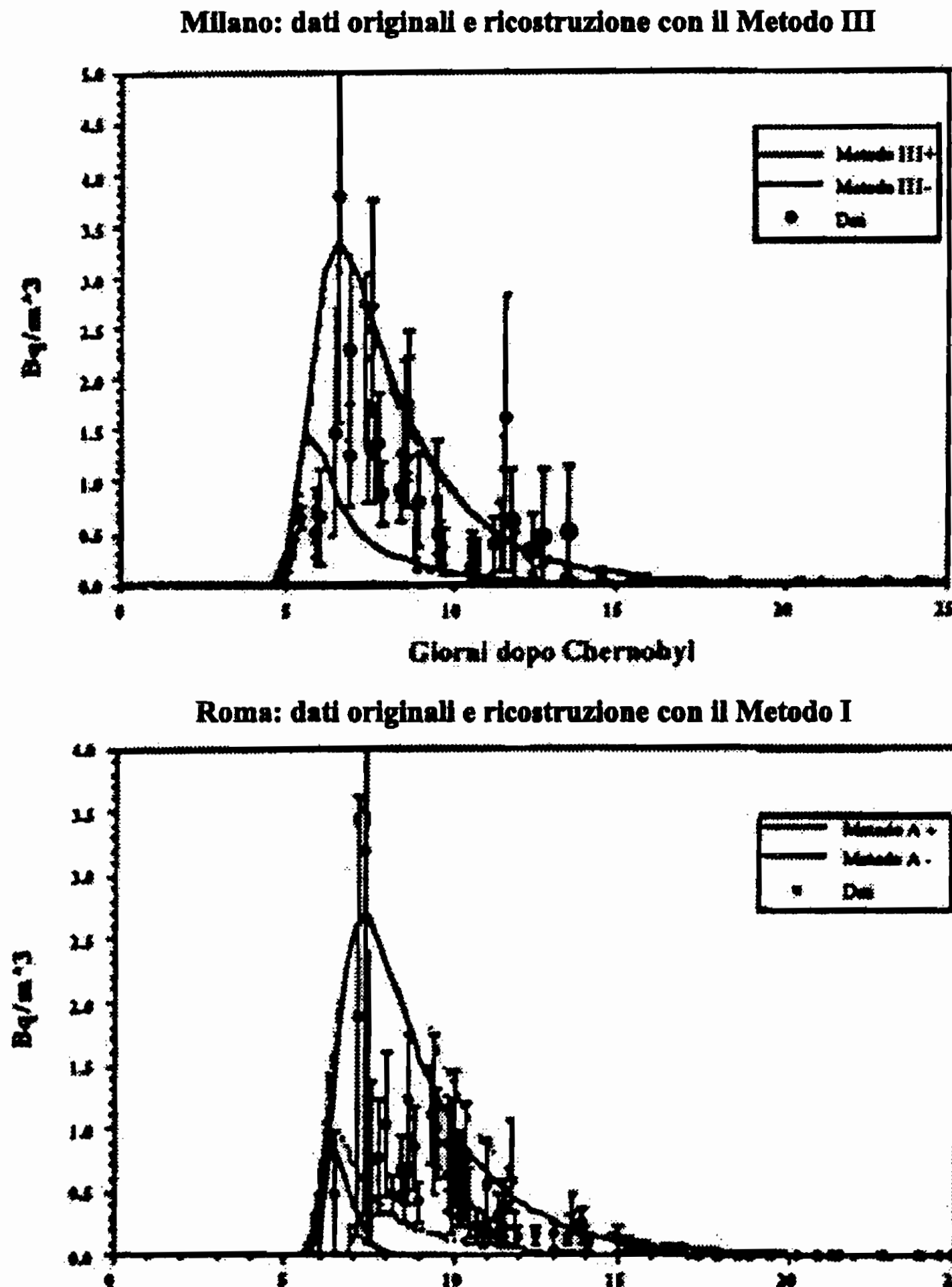


Figura 14.3: Confronto, per la province di Milano e di Roma, tra il comportamento della funzione (14.2) (linea tratteggiata nella prima figura), dati originali (e relativi errori nella prima figura) e ricostruzioni.

In generale quindi, ogni volta che sono presenti misure di  $^{131}I$ , è conveniente utilizzare il "metodo III" per ottenere la miglior stima dell'evoluzione temporale dell'inquinamento da  $^{137}Cs$ . Riportiamo di seguito un "riassunto" di come vengono ottenuti i parametri nei 4 protocolli operativi.

#### Metodo I: dati di Cesio da dati di Iodio e Rutenio

Questa combinazione viene applicata alle 10 province in cui sono presenti i dati dei 3 nuclidi. I parametri vengono ottenuti assumendo che: A abbia il valore ottenuto con il *Global Fit*; B venga recuperato come media pesata tra i rapporti relativi allo Iodio e al Rutenio; C sia

Prov.	Met.	Mis.	A	B	C
AL	C	34	$-0.433 \pm 0.004$	$3.84 \pm 0.10$	$49.5 \pm 1.10$
LT	C	73	$-0.433 \pm 0.004$	$4.06 \pm 0.08$	$70.7 \pm 0.29$
MI	C	160	$-0.433 \pm 0.004$	$3.65 \pm 0.08$	$28.1 \pm 0.93$
MT	C	68	$-0.433 \pm 0.004$	$4.33 \pm 0.05$	$46.0 \pm 0.36$
PC	C	75	$-0.433 \pm 0.004$	$4.40 \pm 0.08$	$65.6 \pm 0.54$
PV	C	58	$-0.433 \pm 0.004$	$3.21 \pm 0.05$	$32.8 \pm 0.52$
RM	A	231	$-0.433 \pm 0.004$	$3.26 \pm 1.00$	$41.1 \pm 0.90$
VC	A	115	$-0.433 \pm 0.004$	$3.38 \pm 0.93$	$24.4 \pm 0.22$
PA	C	12	$-0.433 \pm 0.004$	$3.84 \pm 0.10$	$26.7 \pm 45.1$
BO	B	62	$-0.433 \pm 0.004$	$3.10 \pm 1.19$	$68.0 \pm 0.66$
TS	D	23	$-0.433 \pm 0.004$	$4.74 \pm 0.09$	$46.3 \pm 59.9$

Table 14.8: Ricostruzione dei parametri secondo il metodo scelto

calcolato come media pesata tra i valori di C per lo Iodio e il Rutenio.

#### **Metodo II: dati di Cesio da dati di Iodio e Tellurio**

La località a cui si può applicare questo metodo sono 8. In particolare in questo caso: A ha il valore ottenuto con il *Global Fit*; B viene recuperato come media pesata dei rapporti tra Iodio-Cesio e Tellurio-Cesio; C è calcolato come media pesata tra i valori di C per lo Iodio e il Tellurio.

**Metodo III: dati di Cesio da dati di Iodio** Questo metodo, applicabile a 10 province, utilizza solo i dati di Iodio, che risultano essere i più numerosi. Precisamente: A ha il valore ottenuto con il *Global Fit*; B risulta essere semplicemente la media dei rapporti Iodio-Cesio per il valore di B relativo alla provincia valutata; C è assunto uguale al valore calcolato per lo Iodio in una data provincia.

**Metodo IV: dati di Cesio da dati di Rutenio** Questo metodo viene applicato a 10 province, ma risulta di particolare interesse riferito soprattutto al caso di Trieste.

Anche in questo caso la ricostruzione è particolarmente semplice grazie all'utilizzo di un solo nuclide ed in pratica ricalca la procedura del metodo III. **Province senza dati di  $^{137}\text{Cs}$**  Avendo verificato che il "metodo III" è quello che fornisce i risultati migliori, possiamo pensare di applicarlo a quelle province (Caserta, Genova, Padova e Pisa) dove,

per la scarsità o mancanza di misure di  $^{137}\text{Cs}$ , non è possibile descrivere l'arrivo dell'inquinante con procedimenti di interpolazione.

Il valore del parametro C per la provincia di Caserta è stato valutato con il "metodo IV", in quanto l'uso delle misure di I nel single fit fornisce risultati non attendibili. In Tabella 14.9 sono riportati i parametri A, B e C e l'algoritmo utilizzato. Nelle fig. 14.4 e 14.5 le curve di 2 province.

Prov	Metodo	A	B	C
CE	D	$-0.433 \pm 0.004$	$1.02 \pm 0.002$	$42.5 \pm 0.3$
GE	C	$-0.433 \pm 0.004$	$2.25 \pm 0.04$	$32.2 \pm 0.3$
PD	C	$-0.433 \pm 0.004$	$3.97 \pm 0.09$	$40.5 \pm 0.1$
PI	C	$-0.433 \pm 0.004$	$2.40 \pm 0.02$	$82.2 \pm 0.6$

Table 14.9: Ricostruzione dei parametri A, B e C per le 4 province in cui non sono disponibili i dati relativi al Cesio.

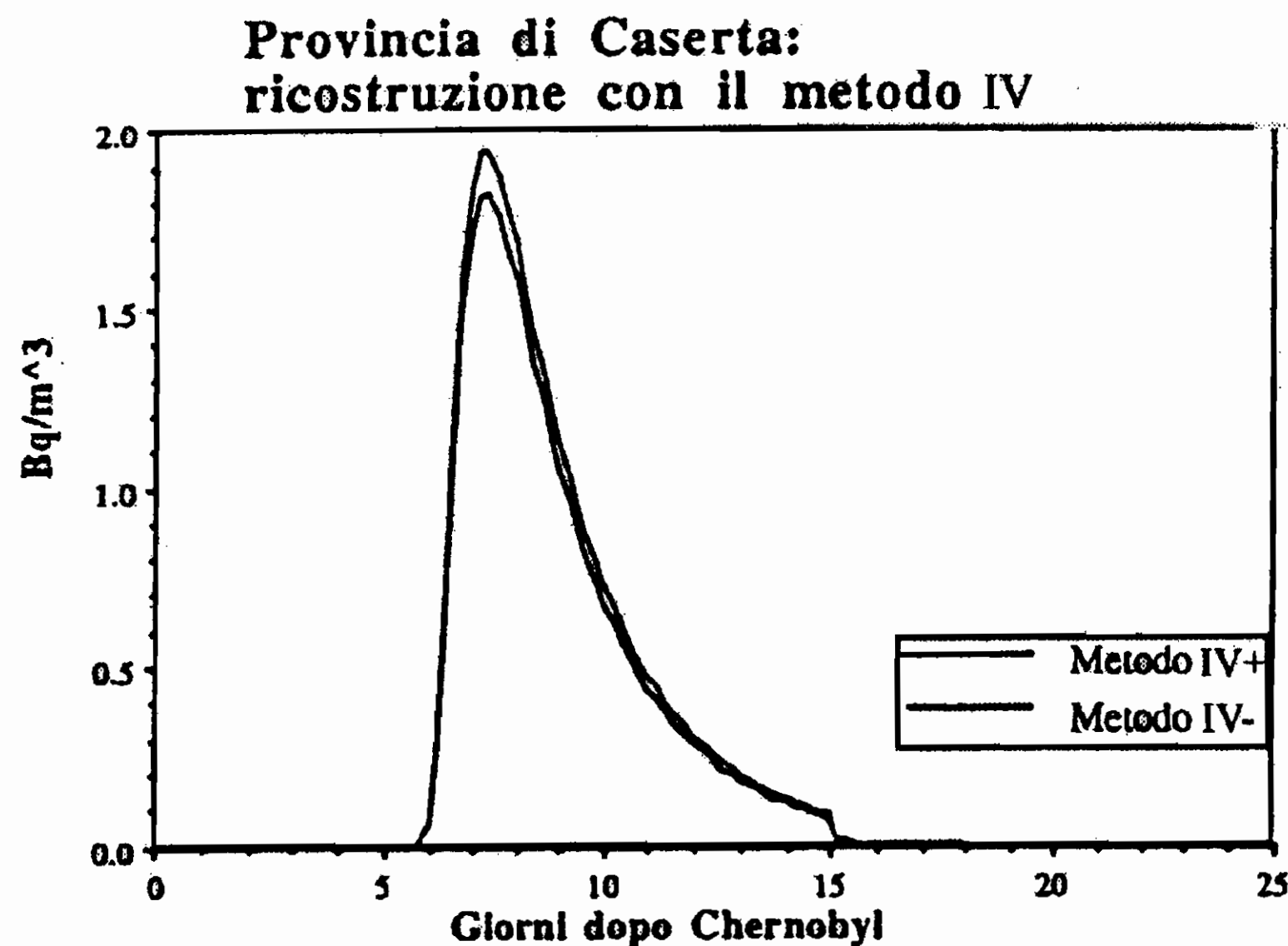


Figura 14.4: ricostruzione con i parametri ottenuti con il metodo IV per la provincia di Caserta.

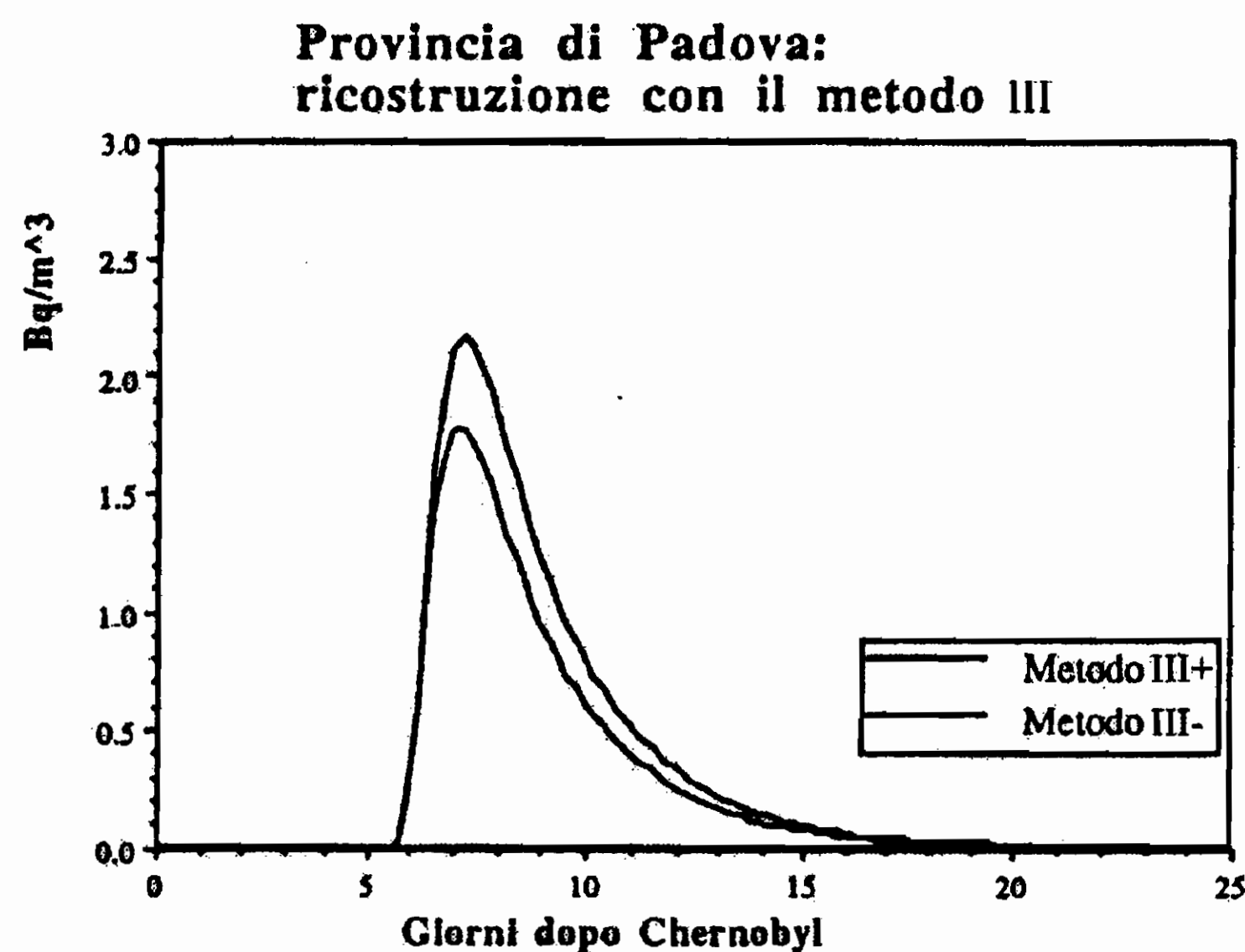


Figura 14.5: ricostruzione con i parametri ottenuti con il metodo III per la provincia di Padova.

## 14.8 Simulazione per il Nord Italia

Finalmente siamo in grado di formulare un modello frattale, avendo accumulato una quantità decente di dati mediante il recupero delle "pseudomisure" effettuata nel § precedente.

Dopo aver ricostruito le curve di arrivo del  $^{137}\text{Cs}$ , si può procedere ad una simulazione dei livelli di inquinamento in aria nel nord Italia. Al sud la simulazione è impossibile in quanto non si riesce ad ottenere una quantità soddisfacente di misure. Nel paragrafo 14.4 si è già esposto come questa tecnica sia particolarmente indicata in questo frangente. Il modello utilizza la teoria "Fractal Sum of Pulses" (FSP, somma frattale di impulsi) descritta nel capitolo 6 integrato da un originale metodo probabilistico per legare la simulazione ai dati sperimentali.

### 14.8.1 Dati utili e zona della simulazione

Il modello, grazie all'utilizzo di "pseudomisure" estrapolate dall'equazione (14.2), permette di tentare una simulazione della concentrazione in aria di  $^{137}\text{Cs}$  in tutto il nord

Italia, compreso tra le latitudini  $43^{\circ}50'$  e  $46^{\circ}50'$  N e le longitudini  $7^{\circ}00'$  e  $14^{\circ}00'$ E. Si può così passare dai dati provenienti da 10 province (circa  $22000\text{Km}^2$ ) alla descrizione di ben 49 province ( $133000\text{Km}^2$  circa). Il lavoro più laborioso è stato elaborare al computer i confini del Paese e le sue carte.

In questi limiti geografici viene "costruita" una griglia geometrica arbitraria in cui ogni cella, identificata da latitudine e longitudine, ha una dimensione di  $4\text{Km} \times 5\text{Km}$ , che può essere variata a piacere. Il modello fornisce per ogni cella un valore di inquinamento "al giorno". Ad ogni cella va inizialmente assegnato un valore "guida", legato alla concentrazione di inquinante. I dati sperimentali però coprono solo 10 province su 49, si può, pertanto, procedere nel seguente modo.

Ad ognuna delle 10 stazioni originali viene assegnata un'area geografica di pertinenza definita su un algoritmo di minimizzazione delle distanze che porta al risultato della Fig. 14.6. PV e PC sono le 2 sole province totalmente confinate. A tutte le celle appartenenti alla stessa area viene assegnato il valore di  $^{137}\text{Cs}$  calcolato con l'eq. (14.2) nella stazione originale, valore che varia a seconda dell'istante considerato. Questa soluzione porta ad attribuire il valore misurato per una provincia ad una zona molto più ampia; è però importante sottolineare che questo accorgimento non viene utilizzato per la descrizione del fenomeno, ma solo come passo iniziale del modello monofrattale.

## 14.8.2 Modello monofrattale

Come nel caso trattato nel Cap.13, per la valutazione della distribuzione in aria delle sostanze radioattive si può utilizzare il modello delle "somme frattali di impulsi" ("Fractal Sum of Pulses").

In questo caso, però, il modello è sviluppato in uno spazio tridimensionale in cui due coordinate sono spaziali (latitudine e longitudine) e una temporale (giorni dall'incidente) e, poiché, la risoluzione temporale è soltanto di un giorno, il tempo viene fatto variare senza fluttuazioni orarie. Dal momento che il principale mezzo di trasporto di radionuclidi inquinanti è costituito dalle nubi si è scelto di impiegare impulsi a forma di bolla i quali si sono dimostrati estremamente efficaci per simulare le caratteristiche del campo (cfr. fig.13.8).

La generazione degli impulsi è stata fatta con le stesse modalità utilizzate per il caso di Seveso (vedi §13.5). Per la corretta generazione

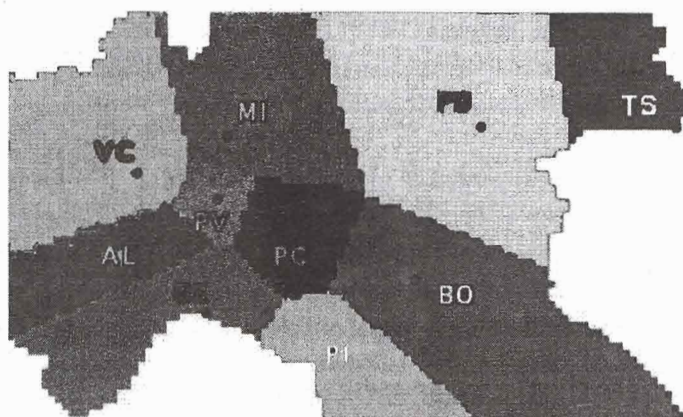


Figura 14.6: Bacini di pertinenza per la simulazione monofrattale.

bisogna, di nuovo, calcolare la dimensione frattale del processo. Ancora una volta possiamo riferirci alle nubi e alla pioggia, anche perché, nel caso di Chernobyl, la concentrazione in aria di nuclidi è stata sufficientemente bassa da non aver influito nei processi di condensazione e formazione della pioggia. Possiamo quindi assegnare a  $D$  il valore 1.67, uguale a quello calcolato per le distribuzioni di nubi [140]. Essendo unico il valore assunto per la dimensione frattale il modello è, ancora, monofrattale.

Tenendo conto della coordinata temporale, i campi sui quali distribuire gli impulsi diventano tridimensionali e i dati sperimentali possono, anche in questo caso, guidare la simulazione. Si tenga presente che il numero degli impulsi da generare viene fissato attraverso un parametro di copertura legato alla densità delle stazioni di rilevamento disponibili<sup>6</sup>.

Il campo simulato  $R(i,j,k)$ , ottenuto dalla sovrapposizione degli impulsi primari, viene normalizzato imponendo che la concentrazione media (in ciascun bacino di pertinenza), calcolata effettuando una media integrale (spaziale) della concentrazione di radioattività ricostruita

<sup>6</sup>Avendo usato i dati delle province elencate nelle Tabelle 14.8 e 14.9.

$R(x,y,t)$ , ad un dato istante, coincida con quella calcolata per il campo originale  $O(x,y,t)$  nella regione corrispondente.

### 14.8.3 Risultati finali per il Nord Italia

Una descrizione qualitativa delle previsioni dell'inquinamento nel nord Italia può essere fatta semplicemente guardando la Fig. 14.7. La distribuzione  $R(i,j,k)$  viene rappresentata come una superficie tridimensionale: gli assi  $x$  e  $y$  (latitudine e longitudine) corrispondono agli indici  $i$  e  $j$ , mentre sull'asse  $z$  viene riportata la concentrazione di  $^{137}\text{Cs}$  in aria, generata (o meglio stimata) in  $\text{Bq}/\text{m}^3$ . Le figure illustrano l'evoluzione del fenomeno in giorni diversi; si può notare come la simulazione parte da una situazione "piatta" di quasi totale assenza di inquinanti, raggiunge un massimo dopo circa 8 giorni dall'incidente per poi tornare ai livelli iniziali all' 11° giorno. Questa stima però non è sufficiente per rendere utile il modello. Diventa necessario lo sviluppo di una tecnica che permetta di validare il modello o di confrontare quantitativamente la previsione e i dati sperimentali. Le curve utilizzate come base per la modellazione si riferiscono al capoluogo che corrisponde ad una cella della matrice di simulazione. Per effettuare il confronto con i dati sperimentali (o le pseudomisure ricostruite), evitando la "predominanza" di una particolare cella, si assume il valore del campo  $R(i,j,k)$  integrato su un quadrato di 9 celle (corrispondente quindi ad un'area di circa 12 km x 15 km) centrato nel sito S del luogo di misura effettiva. La stima dell'incertezza in queste condizioni può risultare complicata, ma si può adottare una procedura statistica non convenzionale. Si effettuano 10 simulazioni col modello monofrattale, ignorando tra i dati iniziali, di volta in volta, quelli relativi ad una provincia; si ottengono così 10 insiemi di dati generati da simulazioni differenti. Viene quindi valutata la dispersione dei valori calcolati dai 10 data set, relativi ad una data provincia  $i$ , rispetto al valore stimato utilizzando la simulazione completa, mediante la seguente formula:

$$\sigma_i(t) = \frac{\sqrt{\sum_{prov} (x_i^{TOT} - x_i^{prov})^2}}{10} \quad (14.3)$$

dove:

$i$  = indice relativo ad una data provincia ( $i=1..49$ );

del nord Italia solo in 6 sono presenti dati sperimentali (ed in altre 4 è possibile ottenere "pseudomisure"), è ragionevole ritenere accettabile un'incertezza temporale di un giorno sui dati. Nelle figure 14.8 e 14.9 sono mostrati i confronti tra i dati simulati (quadrati) e le misure sperimentali (triangoli) su cui sono state interpolate le curve temporali. Si può notare un buon accordo tra le due serie di valori e verificare che la simulazione fornisce una stima della quantità di  $^{137}\text{Cs}$  anche nei giorni in cui non sono disponibili informazioni.

Il raffronto più interessante, e confortante, è quello della provincia di Milano dove le misure sperimentali sono numerose (82): l'accordo è decisamente soddisfacente. Per i dati di Pavia, in un solo punto (7 giorni dopo l'incidente) vi è una discrepanza fra i due valori (sottostima del modello di un fattore 5 circa); peraltro il giorno seguente la situazione si presenta invertita con una sovrastima da parte della simulazione. Tenuto conto dell'incertezza di un giorno tale differenza risulta accettabile.

Le discrepanze maggiori sono rilevabili nei primi giorni dopo l'incidente; questo è un errore sistematico da attribuire al modello; infatti gli impulsi utilizzati sono di forma simmetrica, rispetto alle coordinate temporali, per cui realizzano un effetto di "smoothing" che tende a nascondere il rapido incremento che ha caratterizzato il fenomeno nei giorni 5-6 dopo l'incidente. Come già accennato il modello può essere utilizzato per fornire una stima dei livelli di inquinamento nelle 39 province in cui non sono disponibili misure di alcun tipo. Nella fig. 14.9 sono mostrati, a titolo di esempio, i dati simulati in 8 delle suddette province.

#### 14.8.4 Confronto con i dati del J.R.C. di Ispra

I dati raccolti, con particolare accuratezza, dal J.R.C. di Ispra (VA), utilizzati spesso come verifica dei modelli previsionali di inquinamento, non sono stati messi a disposizione per l'analisi mediante il modello monofrattale, ma usati dal centro della Unione Europea come test di validazione del modello.

Nella provincia di Varese (ed escusivamente in essa, precisamente ad Ispra) il centro europeo eseguì delle misure ogni 2 ore, fornendo 12 misure ogni 24 ore. Si può osservare (vedi fig. 14.10) che di dati sperimentali (cerchi vuoti) sembrano suggerire un arrivo dell'inquinante in due momenti successivi (all'interno di una giornata circa); tale



situazione potrebbe essere descritta con una funzione a più picchi derivata dalla (14.2). Questi dati non sono direttamente confrontabili con la simulazione, in quanto le informazioni usate nell'applicazione del modello monofrattale sono "tutte" mediate su 24 ore; pertanto non avranno mai una risoluzione temporale compatibile con le 2 ore dei dati di Ispra, risoluzione che è un'ordine di grandezza inferiore. I dati della simulazione (quadrati pieni) descrivono in maniera corretta il primo arrivo e i corrispondenti valori di picco. La simulazione monofrattale perde completamente il secondo picco, 11 giorni dopo l'incidente. L'autore ritiene che questa perdita sia dovuta ad un comportamento pregiudiziale dei responsabili dei centri di misura, non particolarmente professionali, influenzati dalla preoccupazione di dichiarare esaurito l'effetto dovuto all'incidente (si vedano le fig. 14.8 e 14.9, tutte con valori di inquinamento ormai in esaurimento). Solo il centro di Ispra che è un centro scientificamente di altissima qualità, si è preoccupato "esclusivamente" di raccogliere dati senza pregiudizi.

## 14.9 Deposizione al suolo di $^{137}\text{Cs}$ in Europa

In questo paragrafo viene illustrata una procedura utile per descrivere e simulare la deposizione di  $^{137}\text{Cs}$  cumulata al suolo in Europa, dovuta all'incidente nucleare di Chernobyl.

L'estrema variabilità del fenomeno e lo sfavorevole rapporto tra base campionata e superficie descritta non permettono un'accurata analisi con i metodi statistici classici. L'approccio multifrattale permette di tentare una simulazione del processo partendo dai pochi dati di posizione ed intensità. Inoltre, il metodo descritto, permette un infittimento del campo di misure completamente diverso da quello ottenibile con un'analisi statistica classica.

Il modello si basa sull'utilizzo della teoria FSP (cfr. §14.8) combinato con un originale metodo di campi di "potenziale" e una ricostruzione casuale di "networks" geometricamente correlati alle caratteristiche frattali dei dati.

I dati utilizzati provengono, anche in questo caso, dall'archivio informatico R.E.M. del JRC di Ispra e sono stati sottoposti al "controllo di qualità" illustrato nel §14.3.

Si può osservare, dalla Tabella 14.4, come le misure di deposizione al suolo siano scarse rispetto alla superficie delle singole Nazioni. Ad esempio, per l'Austria sono presenti solo 97 misure su un'area di  $120000\text{km}^2$ : un numero di poco superiore alle misure di concentrazione in aria di  $^{137}\text{Cs}$  della sola provincia di Milano, che sono 82 su una superficie di  $2762\text{km}^2$ . Per rendere significativa l'analisi multifrattale è necessario che il numero di dati disponibile sia sufficientemente alto, circa 100, pertanto si è deciso di applicarla solo ai paesi indicati con un asterisco nella Tabella 14.4.

L'analisi multifrattale si sviluppa in due direzioni: da un lato si ricercano i parametri caratteristici della sparsità geometrica (geografica) delle misure [1], dall'altra si studia la distribuzione statistica del fenomeno [73].

### 14.9.1 Analisi geometrica

L'indagine "geometrica" viene effettuata calcolando la dimensione frattale dell'insieme di stazioni che presentano un valore di radioattività superiore ad una soglia fissata  $T$ ; tali valori consentono di ottenere la funzione che rappresenta lo "spettro" della dimensione frattale per i diversi livelli di inquinamento.

L'approccio multifrattale consente di rispettare la caratteristica che i siti con livello di inquinamento più basso sono distribuiti (spazialmente) in maniera più uniforme rispetto agli "hot spots" che sono più rari; inoltre esso può caratterizzare numericamente il fenomeno.

La figura 14.11 mostra i risultati ottenuti per 3 nazioni: Austria, Irlanda e Italia. L'andamento dei fenomeni frattali è pesantemente condizionato dalle condizioni climatiche e meteorologiche che si sono succedute nei diversi Paesi durante il processo di deposito al suolo del nuclide  $^{137}\text{Cs}$ . I valori di soglia variano da  $\sim 70\text{Bq}/\text{m}^2$  per l'Austria a  $\sim 35\text{Bq}/\text{m}^2$  per l'Italia (protetta parzialmente dalle Alpi) a  $\sim 6,5\text{Bq}/\text{m}^2$  in Irlanda, decisamente decentrata e protetta dalle correnti del Golfo che fa soffiare i venti prevalentemente da ovest verso est.

### 14.9.2 Analisi statistica

I dati raccolti sono stati sottoposti ad un'indagine in termini di multifrattali stocastici per accertare se l'intensità "I" del fenomeno

(ovvero la deposizione cumulata al suolo misurata in  $Bq/m^2$ ) mostra, asintoticamente, una distribuzione iperbolica in accordo con la relazione di scaling multiplo della distribuzione di probabilità PDMS del capitolo 7:

$$Pr(I > i) \propto i_i^{-C(i)} \quad (14.4)$$

dove  $C(i)$  rappresenta la funzione codimensione frattale. Questa distribuzione è associata alla proprietà di scaling tipico indizio della (multi)frattalità del fenomeno.

Le figure mostrano in scala bilogaritmica la distribuzione iperbolica delle misure sperimentali di alcune nazioni europee; si può osservare che i dati esaminati seguono, almeno asintoticamente, la distribuzione data dalla (14.4).

### 14.9.3 Modello multifrattale stocastico

Le analisi descritte nel § precedente forniscono una conferma sperimentale dell'ipotesi di multifrattalità della deposizione al suolo di  $^{137}Cs$  nei diversi paesi europei. Dai dati sono state estratte informazioni (spettro della dimensione frattale e parametro di iperbolicità) che, oltre a caratterizzare ciascun campione statistico, forniscono una base per sviluppare il metodo di simulazione multifrattale.

L'algoritmo elaborato, come nel caso del nord Italia, si basa sulla teoria FSP per ricreare le fluttuazioni e di un modello di ricostruzione del network, basato sui voli di Lévy (cfr. cap. 8), per riprodurre le caratteristiche "geografiche" dei dati sperimentali.

Il primo passo consiste nella generazione di una serie di impulsi la cui distribuzione riproduce quella iperbolica dedotta dall'analisi statistica. Questi impulsi vengono quindi disposti in una matrice di simulazione. Per "guidare" la crescita del fenomeno, la distribuzione spaziale delle "bolle" viene fissata in maniera tale che impulsi di intensità  $T$  siano disposti su un network di codimensione frattale  $c(i)$ . Infine le singole realizzazioni di questo processo vengono sommate fino a quando viene soddisfatto un criterio (arbitrario) di accordo con i dati sperimentali; il campo simulato viene quindi opportunamente normalizzato.

#### 1- Utilizzo dei dati

Le misure, provenienti dai campioni selezionati e rielaborati, vengono sistemate su una griglia di grandezza arbitraria (normalmente  $100 \times 100$  o

50x50) a formare la matrice del campo "originale" di inquinamento che verrà utilizzata per il controllo dei risultati della simulazione.

Poiché la distribuzione dei siti di rilevamento è poco omogenea, è possibile che, durante il processo di discretizzazione, venga assegnata ad una cella più di una stazione di rilevamento; è necessario quindi stabilire un criterio per la scelta del valore di inquinamento da assumere come misura. E' possibile scegliere fra tre criteri che permettono di studiare il fenomeno in tre modi diversi. Le possibili scelte sono: la media, che può risultare in un "appiattimento" delle fluttuazioni e in un campo più "liscio"; il valore integrale che, utilizzando la somma di tutti i valori, mantiene la complessità del fenomeno anche se potrebbe nascondere le intensità minori; il valore massimo, che potrebbe far sì che i valori più bassi siano ignorati.

Non esiste una solida teoria che permetta di stabilire quale scelta sia migliore; per ragioni di semplicità, nel seguito si illustrano i risultati ottenuti con il criterio della media.

## 2- Generazione di network e di impulsi primari

Come nel caso del modello monofrattale del nord Italia, non è possibile ricreare un network totalmente fittizio, ma è necessario "guidare" la crescita della simulazione in accordo con la distribuzione spaziale dei dati sperimentali.

L'idea che sta alla base del modello dei "potenziali" è che l'influenza di ogni misura sia proporzionale al suo valore; l'influsso viene esercitato all'interno di un "bacino" la cui ampiezza può essere debitamente modulata, attraverso un parametro libero, in base alla densità dei dati sperimentali nella zona in esame. Il potenziale generato da una singola stazione risulta:

$$V(r) = \begin{cases} V(0)\left(1 - \frac{|r|}{R}\right) & \text{per } |r| \leq R \\ 0 & \text{per } |r| \geq R \end{cases} \quad (14.5)$$

dove  $V(r)$  è il valore del potenziale alla distanza  $r$  (in coordinate polari) dal sito della misura,  $V(0)$  l'intensità della radioattività misurata nella località considerata e  $R$  il parametro libero che controlla l'ampiezza dell'area influenzata.

Il potenziale così generato risulta un cono lineare la cui ampiezza viene modulata dal parametro  $R$ , questa scelta permette di evitare i problemi di divergenza nell'origine caratteristici, per esempio, di un potenziale di tipo elettrostatico.

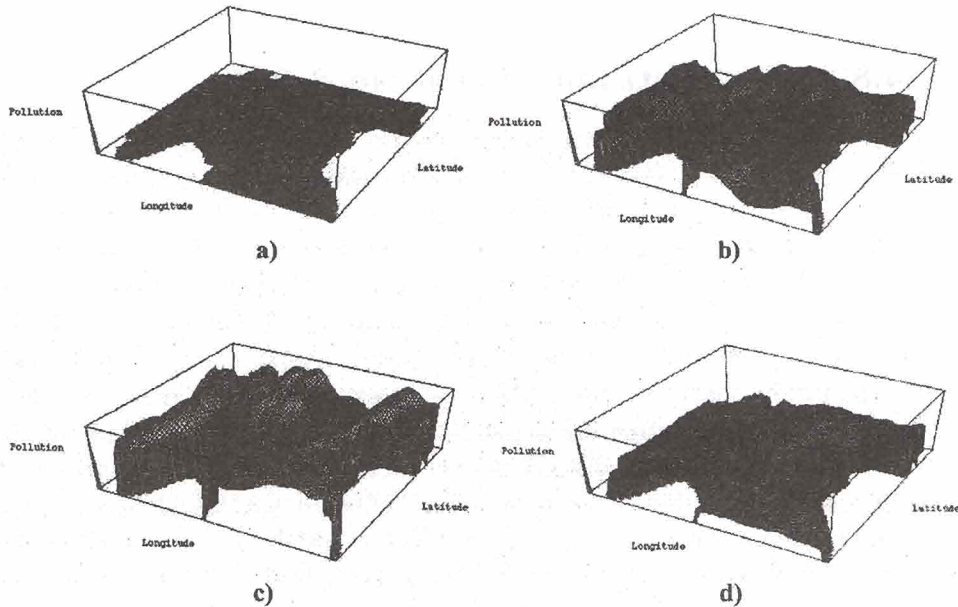


Figura 14.7: Concentrazioni in aria di  $^{137}\text{Cs}$  4, 6, 8 e 10 giorni dopo l'incidente di Chernobyl (concentrazione inversamente proporzionale al grado di nero).

$\sigma_i(t)$  = incertezza di ogni previsione ad un dato istante  $t$ ;

$x_i^{prov}$  = previsione all'istante  $t$  della simulazione, generata senza la provincia "prov", relativa alla provincia  $i$ -esima;

$x_i^{TOT}$  = previsione del modello completo all'istante  $t$  relativa alla provincia  $i$ -esima.

La formula (14.3) consente quindi di stimare l'incertezza del modello per tutte le province simulate, comprese le 39 di cui non è disponibile alcun dato sperimentale.

E' possibile ora descrivere l'evoluzione temporale della concentrazione in aria di  $^{137}\text{Cs}$ , fornendo una stima dell'incertezza. Tenendo conto della grande disomogeneità dei dati, della scarsa precisione nell'indicazione della data di acquisizione e del fatto che su un totale di 49 province

Il potenziale totale generato dall'insieme delle stazioni sperimentali viene calcolato come somma dei contributi delle singole stazioni, normalizzata tra i valori minimo e massimo del campione statistico usato.

Si passa quindi alla generazione della griglia simulata, che fornisce il supporto spaziale agli impulsi primari. Quest'operazione può essere svolta utilizzando la tecnica dei voli di Lèvy (cfr. cap 8) opportunamente modificata per riprodurre la distribuzione spaziale reale (vedi Fig. 14.12). Per generare la griglia simulata si segue il seguente algoritmo:

1. si seleziona un punto casuale,  $P_1$ , di partenza appartenente alla matrice spaziale;
2. si definisce un vettore di spostamento  $\mathbf{v}$  di fase  $\theta$ , non scelta arbitrariamente da una distribuzione uniforme come nei voli di Lèvy classici, ma utilizzando i potenziali sopra descritti come distribuzione di probabilità e con modulo  $L$  estratto casualmente da una distribuzione iperbolica

$$Pr(L > l) \propto l^{-D_i}$$

dove  $D_i$  è la dimensione frattale ricavata dal valore  $C(i)$  per quel determinato valore della soglia;

3. il vettore  $\mathbf{v}$  viene applicato in  $P_1$  e, con la fase  $\theta$ , definisce il punto  $P_2$

Si iterano quindi i passi 2 e 3 per ottenere gli altri punti.

Utilizzando questo processo nella griglia originale si otterrebbe un effetto di "confine", cioè un accumulo lungo i lati della matrice, pertanto si opera su una matrice molto più estesa eliminandone, alla fine, la "cornice" che eccede le dimensioni della matrice geografica originale.

In precedenza è stata stimata la dimensione frattale  $D_i$  relativa ad un dato valore di soglia; utilizzando l'algoritmo appena esposto si riesce quindi a guidare il vettore  $\mathbf{v}$  in maniera che venga "attratto" dai punti che nella distribuzione sperimentale hanno la stessa intensità di inquinamento.

Si può passare ora alla generazione degli impulsi primari che sono funzioni gaussiane con intensità  $I$  scelta casualmente secondo la distribuzione (14.4) e la cui ampiezza è un parametro libero da fissare opportunamente. In dettaglio, viene seguita la seguente procedura:

- l'intervallo tra i valori minimo e massimo dell'inquinamento  $[Poll_{min}, Poll_{max}]$  viene suddiviso in sottointervalli arbitrari  $S_n$ ;
- viene generata una serie di impulsi  $P_j$  di intensità  $I_j$  in accordo con la (14.4), che viene considerata completa quando in ciascuna soglia  $S_n$  è presente almeno un valore  $I_j$ ;
- viene realizzata una serie di reticoli-griglie  $N_n$  ciascuno di dimensione frattale corrispondente a quella della soglia  $D_n = D_F(S_n)$ ;
- ciascun impulso  $P_j$  viene disposto su tutti i punti del network  $N_j$  corrispondente alla dimensione frattale  $D_j = D_F(I_j)$  e sommato all'interno di una matrice di simulazione.

Questa procedura porta alla situazione illustrata in figura 14.13.

#### 14.9.4 Normalizzazione della simulazione

Una singola realizzazione di questa procedura non è però in grado di riprodurre le caratteristiche tipiche dell'inquinamento. Si deve procedere a creare una serie di realizzazioni stocastiche sommando i risultati in una matrice di simulazione ed iterando il processo fino a quando non viene soddisfatto un criterio prestabilito. A questo punto si può procedere alla normalizzazione dei risultati.

Per stabilire il criterio di verifica ci si riferisce, ancora una volta, alla meteorologia ([147], [148], [149], [150]) utilizzando un semplice test empirico simile a quello utilizzato nei confronti tra distribuzioni di pioggia reali e ricostruite. Si ricostruisce un valore di deposizione cumulato per ciascuna delle stazioni di rilevamento calcolando la media integrale della matrice di simulazione in un intorno di 3x3 celle (è possibile scegliere anche intorni con 5 o 7 celle di lato), per evitare che fluttuazioni estreme, localizzate in una singola cella, possano influenzare eccessivamente il confronto. Il criterio adottato consiste nel confrontare i due insiemi di dati (reale e simulato) e calcolare la media delle differenze tra le quantità corrispondenti. Quando il valore così ottenuto scende al di sotto di una soglia fissata (o quando il numero di realizzazioni supera un limite prefissato) la simulazione si arresta.

La normalizzazione della matrice di simulazione avviene imponendo che la media delle differenze tra le quantità di radioattività ricavata dai dati sperimentali disponibili e quella simulata sia nulla.

Grazie alla matrice di simulazione è possibile "riempire i buchi" della rete geografica delle misure sperimentali, cioè fornire una stima della quantità di inquinamento in quelle località prive di misure reali.

In figura 14.14 è presentato il campione delle misure originali e la simulazione realizzata nel caso dell'Austria.

### 14.9.5 Confronto con i dati reali

Il confronto tra i dati sperimentali e quelli prodotti dal modello multifrattale viene condotto in due direzioni: esame della distribuzione multifrattale e confronti per diverse scale di aggregazione.

Nel primo caso i valori del campo simulato vengono sottoposti ad analisi multifrattale stocastica. Questo esame consente di verificare se il modello riproduce le caratteristiche statistiche di distribuzione iperbolica dell'insieme delle misure sperimentali disponibili.

Nella Fig. 14.15, relativa all'Austria, si può verificare che le distribuzioni dei dati simulati riproducono con buona approssimazione quelle dei dati sperimentali di cumolazione al suolo utilizzati nel modello. Nel secondo caso, invece, vengono calcolati i valori simulati della deposizione cumulata in ciascuna cella in cui è presente almeno una misura sperimentale, valutando la media integrale su "intorni" di grandezza crescente ( $1 \times 1$ ,  $3 \times 3$ ,  $5 \times 5$ ,  $7 \times 7$  e  $9 \times 9$  celle) della località in esame. Si calcolano quindi, per diverse scale di aggregazione, la media  $\delta$  e la relativa deviazione standard  $\sigma$  delle differenze tra i valori e le misure sperimentali di deposizione al suolo. I valori ottenuti per l'Austria sono riportati in tabella 14.10.

La grandezza  $\delta$  fornisce un'indicazione dell'omogeneità del valor medio del campo simulato con le misure sperimentali. All'aumentare del campo simulato preso in considerazione per il raffronto (ovvero aumentando la scala di aggregazione), si può osservare che  $\delta$  parte da un valore nullo corrispondente alla scala di aggregazione utilizzata nella normalizzazione e non se ne discosta molto; la variazione è inferiore a  $1 \text{ Bq/m}^2$ .

Il valore  $\sigma$ , piuttosto alto, deve essere interpretato come una verifica della capacità del modello di riprodurre le fluttuazioni non benigne e



gli hot spots caratteristici del fenomeno inquinante. La stabilità di  $\sigma$  per diverse risoluzioni consente di ipotizzare che tale valore possa essere utilizzato come stima dell'incertezza per tutti i punti del campo simulato e non solamente per quelli corrispondenti a stazioni di rilevamento. Si può osservare che il valore di  $\sigma$  si arresta intorno al 20% dei valori massimi della simulazione.

Stato	Scala aggr.	$\delta$	$\sigma$
Austria	1x1	-0.10586	26.44
	3x3	0.00000	26.06
	5x5	0.33542	25.88
	7x7	0.62001	25.45
	9x9	0.88739	24.91

Table 14.10: Calcolo di  $\delta$  e  $\sigma$  per il data set completo dell'Austria

### 14.9.6 Analisi di predittività del modello

Per valutare le capacità predittive del modello si realizza una serie di simulazioni utilizzando come dati di partenza dei sottoinsiemi ridotti del data set completo e le si confronta con i risultati ottenuti utilizzando il set completo. Nella fattispecie si sono costruiti 5 insiemi ridotti ciascuno con l'80% dei dati del campione completo, escludendo di volta in volta il 20% dei dati in maniera del tutto casuale, così da mantenere pressoché invariata la distribuzione di probabilità. Per ciascuno dei 5 insiemi si sono applicate le procedure esposte per calcolare i parametri multifrattali (dimensione frattale e parametro di iperbolicità) producendo così 5 simulazioni. I risultati della simulazione vengono quindi confrontati, secondo le linee presentate, con le misure sperimentali di deposizione cumulata. Le figure 14.16-14.17 confrontano le distribuzioni probabilistiche sperimentali e quelle simulate. Si può osservare un buon accordo fra i dati sperimentali e quelli simulati in 4 sottoinsiemi su 5. Il disaccordo del quinto sottoinsieme è legato esclusivamente alla presenza di un ultimo punto a destra dei dati simulati che impone una pertinenza molto minore al fit. D'altro canto a destra ci sono gli "eventi estremi" difficili da simulare.

Sono stati, quindi, calcolati per ciascuno dei 5 insiemi ridotti, i valori di  $\delta$  e  $\sigma$  per crescenti scale di aggregazione. Questi valori sono riportati in Tab. 14.11. Si può osservare che il valore di  $\delta$  rimane inferiore a  $1\text{Bq}/\text{m}^2$  con esclusione di un unico insieme (lo stesso in cui non c'è accordo tra la distribuzione di probabilità dei dati simulati e misure sperimentali). I valori di  $\sigma$  risultano maggiori di quelli calcolati per il campione completo (cfr. tab 14.10) e dimostrano una maggiore variabilità incontrollata del modello nello sviluppo delle fluttuazioni dovuto al minor numero di vincoli (dati sperimentali).

Sottoinsieme	Scala aggr.	$\delta$	$\sigma$
sottoinsieme 1	1x1	0.18327	29.27
	3x3	0.00000	28.10
	5x5	-0.11330	27.69
	7x7	-0.26307	27.51
	9x9	-0.43461	27.40
sottoinsieme 2	1x1	-0.94476	35.09
	3x3	0.00000	34.69
	5x5	-0.09882	34.17
	7x7	-0.25126	33.83
	9x9	-0.08649	33.37
sottoinsieme 3	1x1	0.28647	37.44
	3x3	0.00000	35.33
	5x5	-0.05446	33.69
	7x7	-0.17171	32.39
	9x9	-0.25007	31.16
sottoinsieme 4	1x1	-1.68342	36.42
	3x3	0.00000	33.73
	5x5	0.22724	31.06
	7x7	0.04916	29.15
	9x9	-0.05361	27.74
sottoinsieme 5	1x1	-0.32346	42.64
	3x3	0.00000	40.09
	5x5	0.49585	39.03
	7x7	1.16227	38.55
	9x9	1.58825	38.13

Table 14.11: Calcolo di  $\delta$  e  $\sigma$  per i sottoinsieme ridotti dell'Austria

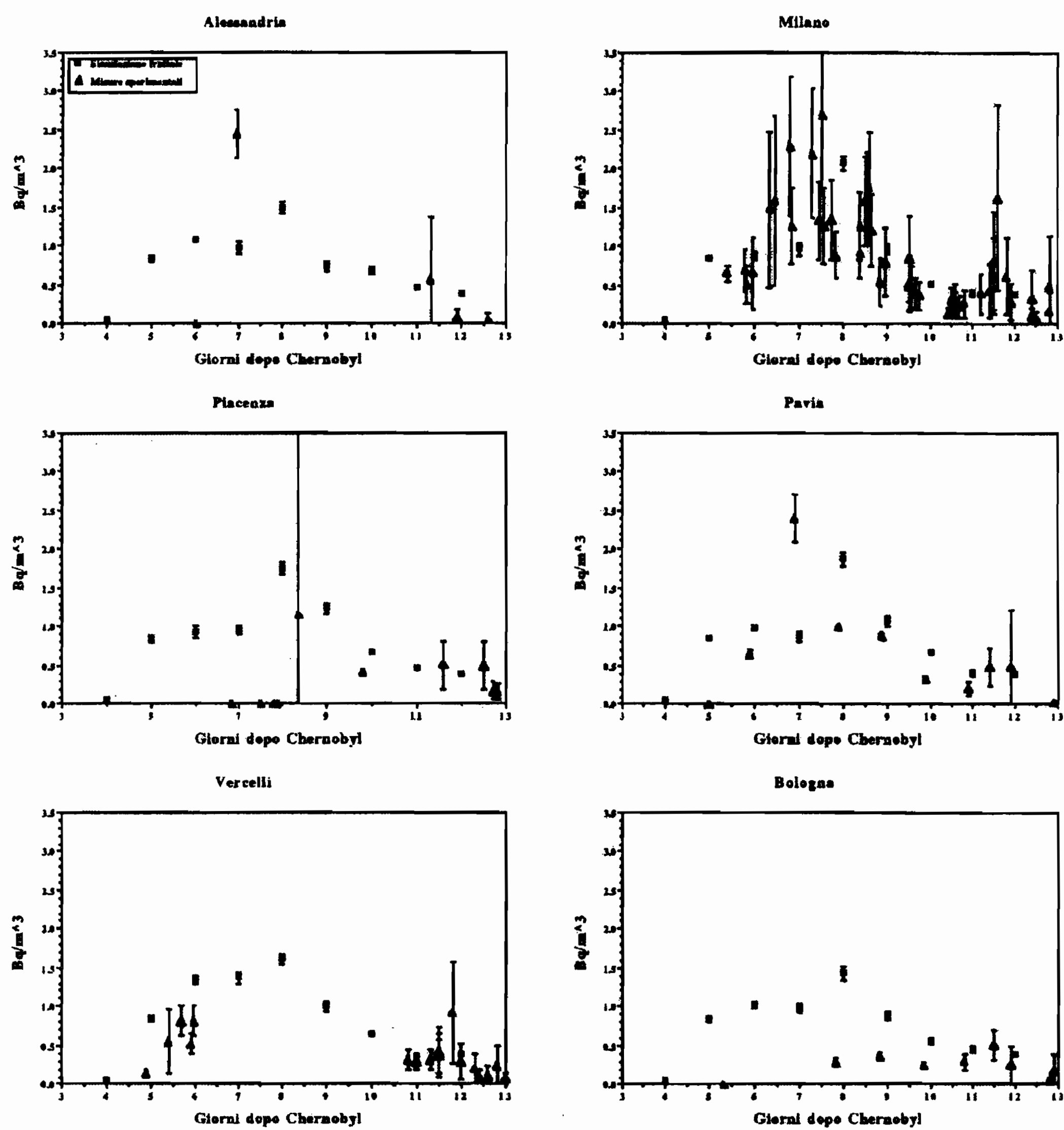


Figura 14.8: Confronto tra i dati simulati (quadrati) e le misure originali (triangoli).

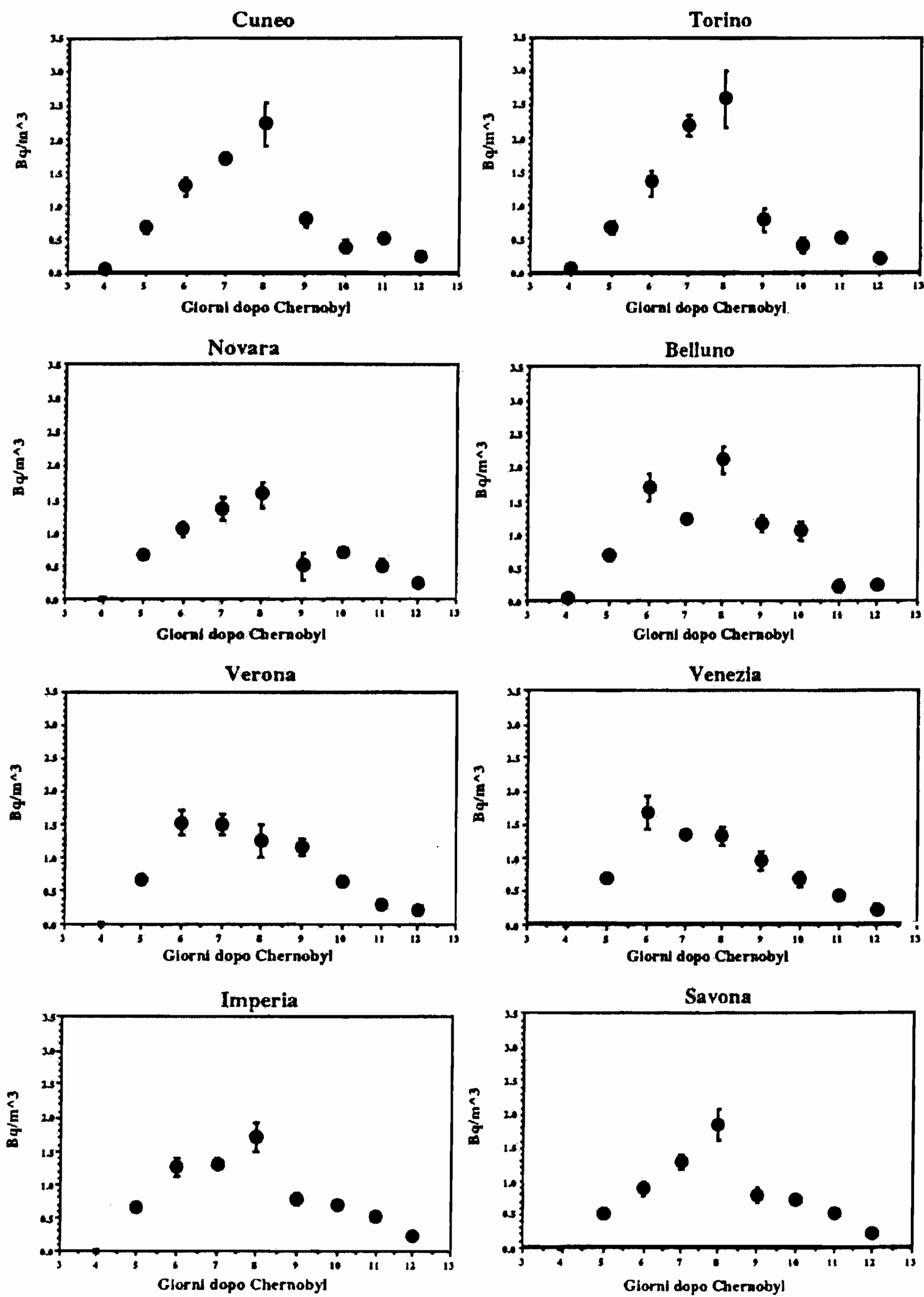


Figura 14.9: Dati simulati relativi ad 8 province senza misure sperimentali

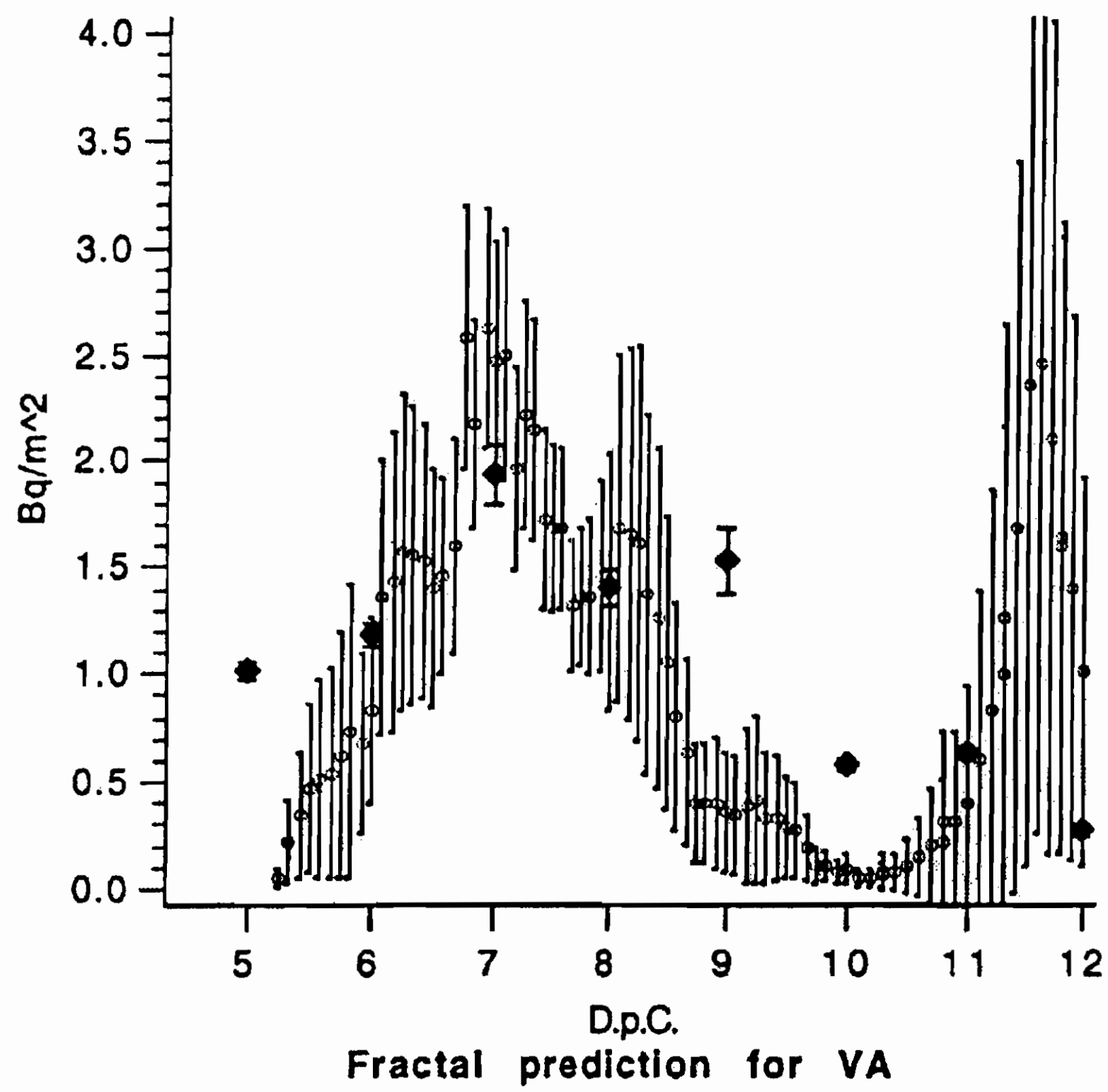


Figura 14.10: Confronto tra il data set raccolto dal J.R.C. nella provincia di Varese (cerchi vuoti) e modello monofrattale (quadrati pieni)

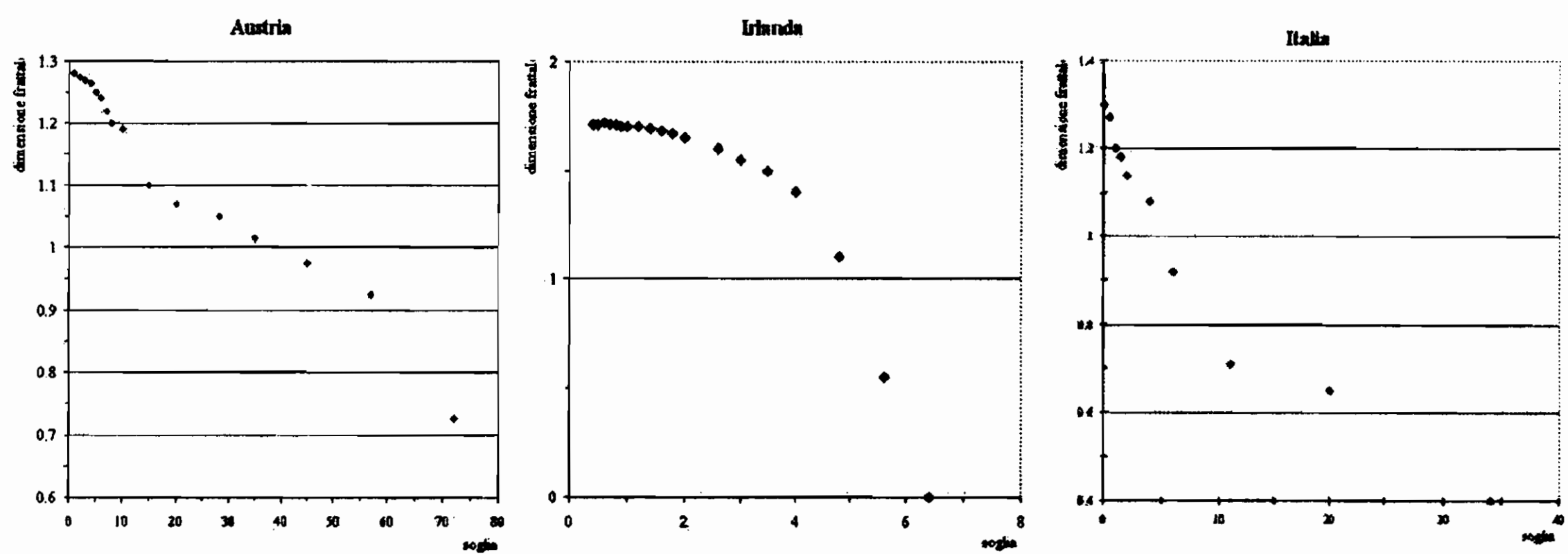


Figura 14.11: Spettro della dimensione frattale per i dati dell'Austria, dell'Irlanda e dell'Italia

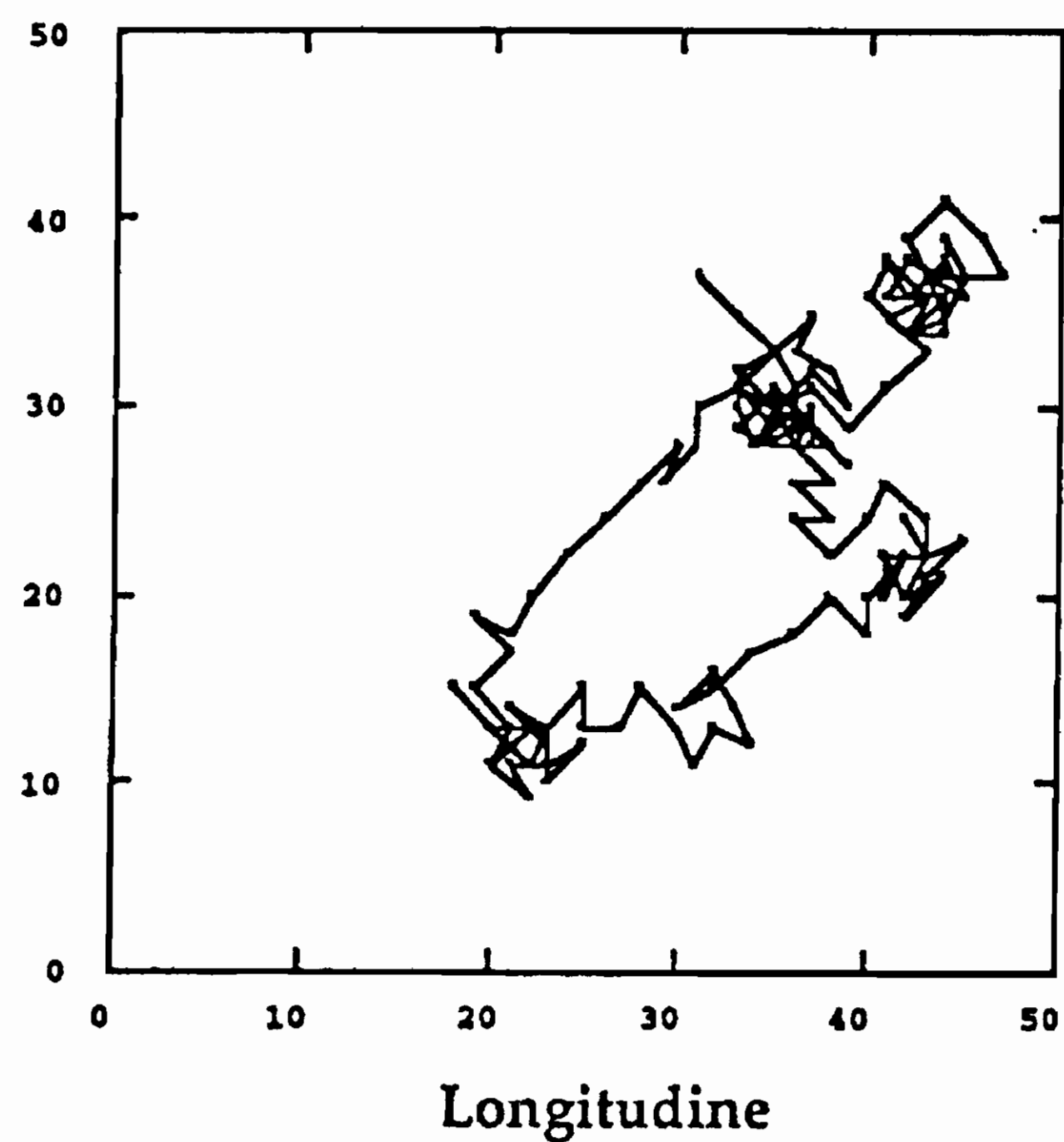


Figura 14.12: Esempio di “pseudovolo di Lévy” utilizzato per la simulazione multifrattale del deposito al suolo in Austria.

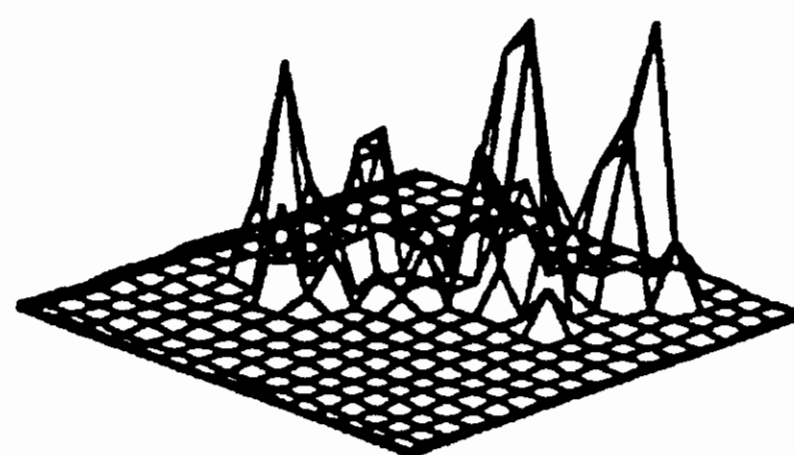


Figura 14.13: Parziale creazione di impulsi sul network.

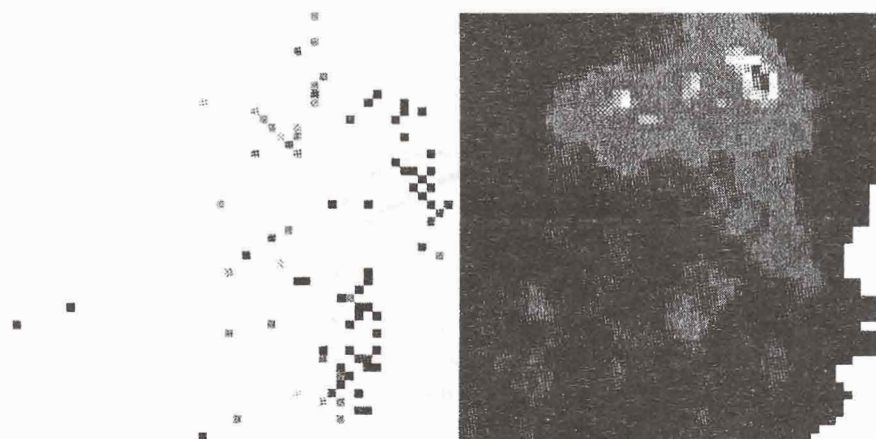


Figura 14.14: Misure sperimentali e simulazione multifrattale per l'Austria.

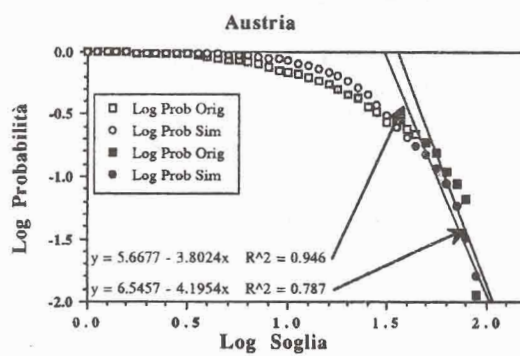


Figura 14.15: Confronto tra le distribuzioni iperboliche dei dati sperimentali e delle misure simulate per l'Austria.

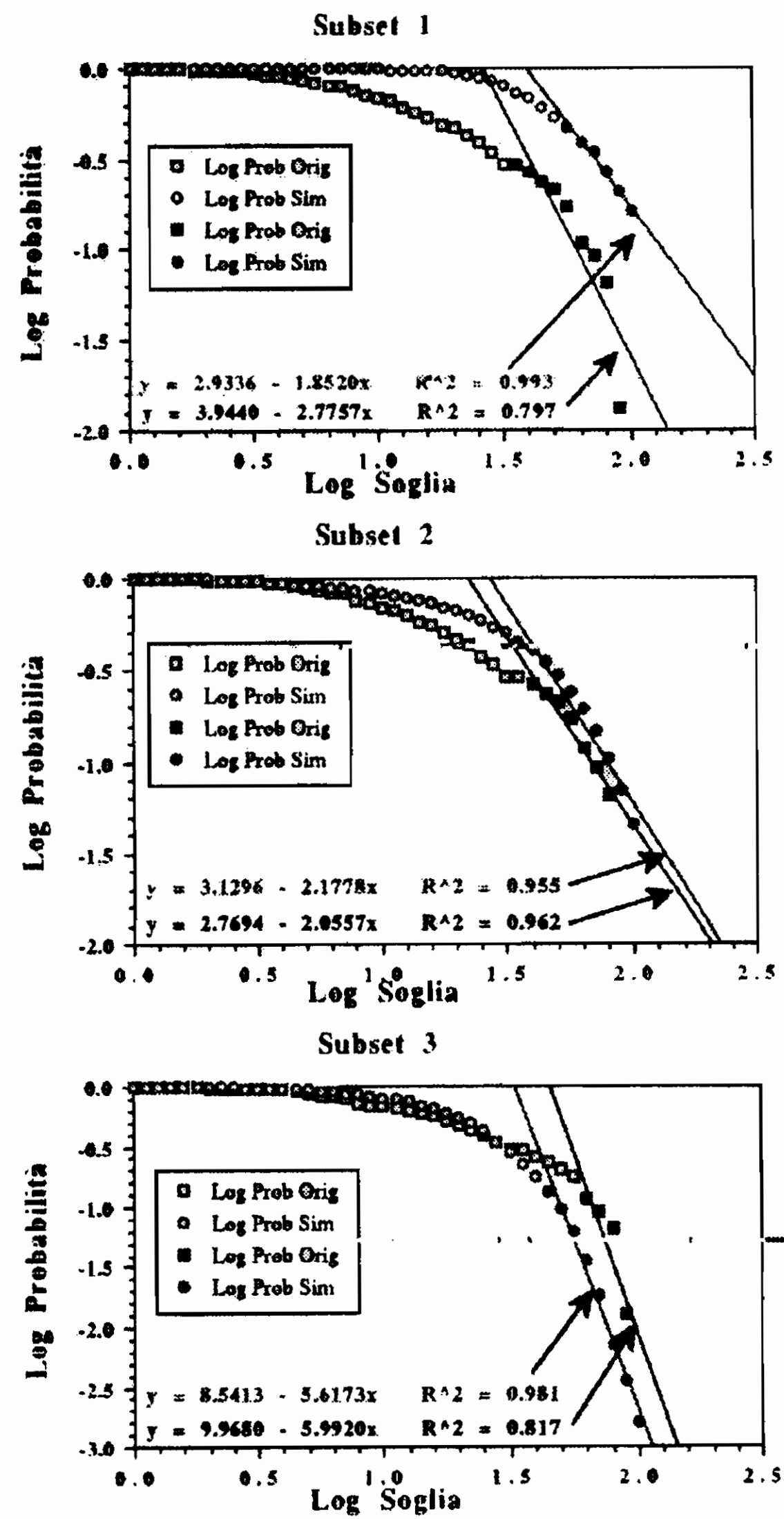


Figura 14.16: Confronto tra le distribuzioni iperboliche dei dati sperimentali e delle misure simulate per i primi 3 sottoinsiemi ridotti dell'Austria.



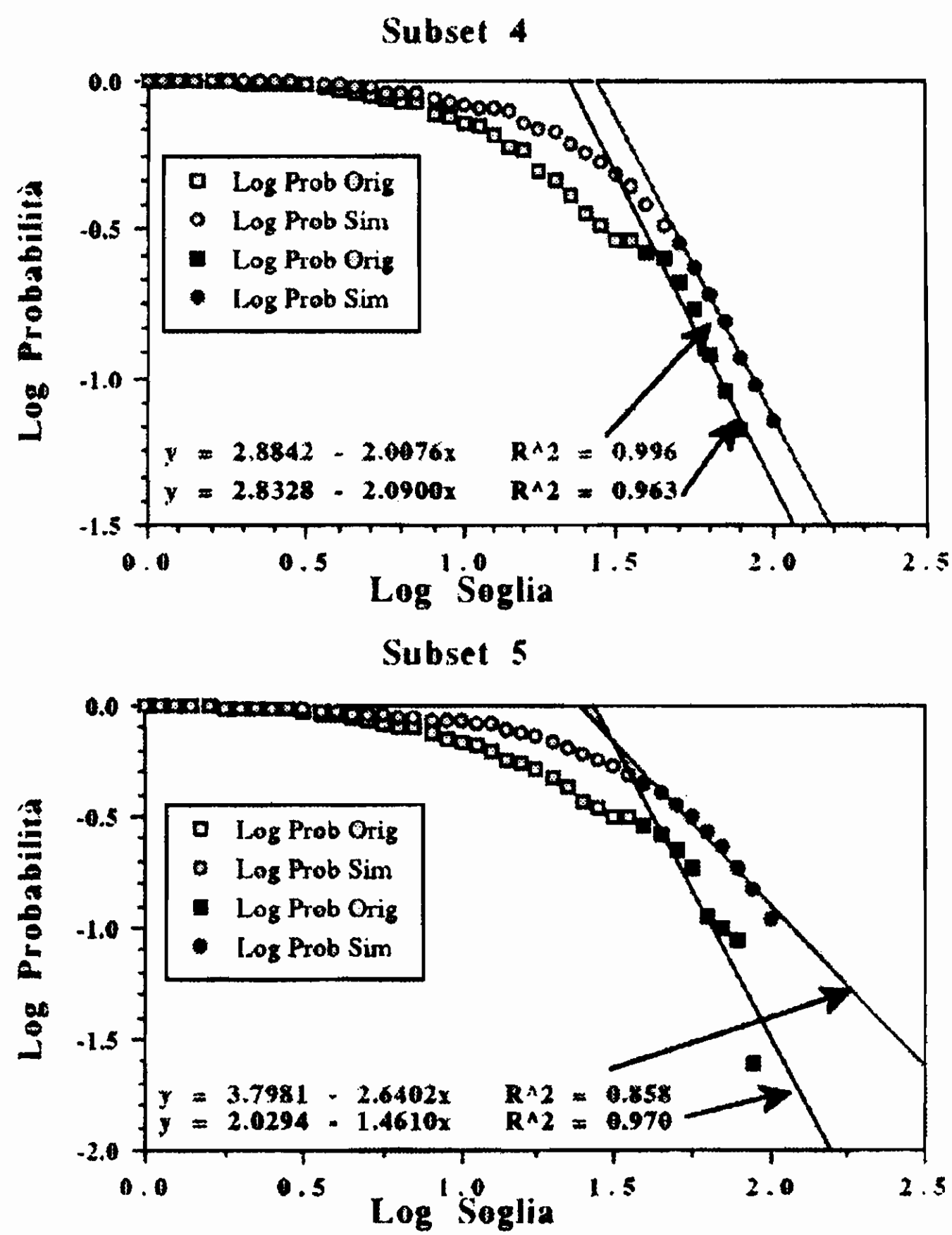


Figura 14.17: Confronto tra le distribuzioni iperboliche dei dati sperimentali e delle misure simulate per gli ultimi 2 sottoinsiemi ridotti dell'Austria.



# Appendix A

## Richiami di statistica

### A.1 Introduzione

Per comprendere appieno le potenzialità delle tecniche multifrattali stocastiche, soprattutto la formulazione dei multifrattali universali e la applicazione dei concetti frattali alla fisica delle particelle elementari, è necessario richiamare alcune nozioni di statistica e riconsiderarle poi da un punto di vista dal quale non sempre -o quasi mai- sono affrontate nei corsi istituzionali.

Tradizionalmente, nella fisica siamo abituati a trattare principalmente e sostanzialmente tre possibili distribuzioni di probabilità: la distribuzione binomiale di Bernoulli, la distribuzione di Poisson e la distribuzione di Gauss, le ultime delle quali sono peraltro una filiazione della prima.

Come vedremo, però, queste son ben lungi dall'essere le uniche distribuzioni di probabilità importanti nel mondo fisico.

Prima di addentrarci nello studio delle singole distribuzioni è opportuno introdurre il concetto di momento statistico.

Per definizione il momento statistico  $M_r(x)$  di ordine  $r$  di  $N$  valori  $x_i$  di una variabile casuale  $x$  è definito come:

$$M_r(x) = \frac{\sum_i x_i^r}{N} \quad (\text{A.1})$$

Il momento del primo ordine è il valor medio  $\mu$ .

Analogamente, il momento statistico  $M_r(\mu)$  di ordine  $r$  attorno al valor medio  $\mu$ , detto anche **momento centrale r-esimo**, è dato da:

$$M_r(\mu) = \frac{\sum_i (x_i - \mu)^r}{N} \quad (\text{A.2})$$

in cui  $r=0,1,2, \dots$

Ne segue che  $M_0(\mu) = 1$ ,  $M_1(\mu) = 0$  e  $M_2(\mu) = \sigma^2$ . Così il secondo momento centrale è la varianza;  $M_3(\mu)$  è detto **skewness** mentre  $M_4(\mu)$  è detto **kurtosi**.<sup>1</sup>

### A.1.1 Distribuzione binomiale di Bernoulli

Se un evento casuale può appartenere a *due soli possibili* insiemi  $A$  e  $B$ , indicando con  $p$  la probabilità a priori che questo evento appartenga all'insieme  $A$  e con  $(1 - p)$  la probabilità che lo stesso appartenga all'insieme  $B$  (le notazioni conservano la probabilità unitaria che l'evento appartenga o ad  $A$  o a  $B$ ), possiamo derivare la legge di probabilità che, dalla analisi di  $n$  eventi stocasticamente indipendenti, i "primi"  $k$  appartengano all'insieme  $A$  ed i rimanenti  $(n - k)$  appartengano all'insieme  $B$ . La probabilità composta è:

$$P(k) = \underbrace{pp \cdots pp}_k \underbrace{(1-p)(1-p) \cdots (1-p)}_{(n-k)} = p^k (1-p)^{n-k} \quad (\text{A.3})$$

Tuttavia, se non interessa l'ordine con cui si susseguono le appartenenze dell'evento ai due insiemi  $A$  o  $B$ , il numero di modi possibili con cui si può verificare che l'evento appartenga "complessivamente"  $k$  volte all'insieme  $A$  e  $(n - k)$  volte all'insieme  $B$ , si ottiene moltiplicando la probabilità (A.3) per il numero di combinazioni di  $n$  oggetti a  $k$  a  $k$ : cioè per il coefficiente binomiale:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (\text{A.4})$$

---

<sup>1</sup>Il materiale di questo capitolo si rifà anche ai volumi già pubblicati dall'autore [151]

La probabilità risulta più elevata e si ottiene:

$$P_k(n, p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad \underline{\text{BERNOULLI}} \quad (\text{A.5})$$

È bene ricordare una regoletta mnemonica utile (quella del *triangolo di Tartaglia*): se si sviluppa la potenza di un binomio  $(p + q)^n$  la (A.5) non è altro che il termine dello sviluppo di potenza di un binomio che contiene il prodotto  $p^k q^{(n-k)}$ . Si ottengono facilmente dalla (A.5) il valore della media e della varianza:  $\bar{k} = np$  e  $\sigma^2 = np(1-p)$ .

### A.1.2 Distribuzione di Poisson

Matematicamente la distribuzione poissoniana è un caso particolare della distribuzione bernoulliana, o meglio, è una approssimazione della (A.5) corrispondente a quando  $p$  diventa molto piccolo ( $p \ll 1$ ) mentre, contemporaneamente, il numero di prove (di eventi) diventa molto grande, “ma” vale la condizione che il prodotto prove-probabilità rimane costante:  $np = h$ ; ( $p \ll 1$ ); ( $n \gg k$ ), condizione detta “delle piccole serie”.

La legge binomiale è composta di tre fattori che si moltiplicano:

- - il primo è:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{\overbrace{n(n-1)(n-2) \cdots (n-k+1)}^k}{k!} \sim \frac{n^k}{k!} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

che si può approssimare -come fatto nella (A.6)- nel caso che  $n \gg k$ .

- - il secondo è  $(1-p)^{n-k}$  che si può riscrivere -ricavando il fattore  $p = \frac{h}{n}$  dalla condizione delle piccole serie- come:

$$(1-p)^{n-k} = \left(1 - \frac{h}{n}\right)^{n-k} \sim \left(1 - \frac{h}{n}\right)^n$$

in quanto  $(n - k) \sim n$  e ci si ferma al primo termine dello sviluppo in serie di Taylor.

Ricordando che:

$$\left(1 - \frac{h}{n}\right)^n = 1 - n\frac{h}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{h}{n}\right)^2 + \dots = 1 - h + \frac{n-1}{n}\frac{h^2}{2!} + \dots$$

e che:

$$e^{-h} = 1 - h + \frac{h^2}{2!} - \dots$$

si può porre, per  $n \sim (n - 1)$ :

$$\left(1 - \frac{h}{n}\right)^n \sim e^{-h}$$

ovverossia:

$$(1 - p)^{n-k} \sim e^{-h}.$$

• - il terzo fattore è  $p^k$  che si può riscrivere, ancora usando la condizione delle piccole serie:

$$p^k = \frac{h^k}{n^k}$$

La riscrittura dei tre fattori precedenti permette di approssimare la distribuzione binomiale con una nuova distribuzione  $P_k(n, p)$ :

$$P_k(n, p) \simeq \frac{n^k}{k!} e^{-h} \frac{h^k}{n^k} = \frac{e^{-h} h^k}{k!}$$

La distribuzione di probabilità dipende quindi dal prodotto prove-probabilità  $h$  che governa contemporaneamente i limiti  $n \rightarrow \infty$  e  $p \rightarrow 0$ .

$$P_k(h) = \frac{h^k}{k!} e^{-h} \quad \underline{POISSON} \quad (A.7)$$

Dalla (A.7) si ottengono facilmente i valori della media e della varianza:  $\bar{k} = h$  e  $\sigma^2 = h$ . La poissoniana è una distribuzione ad un solo parametro.

### A.1.3 Distribuzione di DeMoivre-Gauss

La distribuzione gaussiana è anch'essa una approssimazione della distribuzione binomiale che si ottiene quando il numero delle prove (o il numero delle realizzazioni)  $n$  è grande ma  $p$  "non" tende a zero, bensì si mantiene costante. Con il che le condizioni (dette "delle grandi serie") per ottenere la gaussiana sono:  $h = np \rightarrow \infty$ ;  $n \rightarrow \infty$ .

In questo caso  $k$  (numero delle prove) diventa infinitesimo e si può fare la approssimazione:

$$\frac{k}{n} \rightarrow \frac{dk}{n} = dx.$$

La nuova variabile  $x$  diventa continua ed il differenziale  $dx$  non è più il "numero di volte che un evento appartiene all'insieme  $A$ ", bensì è il valore (continuo) che la variabile aleatoria  $x$  può assumere nell'evento casuale.

La derivazione non è semplice e noi la omettiamo. Risulta:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}} \quad \underline{\text{GAUSS}} \quad (\text{A.8})$$

È una distribuzione a due parametri liberi: media  $\bar{x}$  e varianza  $\sigma^2$ .

Il teorema di De Moivre[152] dimostra che, per  $p$  fisso e per  $n \rightarrow \infty$ , la distribuzione di Bernoulli converge uniformemente alla distribuzione di Gauss.

### A.1.4 Teorema del limite centrale

Quando il *teorema di De Moivre* viene generalizzato, esso costituisce il teorema del limite centrale della statistica (che noi riprenderemo più avanti). Qui ci limitiamo a citarne un enunciato: siano  $x_1, x_2, \dots, x_n$  variabili casuali stocasticamente indipendenti, di distribuzione qualsivoglia a varianza finita. Sotto "condizioni molto deboli" si può dimostrare che la variabile casuale:

$$y = \sum_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.9})$$

obbedisce ad una distribuzione che converge verso una distribuzione gaussiana con una varianza:

$$\sigma^2(y) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 \quad (\text{A.10})$$

Le condizioni sono:

- 1- che le variabili  $x_i$  siano stocasticamente indipendenti;
- 2- che ammettano valor medio  $\bar{x}_i$  finito;
- 3- che esista il valor medio di  $|x_i - \bar{x}_i|^3$ ;
- 4- che:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma(x_i)}}{\sqrt[3]{\sum_{i=1}^n \bar{x}_i (|x_i - \bar{x}_i|^3)}} \right] = \infty$$

Purtroppo, queste condizioni vengono spesso trascurate o dimenticate ed il teorema applicato ugualmente. Va infine detto che vi sono numerose formulazioni del Teorema del Limite Centrale della Statistica e che noi riprenderemo questo tema più avanti in connessione con le possibili generalizzazioni ai processi moltiplicativi.

### A.1.5 La distribuzione multinomiale

Partendo dalla distribuzione di probabilità binomiale (A.5) è facile - invece che calcolare la probabilità di ripartizione tra due soli insiemi  $A$  e  $B$ - avere  $k$  insiemi  $A_1, A_2, \dots, A_k$  e calcolare la probabilità che, dati  $N$  eventi stocasticamente indipendenti,  $n_1$  appartengano all'insieme  $A_1$ ;  $n_2$  appartengano all'insieme  $A_2, \dots$ ,  $n_k$  appartengano all'insieme  $A_k$ . È immediato riconoscere che è il caso di una variabile misurata nell'intervallo  $(a, b)$ , quando si divida l'intervallo  $(a, b)$  in  $k$  intervallini, cosicché una misura può cadere "soltanto" in uno dei  $k$  intervallini. In più deve essere:

$$\sum_{i=1}^k n_i = N \quad (\text{A.11})$$



Se, come già fatto nel §1, non ci interessa l'ordine con cui si susseguono le appartenenze dell'evento all'insieme generico  $A_i$ , dati  $N$  eventi dobbiamo prenderne  $n_1$  da porre nell'insieme  $A_1$ : questo si può fare in tanti modi quante sono le combinazioni di  $N$  oggetti a  $n_1$  a  $n_1$ , cioè in  $\binom{N}{n_1}$  modi diversi. Tra i rimanenti  $(N - n_1)$  eventi, ne dobbiamo mettere  $n_2$  nell'insieme  $A_2$  e ciò si può fare in  $\binom{N - n_1}{n_2}$  modi diversi. Il numero di modi con cui si può costruire la distribuzione aleatoria  $\{n_i\} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  è il prodotto  $W(n_i)$ :

$$W(n_i) = \binom{N}{n_1} \binom{N - n_1}{n_2} \dots \binom{N - n_1 - n_2 - \dots - n_{k-1}}{n_k}$$

L'ultimo coefficiente binomiale è uno in quanto per la (A.11) coincide con  $\binom{n_k}{n_k}$ . Tuttavia, per la (A.4) la formula precedente si può riscrivere come:

$$W(n_i) = \frac{N!}{n_1!(N - n_1)!} \frac{(N - n_1)!}{n_2!(N - n_1 - n_2)!} \frac{(N - n_1 - n_2)!}{n_3!(N - n_1 - n_2 - n_3)!} \dots$$

ovverossia:

$$W(n_i) = \frac{N!}{n_1!n_2! \dots n_k!} \quad \underline{\text{MULTINOMIALE}} \quad (\text{A.12})$$

La distribuzione multinomiale è una funzione di  $n_i$  che è soggetta alla condizione (A.11). Il valore medio di  $n_i = \frac{\sum_k n_i}{k}$  è:  $\bar{n} = \frac{N}{k}$  e la varianza  $\sigma^2 = \left(\frac{\sum_{i=1}^k n_i^2}{k}\right) - \bar{n}^2 = \bar{n}^2 - \bar{n}^2$ .

Possiamo condensare le interconnessioni fra le tre distribuzioni principali della statistica e con le molteplici distribuzioni usate nella fisica mediante il diagramma della fig. 6.1. In esso viene riassunto come, partendo sempre dalla distribuzione binomiale, si possa passare alla multinomiale -e da questa alle distribuzioni di Boltzmann, Bose-Einstein e Fermi-Dirac, trattate nel §seguente, oppure, mediante opportune approssimazione (delle piccole serie o delle grandi serie) alla distribuzione poissoniana o a quella gaussiana.

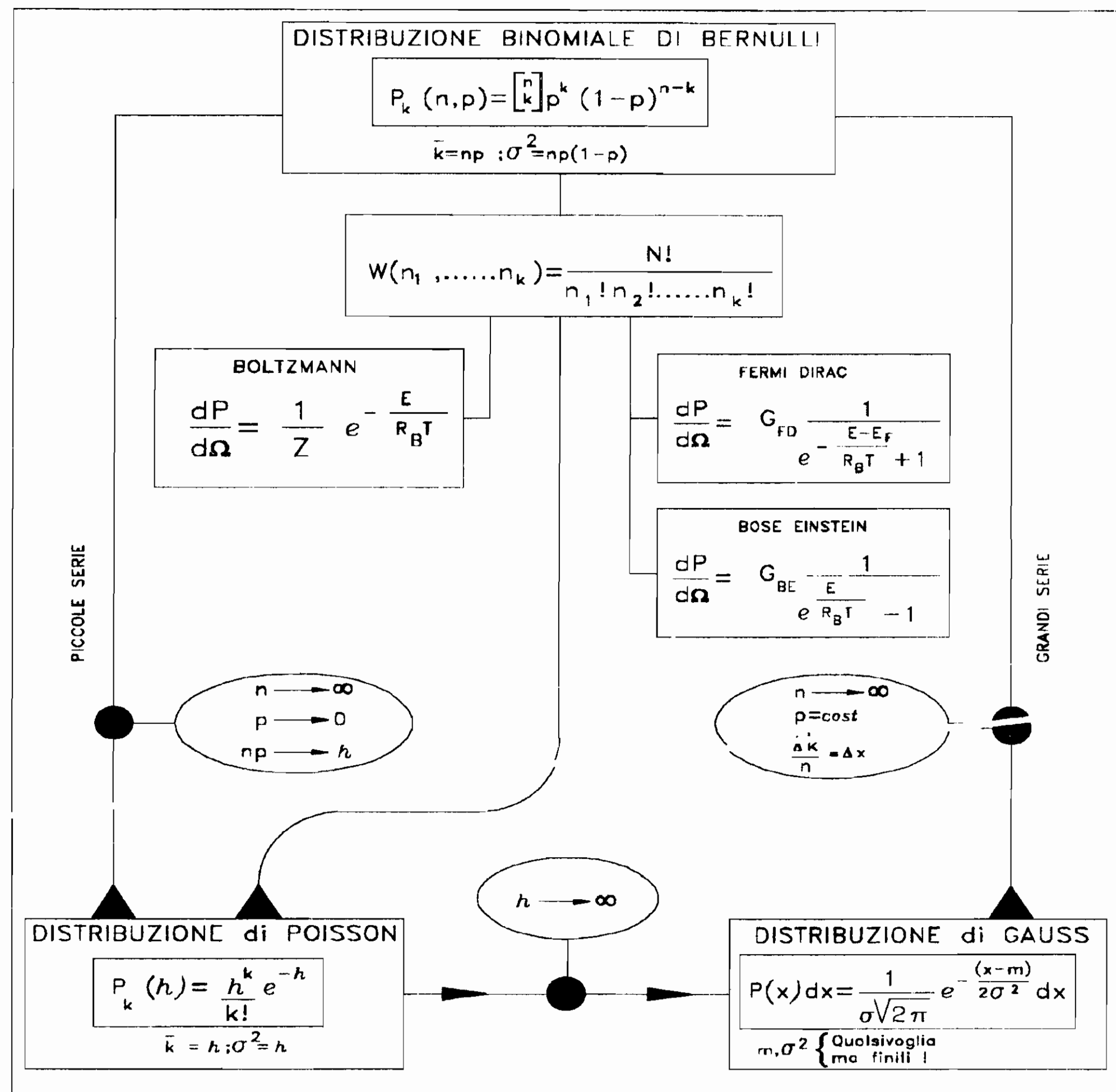


Figura A.1: Schema illustrativo delle possibili evoluzioni della distribuzione binomiale.

### A.1.6 Alcune osservazioni

Ricordiamo che, per comodità, in seguito ci potrà servire la distribuzione di Gauss normalizzata.

Poniamo:

$$x = \frac{x' - \bar{x}'}{\sigma} ; dx = \frac{dx'}{\sigma}$$

in modo da scrivere la distribuzione di Gauss semplicemente come:

$$P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \underline{\text{GAUSS - NORMALIZZATA}} \quad (\text{A.13})$$

Notiamo esplicitamente ancora che nelle distribuzioni gaussiane e poissoniane scompare completamente il numero delle prove  $n$  che è stato fatto tendere a infinito. Notiamo infine una cosa importante: la gaussiana è considerata a “furor di popolo” la “distribuzione normale degli errori”. Ma questo è un puro atto di fede. E. Wittaker e G. Robinson, nel volume “Calculus of Observations”, edito a Londra nel 1929, scrivono esplicitamente: *ognuno crede nella legge gaussiana degli errori: gli sperimentatori perché pensano che sia stata dimostrata dai matematici; i matematici perché pensano che sia stata verificata con esattezza dalle osservazioni sperimentali.* Benoit Mandelbrot fu “obbligato” ad inventare i frattali proprio perché il rumore elettromagnetico nella trasmissione di segnali digitali -al tempo dei primi trasferimenti via satellite di dati tra calcolatori- era ben lungi dall’essere di tipo gaussiano, il che portava ad un numero troppo elevato di errori di trasmissione.

Occorre infine affermare con chiarezza che le tre distribuzioni fin qui illustrate e che vanno per la maggiore, sono soltanto “alcune” distribuzioni di probabilità e che esse valgono soltanto per le condizioni per le quali sono state provate.

Per esempio, sappiamo benissimo a nostre spese che, quando la statistica è povera, si è ben lungi dalla situazione  $n \rightarrow \infty$ , per cui la differenza tra due distribuzioni poissoniane (segnale meno fondo) non è una poissoniana bensì una funzione di Bessel del secondo ordine[154] e che la trattazione di dati poveri in statistica è un problema per niente facile da affrontare che esula dai fini del presente volume.

## A.2 Altre distribuzioni di probabilità

Noi siamo ancorati alla distribuzione binomiale perché ci hanno insegnato a lanciare i dadi ed a giocare con le carte; siamo ancorati alla distribuzione di Poisson perché abbiamo a che fare con i conteggi dei rivelatori di particelle; siamo ancorati alla distribuzione normale o di Gauss per il malinteso di fondo appena citato e per le distrazioni che abbiamo

sulle condizioni nelle quali è stato dimostrato da De Moivre il Teorema del Limite Centrale della Statistica, fra non molto dovremo superare coscientemente questa distrazione, fare mente locale, e generalizzare correttamente il Teorema del Limite Centrale Per fortuna lo ha fatto per noi Paul Lévy nel 1925.

Ad onor del vero, va sottolineato che, per piccole variazioni e per molte circostanze, la distribuzione di Gauss “riproduce spesso” le deviazioni delle letture di un indice o di una serie di misure; ma per molte misure, “molto spesso” si osservano delle “code” che eccedono quanto previsto da una gaussiana.

Qui, tuttavia, non vogliamo disquisire sulla bontà di una distribuzione gaussiana di probabilità, bensì considerarla “una fra le tante” e confrontarla “anche” con altre distribuzioni altrettanto utili nella fisica e per la statistica.

### A.2.1 Distribuzione rettangolare

La prima distribuzione con cui si ha a che fare è una distribuzione piatta, in mancanza di risoluzione sperimentale:

$$P(x) = k ; (a \leq x \leq b)$$

Se  $P(x)$  è una densità di probabilità,  $dP(x) = kdx$  e deve essere:

$$\int_a^b P(x)dx = \int_a^b kdx = k(b - a) = 1 ; k = \frac{1}{b - a}$$

ovvero:

$$P(x) = \frac{1}{b - a} (a \leq x \leq b) \quad \underline{\underline{RETTANGOLARE}} \quad (\text{A.14})$$

Ogni intervallo  $dx$  nell'intervallo  $(a, b)$  è equiprobabile: questa è la situazione di quando si analizza la variabile aleatoria  $x$  con un passo di approssimazione  $\delta = (b - a)$ . Oppure, questa è la situazione del primo passo di un processo moltiplicativo a cascata del Cap.7. Non sappiamo nulla sulla struttura della distribuzione di  $x$  a risoluzione più “fina” di

$\lambda = \frac{1}{\delta}$ . Il valore  $k$  è il “contenuto” dell’intervallo  $(b-a)$ . Possiamo cavare poco da una tale distribuzione: possiamo “centrare la distribuzione” attorno al punto medio  $c = \frac{b-a}{2}$  mediante una opportuna traslazione e ridefinire la distribuzione nell’intervallo  $(-c, +c)$ . La media vale  $c$ .

È facile calcolare il momento statistico di ordine  $n$ ,  $M_n(0)$ , rispetto allo zero del nuovo intervallo  $(-c, +c)$ :

$$M_n(0) = \frac{1}{2c} \int_{-c}^{+c} x^n dx = \frac{1}{2c} \left[ \frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_{-c}^{+c} \quad (\text{A.15})$$

Ovviamente, tutti i momenti di ordine dispari sono nulli:

$$M_{2n+1}(0) = 0 ; n = 1, 2, 3, \dots$$

Mentre i momenti di ordine pari hanno la forma:

$$M_{2n}(0) = \frac{c^{2n}}{2n+1}$$

In particolare la varianza vale:

$$\sigma^2 = M_2(0) = \frac{c^2}{3} = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{\delta^2}{12} \quad (\text{A.16})$$

La (A.16) pone pertanto un limite invalicabile sulla “possibile dispersione” dei dati analizzati con un passo di approssimazione  $\delta = (b-a)$ .

## A.2.2 Distribuzione di Boltzmann

Partendo dalla distribuzione multinomiale (A.12) si arriva con facilità alla distribuzione della statistica classica di Boltzmann. Se infatti si pensa che gli insiemi  $A_i$  tra i quali distribuire gli eventi casuali  $x_i$  non siano altro che delle celle dello spazio delle fasi  $(x, y, z; p_x, p_y, p_z)$  nelle quali poter collocare le molecole di un sistema microscopico tipo gas perfetto, possiamo pensare che le celle siano abbastanza piccole cosicchè le particelle che appartengono alla cella  $A_i$  posseggano una energia  $E_i$ ,

in modo che si debba aggiungere alla (A.11) anche la condizione di conservazione della energia:

$$\sum_{i=1}^k E_i n_i = E_{tot} \quad (\text{A.17})$$

Appare chiaro che la distribuzione di equilibrio è quella che si può realizzare nel numero massimo possibile di modi. Ogni realizzazione del sistema termodinamico si chiama “microstato” del sistema, mentre la configurazione  $\{n_i\} = \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$  si chiama “macrostato”. Il lettore intuisce immediatamente che il “modo di contare” i microstati che corrispondono ad un determinato macrostato assume una importanza cruciale: le particelle sono distinguibili? Si possono metter più particelle nella stessa posizione (nella stessa cella)? Quanto piccola può essere presa una cella  $A_i$ ?

La distribuzione di equilibrio della meccanica classica si ottiene ricercando il massimo della (A.12) sotto le condizioni (A.11) e (A.17). Essendo il logaritmo una funzione monotona sempre crescente, conviene determinare il massimo del logaritmo della (A.12) il che significa in sostanza considerare l'entropia  $S$  del sistema fisico che è definita come proporzionale al logaritmo della probabilità <sup>2</sup>.

Definiamo pertanto:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = \log N! - \sum_{i=1}^k \log(n_i!)$$

e ricordiamo un teorema di Stirling che scriviamo esplicitamente:

$$\log(N!) = \log 1 + \log 2 + \log 3 + \dots = \sum_{i=1}^N \log i = \sum_{i=1}^N (1 \cdot \log i)$$

Il significato di questa formula è quello di area della poligonale iscritta sotto la curva della funzione  $y = \log x$  ottenuta con immediatezza spezzando l'asse delle  $x$  in intervalli  $\Delta x = 1$ . Una utile approssimazione

---

<sup>2</sup>si veda un volume di Termodinamica.

di  $y = \log N!$  per  $N$  grande è quindi:

$$y = \log N! \sim \int_1^N \log x dx = [x \log x - x]_1^N$$

da cui segue il *Teorema di Stirling*:

$$\log N! \sim N \log N - N = N(\log N - 1) \quad (\text{A.18})$$

Si può pertanto riscrivere la funzione  $F(n_i)$  come:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = N \log N - N - \sum_i n_i \log n_i + \sum_i n_i$$

(il secondo ed il quarto addendo si elidono).

Il massimo della funzione  $F(n_i)$  sotto le condizioni (A.11) e (A.17) si ottiene facilmente mediante il “metodo dei moltiplicatori di Lagrange” [153], che, nella ricerca dei minimi condizionati, consiste nell’aggiungere alla espressione precedente due termini nulli ottenuti dalle (A.11) e (A.17) e cercare quindi il massimo senza condizioni della funzione:

$$F(n_i) = \log W(n_i) + \alpha(N - \sum_i n_i) + \beta(E_{tot} - \sum_i n_i E_i)$$

ovvero:

$$F(n_i) = - \sum_i n_i \log n_i + \sum_i n_i - \alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i E_i \quad (\text{A.19})$$

dove  $\alpha$  e  $\beta$  sono due parametri da determinare imponendo le due condizioni (A.11) e (A.17). I termini  $(+\alpha N + \beta E_{tot} + N \log N - N)$  sono costanti per cui possono essere tralasciati nel processo di ricerca del massimo.

Derivando la (A.19) rispetto a  $n_i$  si ottiene la distribuzione di equilibrio  $\{n_i^o\} = \{n_1^o, n_2^o, \dots, n_k^o\}$ :

$$\left[ \frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^o} = - \log n_i^o - \frac{n_i^o}{n_i^o} - \alpha - \beta E_i + 1 = 0$$

Si ricava facilmente l'equazione:

$$\log n_i^o = -\alpha - \beta E_i$$

Passando agli esponenziali si può scrivere immediatamente:

$$n_i^o = e^{-\alpha - \beta E_i} = G e^{-\beta E_i}$$

Il parametro  $\beta$  si ricava imponendo la conservazione dell'energia per ogni grado di libertà e risulta:

$$\beta = \frac{1}{kT}$$

dove  $k$  è la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura assoluta di equilibrio del sistema[155].

In definitiva, passando ad elementi infinitesimi di spazio delle fasi  $d\Omega = dx dy dz dp_x dp_y dp_z$  si può scrivere la distribuzione di Boltzmann come:

$$\frac{dn}{d\Omega} = \frac{N_{tot}}{Z} e^{-\frac{E}{kT}} \quad \underline{\text{BOLTZMANN}} \quad (\text{A.20})$$

La costante  $Z$  si chiama “Zustandssumme” ed è la funzione di partizione cui si perviene imponendo la condizione (A.11).

Vale la pena di sottolineare che, cambiando le variabili, la distribuzione di probabilità in energia diventa [156]:

$$\frac{dn}{dE} = A \sqrt{E} e^{-\frac{E}{kT}} \quad (\text{A.21})$$

### A.2.3 Distribuzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein

Abbiamo già accennato al fatto che la distribuzione di Boltzmann descrive la distribuzione di probabilità classica, nella quale le particelle sono considerate distinguibili come gli “oggetti” che vengono “distribuiti” a  $n_1$  a  $n_1$  nell'insieme  $A_1$ , a  $n_2$  a  $n_2$  nell'insieme  $A_2$ , ecc., nella costruzione della distribuzione multinomiale, come fatto nel §A.1.5.

A questo approccio si possono fare tre obiezioni rilevanti:



- 1- non è vero che si possa conoscere contemporaneamente la posizione e la quantità di moto di una particella microscopica (Principio di indeterminazione di Heisenberg);
- 2- non è fisicamente corretto procedere come se le particelle microscopiche avessero una loro identità e fossero di fatto distinguibili (Principio di identità);
- 3- nel caso specifico degli elettroni non è vero che in una cella dello spazio delle fasi si possa metter un numero  $N_i$  qualsivoglia di elettroni (cfr. il Principio di Pauli).

La bontà della distribuzione di Boltzmann nel descrivere moltissimi sistemi fisici sta nel fatto che, ad alta temperatura, le molecole o le particelle sono abbastanza lontane cosicchè, di fatto, non si confondono mai tra di loro e non si trovano mai nelle circostanze di interagire tra loro così da risentire gli effetti delle tre obiezioni enunciate.

Quando invece, come nel caso dei calori specifici dei solidi a bassa temperatura, le particelle microscopiche sono in condizioni di forte interazione, le condizioni nelle quali “abbiamo contato” i microstati corrispondenti al macrostato specifico risulta fortemente deficitario [156].

Qui ci limitiamo ad impostare il conteggio nel caso di Fermi-Dirac, che risulta particolarmente semplice, mentre scriveremo semplicemente la formula della distribuzione di Bose-Einstein.

Il conteggio nel caso di elettroni è facile. Lo spazio delle fasi viene suddiviso in celle  $A_i$ , ma in esse ci possono stare  $n = \frac{A}{h^3}$  compartimenti definiti dal principio di indeterminazione ( $A$  è il volume di una cella qualsiasi dello spazio delle fasi, di cui noi ne abbiamo prese  $k$ ). Infatti,  $\Delta x \Delta p_x \sim h$  con  $h$  costante di Planck. E ciò vale per le tre coordinate  $x, y, z$ . Il compartimentino  $h^3$  indica la “occupazione” di un corpuscolo microscopico nello spazio delle fasi. Allo spazio delle fasi aggiungiamo un asse degli spin, cosicchè ogni compartimento  $h^3$  dello spazio delle fasi può contenere “un solo elettrone” (con lo spin orientato -per esempio- all’insù). Basta assumere  $n = \frac{2A}{h^3}$ .

Ciò posto, dati  $n$  compartimentini contenuti nella cella  $A_i$  dello spazio

delle fasi che contenga  $n_i$  elettroni,  $n_i$  compartimentini possono essere occupati e gli altri  $(n - n_i)$  risultano vuoti, perché si può avere un solo elettrone per compartimentino di dimensioni  $h^3$ . Il problema è allora semplicemente quello di contare in quanti modi possibili, dati  $n$  compartimenti, se ne possono riempire  $n_i$  lasciandone  $(n - n_i)$  vuoti. Ciò corrisponde al numero di combinazioni di  $n$  oggetti a  $n_i$  a  $n_i$  e cioè:

$$\binom{n}{n_i} = \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!}$$

La multinomiale (A.12) viene pertanto sostituita dalla distribuzione:

$$W(n_i) = \prod_{i=1}^k \frac{n!}{n_i!(n - n_i)!}$$

con le solite condizioni (A.11) e (A.17).

Passando ancora ai logaritmi, si ottiene:

$$F(n_i) = \log W(n_i) = \sum_{i=1}^k [\log n! - \log n_i! - \log(n - n_i)!]$$

con  $n$  ed  $n_i$  entrambi numeri grandi. Usando il *Teorema di Stirling* si ottiene:

$$\ln W(n_i) = \sum_{i=1}^k [n \log n - n - n_i \log n_i + n_i - (n - n_i) \log(n - n_i) + (n - n_i)] \quad (\text{A.22})$$

Per trovare la distribuzione  $\{n_i^o\} = \{n_1^o, n_2^o, \dots, n_k^o\}$  di massima probabilità occorre usare il metodo dei moltiplicatori di Lagrange come fatto nel §A.2 e massimizzare la funzione:

$$F(n_i) = \log W(n_i) + \alpha(N - \sum_i n_i) + \beta(E_{tot} - \sum_i E_i n_i)$$

nella quale sono state introdotte le condizioni (A.11) e (A.17).

Imponendo  $\frac{\partial F}{\partial n_i} = 0$ , tenendo presente che  $n$  è una costante “per costruzione”, si ottiene la distribuzione massimizzata:

$$\{n_i^o\} = \{n_1^o, n_2^o, \dots, n_k^o\}.$$

Esplicitamente:

$$F(n_i) = \sum_i [-n_i \log n_i - n \log(n - n_i) + n_i \log(n - n_i)] - \\ -\alpha \sum_i n_i - \beta \sum_i n_i E_i \quad (\text{A.23})$$

dove sono stati trascurati i termini  $(n \log n + n + \alpha N + \beta E_{tot})$  costanti.

Derivando rispetto a  $n_i$  si ottiene:

$$\left[ \frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^o} = -\log n_i^o - \frac{n_i^o}{n_i^o} + \frac{n}{n - n_i^o} + \log(n - n_i^o) - \frac{n_i^o}{n - n_i^o} - \\ -\alpha - \beta E_i = 0 \quad (\text{A.24})$$

ovvero:

$$\left[ \frac{\partial F(n_i)}{\partial n_i} \right]_{n_i^o} = -\log n_i^o + \log(n - n_i^o) - \alpha - \beta E_i = 0$$

o anche:

$$\log(n - n_i^o) - \log n_i^o = \alpha + \beta E_i$$

Passando agli esponenziali, ponendo  $\alpha = \ln B$  si ottiene:

$$\log \frac{(n - n_i^o)}{n_i^o} = \log B + \beta E_i$$

$$\log \left[ \frac{\frac{n}{n_i^o} - 1}{B} \right] = \beta E_i$$

e finalmente:

$$\frac{n_i^o}{n} = \frac{1}{Be^{\beta E_i} + 1}$$

Il valore di  $\beta$  è sempre lo stesso  $\beta = \frac{1}{kT}$ . Pertanto, passando agli infinitesimi, tenendo presente il volume elementare  $d\Omega$  dello spazio delle fasi:

$$n = \frac{2A}{h^3} \rightarrow \frac{2A}{h^3} dx dy dz dp_x dp_y dp_z = \frac{2A}{h^3} d\Omega$$

si può scrivere, integrando la parte geometrica:

$$\frac{dN}{dp_x dp_y dp_z} = G \frac{1}{B e^{\frac{E}{kT}} + 1}$$

Per ragioni di opportunità è bene porre:

$$B = e^{-\frac{E_F}{kT}}$$

con il che il parametro  $E_F$  acquista il significato di *Energia di Fermi*. La distribuzione di Fermi-Dirac si può finalmente scrivere nella forma:

$$\frac{dN}{d\Omega} = G \frac{1}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1} \quad \underline{\text{FERMI - DIRAC}} \quad (\text{A.25})$$

Come fatto per la (A.21) possiamo scrivere la distribuzione energetica di Fermi-Dirac nella forma:

$$\frac{dN}{dE} = G' \frac{\sqrt{E}}{e^{\left(\frac{E-E_F}{kT}\right)} + 1} \quad (\text{A.26})$$

(il valore di  $G'$  è  $G' = (4V/h^3)(2m_e)^{3/2}$  dove  $m_e$  è la massa dell'elettrone).

La formula (A.26) acquista una importanza fondamentale a bassa temperatura, in particolare allo zero assoluto. Va notato che fino a temperature di  $10^3 - 10^4$  gradi Kelvin, la distribuzione (A.26) rimane sostanzialmente identica a quella che si ha allo zero assoluto.

A quella temperatura, all'esponente del denominatore si ha un termine che è 1 o 0 secondo il segno di  $(E - E_F)$ . Se  $(E - E_f) > 0$  il denominatore contiene un addendo infinito cosicchè  $dN/dE = 0$ ; mentre invece, se  $(E - E_F) < 0$ , l'addendo esponenziale è nullo e la distribuzione allo zero assoluto diventa:

$$\frac{dN}{dE} = G' \sqrt{E} ; \text{ per } (E < E_F) \quad (\text{A.27})$$

La (A.27) descrive, con buona approssimazione, la distribuzione energetica degli elettroni di conduzione all'interno di un conduttore. Il

valore  $E_F$  varia poco coll'energia; detta  $E_{F^0}$  la energia di Fermi allo zero assoluto,  $E_F$  varia con la temperatura secondo al legge:

$$E_F = E_{F^0} \left[ 1 - \frac{\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{E_{F^0}} \right)^2 + \dots \right]$$

Per il tungsteno  $E_{F^0} = 8.95$  eV, mentre per  $T = 10^4$  gradi Kelvin  $E_F$  diminuisce del 10 percento.

La distribuzione di Bose-Einstein si ottiene invece cambiando il “metodo di conteggio” dei microstati tenendo conto che ogni insieme  $A_i$  della spazio delle fasi va riempito prima con compartimentini di dimensioni  $h^3$ , ed ogni compartimentino va riempito tenendo conto del principio di identità e del fatto che ognuno di essi può contenere un numero qualsiasi di particelle microscopiche[156]. Il risultato è:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{A}{e^{\frac{E}{kT}} - 1} \quad \underline{\text{BOSE - EINSTEIN}} \quad (\text{A.28})$$

ovvero, per la distribuzione energetica:

$$\frac{dN}{d\Omega} = \frac{A\sqrt{E}}{e^{\frac{E}{kT}} - 1}$$

A commento finale di questo rapido riassunto delle tre distribuzioni statistiche classiche e quantistiche possiamo notare che tutte e tre si possono fare risalire ad un solo tipo di distribuzione che possiamo sintetizzare sotto la forma:

$$\frac{n_i}{n_i^0} + \delta = B e^{\frac{E_i}{kT}}$$

con:

- a)-  $\delta = 0$  per la statistica di Boltzmann;
- b)-  $\delta = +1$  per la statistica di Bose-Einstein;
- c)-  $\delta = -1$  per la statistica di Fermi-Dirac.

Si riconosce immediatamente che, per  $\frac{E}{kT} \gg 1$ , come si verifica nei sistemi estremamente rarefatti, le tre statistiche coincidono. Fatta eccezione per le temperature prossime allo zero assoluto e tranne

che per casi particolari, si può trascurare l'effetto della meccanica quantistica. Ciò giustifica l'uso della statistica di Boltzmann nella grande maggioranza dei casi di applicazione delle leggi statistiche ai sistemi di molte particelle.

Per queste distribuzioni, è rilevante il valore medio dell'energia che è:  $\bar{E} = kT$ .

#### A.2.4 Distribuzione esponenziale

Il comportamento esponenziale della distribuzione di Boltzmann non deve far pensare che ad essa vada attribuita una particolare importanza dal punto di vista statistico.

Si può facilmente arrivare a distribuzioni esponenziali con argomenti molto più semplici e lineari che non quelli che ci hanno fatto partire dalla distribuzione multinomiale.

Consideriamo infatti l'assorbimento di un raggio di luce da parte di un mezzo trasparente e calcoliamo la intensità della luce alla profondità  $x$  nel mezzo trasparente.

Dato un raggio di luce di intensità  $I_0$ , il quale incida sulla superficie di separazione di un mezzo trasparente, poniamo che la intensità  $-dI(x)$  di luce assorbita da uno spessore  $dx$  del mezzo, a profondità  $x$ , sia proporzionale a  $dx$  e ad  $I(x)$  in quel punto. Poniamo cioè:

$$-dI = kI(x)dx$$

dalla quale si ricava immediatamente:

$$\frac{dI}{I(x)} = -kdx$$

da cui:

$$I(x) = I_0 e^{-kx}$$

avendo posto la condizione iniziale:  $I(0) = I_0$ , per  $x = 0$ .

Di solito si chiama  $x_a = 1/k$  lunghezza di assorbimento e si scrive la intensità di luce che sopravvive alla profondità  $x$  come:

$$I(x) = I_0 e^{-\frac{x}{x_a}}$$

Lo stesso risultato si ottiene per:

- 1- il numero di atomi radioattivi che decadono con vita media  $\tau$  partendo da un campione iniziale di  $N_0$  atomi;
- 2- il numero  $N(x)$  di particelle, che sopravvivono alle interazioni attraversando un mezzo di cammino di interazione  $x_{int}$ ;
- 3- il numero  $N(x)$  di fotoni che sopravvivono alle interazioni elettromagnetiche attraversando un mezzo di cammino di radiazione  $x_r$ .

Per tutti questi fenomeni di assorbimento stocastico si può scrivere una densità di probabilità del tipo:

$$P(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} \quad (\text{A.29})$$

come distribuzione di probabilità (normalizzata) di un sistema instabile ma peraltro "libero" e non stocasticamente vincolato nella sua probabilità di transizione.

Qui è importante il significato fisico di  $\tau = \bar{t}$  o di  $\bar{x}$  e molto meno quello della varianza.

### A.2.5 Distribuzione di Breit-Wigner o di Cauchy

È noto dal corso di Istituzioni di Fisica Nucleare, o meglio dai tempi di Enrico Fermi e dalla teoria dei fenomeni di risonanza, che se la autofunzione di un sistema perturbato si scrive:

$$\Psi = \sum_i a_i u_i e^{-\frac{i}{\hbar} E_i t}$$

con  $u_i$  autofunzioni degli stati imperturbati di energia  $E_i$  ed  $a_i$  ampiezze degli stati imperturbati della sovrapposizione, si arriva ad una ampiezza attorno all'energia di risonanza  $E_r$  del tipo:

$$|a|^2 = K \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (E - E_r)^2}$$

E poichè il quadrato di un'ampiezza è la probabilità di transizione, si ha:

$$\frac{dP(E)}{dE} = K \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + (E - E_r)^2} \quad \underline{BREIT - WIGNER} \quad (A.30)$$

Ponendo  $x = \frac{(E - E_r)}{\Gamma}$  si può scrivere una densità di probabilità normalizzata:

$$P(x) = K \frac{1}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1 + x^2} \quad \underline{CAUCHY} \quad (A.31)$$

per la quale vale la normalizzazione:

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = 1$$

La (A.31) è la distribuzione di Cauchy. Per questa distribuzione - che pure è una distribuzione a campana - il valor medio risulta infinito. Infatti, posto  $y = \frac{x^2}{2}$  si scrive:

$$\bar{x} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1 + y} = \frac{1}{\pi} [\ln(1 + y)]_0^{\infty} = \infty - 0$$

Anche la varianza risulta infinita:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 dx}{1 + x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{[(x^2 + 1) - 1] dx}{1 + x^2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dx - \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \infty - 1 \end{aligned} \quad (A.32)$$

La distribuzione di Cauchy riveste carattere di particolare importanza come elemento di separazione tra le variabili stocastiche iperboliche e quelle provenienti da generatori gaussiani.

Conviene notare che la distribuzione (A.30) è caratterizzata dalla "moda"  $E_r$  e dalla larghezza a metà altezza  $\Gamma$  piuttosto che dal valor



medio e dalla varianza! Cioè  $\Gamma$  viene assunto come estimatore della dispersione di  $x$  attorno alla *moda* della distribuzione, ovverossia attorno al valore di massima frequenza.

### A.2.6 Altri estimatori di dispersione: il quantile

Nelle scienze economiche la varianza  $\sigma^2$  non è molto usata ed è spesso sostituita da altri estimatori di dispersione che non divergono facilmente. In effetti, anche per una gaussiana, la varianza fornisce delle indicazioni peculiari: la probabilità che un valore casuale  $x$  cada entro un intervallo  $(m - \sigma, m + \sigma)$  attorno al valore medio è  $P(\sigma) \sim 0.69$  che non è un numero “tondo” ed è di poco interesse per gli economisti.

Molto usato è il *quantile*, una grandezza che si può adattare a molteplici esigenze.

La definizione è molto semplice: data una densità di probabilità normalizzata generica  $p(x)$  per cui:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1$$

e data la sua funzione “primitiva”:

$$G(x) = \int_{-\infty}^x p(x)dx$$

si definisce *quantile di ordine k* il valore  $x^*$  per cui:

$$G(x^*) = k$$

Il quantile di ordine  $k = 1/2$  è la *mediana*; il quantile di ordine  $K = 1/4$  si chiama *quartile*. Da questa ultima grandezza deriva la *deviazione interquartile* (in sostituzione della deviazione standard  $\sigma$ ) definita come:

$$s = \frac{x_{3/4} - x_{1/4}}{2}$$

che individua l’intervallo attorno alla media che racchiude il 50 per cento (invece che il 69 per cento) dei valori casuali. La deviazione interquartile

è un estimatore delle fluttuazioni attorno alla moda, altrettanto buono della deviazione standard attorno alla media, con il vantaggio che, per definizione, ha sempre un valore finito anche quando la varianza (e la deviazione standard) non è definita o è infinita.

### A.2.7 Le variabili ed i voli di Lèvy

Avendo introdotto almeno una distribuzione senza valore medio definito e con varianza infinita, conviene riprendere il *Teorema di de Moivre* del §A.1.4, ricordando le condizioni di applicabilità.

Supponiamo di avere un numero  $k$  ( $k > 2$ ) di variabili aleatorie  $x_i$  con distribuzioni di probabilità normalizzate:

$$\int p_i(x) dx = 1$$

di media  $\mu_i$  e varianza  $\sigma_i$  finita.

Il *teorema del limite centrale della Statistica*, di De Moivre, sotto le specifiche condizioni del §A.1.4 afferma che la sommatoria rinormalizzata delle variabili aleatorie mostra una distribuzione che converge verso una distribuzione gaussiana.

Se indichiamo con  $\doteq$  l'uguaglianza fra distribuzioni di probabilità possiamo scrivere che, se:

$$x \doteq \sum_{i=1}^k x_i ; p(x) = \sum_{i=1}^k p_i(x) \rightarrow \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

dove:

$$\mu = \sum_{i=1}^k \mu_i \tag{A.33}$$

*il valor medio è la somma dei valori medi:*

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^K \sigma_i^2 \tag{A.34}$$

*ovvero: la varianza è la somma delle varianze.*

Quanto sopra mostra che la gaussiana rappresenta il *bacino di attrazione* per la somma di variabili stocastiche indipendenti a varianza finita, nel senso che ad essa “tende” la somma di variabili aleatorie indipendenti sotto condizioni abbastanza deboli.

È lecito chiedersi cosa si possa fare per le distribuzioni la cui varianza indefinita, quale è il caso della distribuzione di Breit-Wigner o di Cauchy. È bene sottolineare come non sia difficile generare una distribuzione di probabilità a varianza o a valor medio non definiti: abbiamo imparato nel Cap. 6 che una distribuzione iperbolica del tipo  $P(x) = kx^{-q}$  non ammette momenti statistici finiti dall'ordine  $(q - 1)$  in sù.

Abbiamo visto nel paragrafo 2.7 che l'intervallo interquartile è, per definizione, sempre finito.

È dovuta a Paul Lévy (1925) una generalizzazione del *Teorema del Limite Centrale* che si riduce alla generalizzazione della (A.10) secondo la linea delle generalizzazioni che hanno portato alla definizione delle dimensioni frattali.

Ferma restando la condizione (A.33) della media somma dei valori medi, il teorema stabilisce che: *l'estimatore  $s$  di dispersione finita della variabile aleatoria, somma rinormalizzata di  $k$  variabili aleatorie normalizzate  $x_i$  stocasticamente indipendenti, di dispersione finita  $s_i$ , è data da:*

$$s^\alpha = \sum_{i=1}^k s_i^\alpha \quad (\text{A.35})$$

con  $\alpha$  non necessariamente uguale a 2. La relazione (A.35) ha senso per ogni valore di  $\alpha$  reale, positivo inferiore a due ( $0 < \alpha \leq 2$ ).

Il parametro  $\alpha$  caratterizza così una particolare distribuzione di Lévy e prende il nome di *parametro di Lévy*.

È facile dimostrare che, nel caso di più gaussiane, la relazione (A.10) vale anche per l'intervallo *interquartile*; cioè:

$$s^2 = \sum s_i^2 \quad (\text{A.36})$$

Vedremo nel prossimo paragrafo che per una distribuzione di Cauchy vale la relazione:

$$s = \sum s_i \quad (\text{A.37})$$

e per un moto browniano “gaussiano” di Cap.4 vale la relazione:

$$\sqrt{s} = \sum \sqrt{s_i} \quad (\text{A.38})$$

La gaussiana  $\alpha = 2$ , quindi, rappresenta il caso estremo di uno spettro continuo di “comportamenti statistici”. A ciascun valore di  $\alpha$  positivo e minore di due corrisponde una particolare distribuzione statistica invariante.

Non soltanto: Lévy ha dimostrato che, per ciascun valore di  $\alpha$ , esiste un *Teorema del Limite Centrale* per il quale ciascuna delle distribuzioni corrispondenti rappresenta il *bacino di attrazione* per la somma stocastica di distribuzioni aleatorie appartenenti alla stessa classe individuata dal valore di  $\alpha$ . Queste classi sono note con il nome di *classi di Lévy*.

Alla luce di queste considerazioni, un *random walk* del tipo di quelli incontrati nel Cap. 4 in cui la lunghezza dei salti monodimensionali segue una distribuzione di Levy[157] (quindi anche con momenti statistici non definiti, come avviene per le distribuzioni iperboliche di probabilità) si chiama **volo di Levy** (cfr. anche Cap. 11). In realtà, occorre aggiungere che gli intervalli di tempo cui corrispondono i salti risultino finiti in media. Il termine *voli di Levy* è stato introdotto da Mandelbrot [1] per indicare la generalizzazione del termine *random flight* ovvero random walk in uno spazio continuo.

### A.3 Le distribuzioni log-normali

In una vasta classe di modelli matematici a cascata aleatoria, tra cui i modelli trattati nel Cap. 7, si crea una cascata a partire da un insieme con densità costante ed uniforme; ad ogni passo successivo,

l'insieme viene suddiviso -in modo opportuno- in sottointervalli di passo di approssimazione  $\delta_n$  e si moltiplica la densità di ciascun sottointervallo per un valore estratto a caso da una determinata distribuzione di probabilità. La densità aleatoria  $x$  del "bin"  $\delta$  a risoluzione  $\lambda = 1/\delta$  del  $n$ -esimo passo della cascata è dato dalla densità iniziale (che abbiamo spesso preso unitaria) moltiplicata per  $n$  variabili aleatorie  $x_i$ :

$$x \doteq \prod_{i=1}^n x_i \quad (\text{A.39})$$

Occorre pertanto estendere opportunamente il teorema del limite centrale al prodotto di variabili aleatorie indipendenti per capire come le proprietà della variabile aleatoria  $x$  sono controllate dalle proprietà statistiche delle variabili aleatorie  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ .

Il problema non è difficile, grazie alle proprietà della funzione logaritmo. Infatti, volendo studiare le proprietà delle variabile aleatoria (A.39), basta studiare le proprietà della funzione logaritmo:

$$y = \log x = \log\left(\prod_{i=1}^n x_i\right) = \sum_{i=1}^n (\log x_i) = \sum_{i=1}^n y_i \quad (\text{A.40})$$

Ciò corrisponde ad una somma di variabili aleatorie a cui si può applicare la generalizzazione del teorema del limite centrale. Fatto ciò, si passa all'esponenziale. È evidente la convenienza di avere a disposizione una serie di risultati, già dimostrati, che si possono utilizzare.

Per definizione quindi, si dice log-normale una variabile aleatoria il cui logaritmo è distribuito come una gaussiana:

$$P(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\log x - \mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \underline{\text{LOG - NORMALE}} \quad (\text{A.41})$$

Conviene ricordare esplicitamente che  $\mu = \overline{\log x}$  e che  $\sigma$  è la varianza di  $\log x$ .

Per quanto detto, rovesciando il ragionamento, se le variabili  $y_i$  sono normali e per la loro somma  $\sum y_i$  vale il teorema del limite centrale, le variabili  $x_i$  sono log-normali ed il prodotto  $\prod x_i$  è log-normale.

Pertanto, la variabile prodotto di variabili log-normali è essa stessa una variabile log-normale; così come una gaussiana è invariante per somma, così una log-normale è invariante per prodotto.

In analogia con quanto detto nel §A.1.4 a proposito del teorema del limite centrale, affinché il prodotto di  $n$  variabili sia una log-normale, non è strettamente necessario che tutte le variabili  $x_i$  lo siano: per  $n$  abbastanza grande, è sufficiente che il loro logaritmo abbia varianza finita, così da rientrare nelle ipotesi di validità del teorema. Allora, la log-normale rappresenta il *bacino di attrazione* per il prodotto di variabili stocastiche indipendenti i cui logaritmi abbiano varianza finita. Ciò sottolinea l'importanza che la log-normale assume nei processi moltiplicativi.

## A.4 Le funzioni caratteristiche

Per comprendere a fondo il significato della generalizzazione del *teorema del limite centrale* fatta nel §A.1.4, ricordiamo che la descrizione della somma di variabili aleatorie impone la convoluzione delle distribuzioni di probabilità che implicano a loro volta il prodotto delle loro trasformate di Fourier[160].

Consideriamo infatti la somma di due variabili aleatorie con distribuzione qualsivoglia  $P(x)$  e  $Q(x)$ . La variabile somma mostra una distribuzione che è data dalla convoluzione delle due funzioni  $P$  e  $Q$ :

$$R(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)Q(x - y)dx = P * Q$$

In generale un tale integrale non è affatto semplice da calcolare direttamente. Solo grazie alle trasformate di Fourier si può spesso arrivare al risultato in modo indiretto. Infatti, la trasformata di Fourier di  $R(x)$  è il prodotto delle due trasformate di  $P(x)$  e  $Q(x)$ : si può pertanto fare il prodotto delle due trasformate di Fourier e *poi* antitrasformare per ottenere  $R(x)$ . Lo stesso si può dire delle antitrasformate: l'antitrasformata della convoluzione è il prodotto di

antitrasformate; quindi, ancora una volta, note le due antitrasformate di  $P(x)$  e  $Q(x)$  se ne fa il prodotto e poi si fa la antitrasformata per ottenere  $R(x)$ . In statistica si preferisce adottare questa seconda strada. La antitrasformata di Fourier di una densità di probabilità è detta “funzione caratteristica”. Data una densità di probabilità  $P(x)$  la sua funzione caratteristica è data da:

$$\mathcal{F}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} P(x) dx \quad (\text{A.42})$$

ed a sua volta, la distribuzione  $P(x)$  si può ottenere dalla funzione caratteristica mediante l'integrale:

$$P(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} \mathcal{F}(t) dt \quad (\text{A.43})$$

(si noti come regola mnemonica che nella antitrasformata compare in segno più all'esponente, mentre nella trasformata compare -oltre al segno meno nell'esponente- anche il fattore  $\frac{1}{2\pi}$ ). In sintesi si può affermare che, da un lato, alla somma di variabili aleatorie corrisponde il prodotto delle funzioni caratteristiche; note le funzioni caratteristiche  $P$  e  $Q$  di due distribuzioni aleatorie, si ottiene la loro convoluzione facendone il prodotto  $PQ$  ed ottenendo  $R$  con la (A.43).

A titolo di esempio ricaviamo esplicitamente la funzione caratteristica della gaussiana e verifichiamo che la somma di due gaussiane è ancora una gaussiana. Per comodità usiamo la (A.13) normalizzata e chiamiamola:

$$G_{0,1}(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}}$$

La funzione caratteristica è:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{itu} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2} + itu} du = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-it)^2 - \frac{1}{2}t^2} du = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(u-it)^2} du \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

introducendo la variabile:  $w = (u - it)$  si può riscrivere la (A.44) come:

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_0 e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

dove l'integrale corre lungo una linea parallela all'asse  $u$  nel piano  $w$ . Effettuando l'integrazione lungo opportune linee chiuse, si può dimostrare che il suo valore coincide con quello che si ottiene integrando lungo tutto l'asse reale, per cui l'espressione finale diventa:

$$\mathcal{F}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2} \quad (\text{A.45})$$

In conclusione, a meno di costanti moltiplicative, la funzione caratteristica di una gaussiana standard è ancora una gaussiana. Infatti, le cose cambiano un poco per le gaussiane vere del tipo (A.8) di paragrafo 1.3. Infatti:

- moltiplicare la variabile originale per  $\sigma$  equivale ad introdurre nella funzione caratteristica la trasformazione:  $\mathcal{F}(t) \rightarrow \mathcal{F}(\sigma t)$ ;
- sommare una costante  $m$  o  $\mu$  significa introdurre nella funzione caratteristica un fattore  $e^{itm}$  o  $e^{it\mu}$ .

Pertanto la funzione caratteristica di una gaussiana (A.8) ha una forma del tipo:

$$\mathcal{F}(t) \simeq e^{itm} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

A questo punto, sommare due gaussiane significa moltiplicare le due funzioni caratteristiche. Si ha quindi:

$$\mathcal{F}(x_1 + x_2) \simeq e^{itm_1} e^{-\frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2} e^{itm_2} e^{-\frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2} = e^{it(m_1+m_2)} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2} \quad (\text{A.46})$$

che è la funzione caratteristica di una gaussiana di valore medio  $m = m_1 + m_2$  e varianza  $\sigma^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$ .

Per comodità possiamo quindi dire che la funzione caratteristica di una gaussiana  $G_{0,1}$  è:



$$\mathcal{F}(G_{0,1}(x)) = e^{-|t|^2} \quad (\text{A.47})$$

La funzione caratteristica di una funzione di Cauchy (A.31) è:

$$\mathcal{F}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = e^{-|t|} \quad (\text{A.48})$$

Come al solito Lévy propone una generalizzazione delle (A.47) e (A.48) da applicare ad una generica distribuzione di Lévy  $P_\alpha(x)$  che soddisfi alla (A.35) di §A.1.4:

$$\mathcal{F}(P_\alpha(x)) = e^{-|t|^\alpha} \quad (\text{A.49})$$

Dalla (A.49) si ricava immediatamente che:

$$\mathcal{F}\left(\sum_{i=1}^k P_\alpha(x_i)\right) = e^{-k|t|^\alpha} \quad (\text{A.50})$$

Dal che si deduce che: • per una gaussiana:  $\alpha = 2$  e (vedi il §A.1.4)  $s^2 = \sum s_i^2$ ;

• per una distribuzione di Cauchy:  $\alpha = 1$  e  $s = \sum s_i$ .

Per  $\alpha > 2$  si ottengono funzioni con valori negativi, che non possono rappresentare densità di probabilità.

Il *Teorema del limite centrale* viene pertanto generalizzato da Lévy per i valori nell'intervallo  $1 \leq \alpha \leq 2$ . Per valori  $\alpha < 1$  non esiste alcun *limite centrale* perché -come abbiamo visto per le variabili aleatorie iperboliche- anche il valore medio diverge. Tuttavia, dato un numero qualsivoglia  $s > 1$ , per una qualsiasi variabile aleatoria  $x_i$  che segua una generica distribuzione di Lévy, si ha:

$$Pr(|x_i| \geq s) \div s^{-\alpha}$$

Per la distribuzione del moto browniano del Cap. 4, la legge di Einstein verifica che  $\alpha = 1/2$  (in quella sede il parametro si chiamava parametro di Hurst).

Ciò ci permette di estendere alle distribuzioni iperboliche il significato di  $\alpha$  ed accettare valori di  $\alpha$  nell'intervallo:

$$0 < \alpha \leq 2$$

Va sottolineato che  $\alpha = 1$  è un valore singolare e abbiamo visto che nel Cap. 8, a proposito dei multifrattali universali, esso viene trattato “a parte”.

Riassumendo:  $\alpha = 2$  è caratteristico di generatori aleatori gaussiani ;  $\alpha = 1$  è caratteristico di generatori di Cauchy a varianza infinita;  $0 \leq \alpha < 1$  è caratteristico di generatori multifrattali iperboliche con valore medio e varianza infiniti.

Il caso  $\alpha = 0$  corrisponde al caso di un monofrattale “rigido”, di tipo stocastico, di cui, tuttavia il frattale geometrico costituisce un sottoinsieme. Un modello  $\beta$  è caratterizzato da  $\alpha = 0$  in quanto non ci sono possibili fluttuazioni in geometria.

Il parametro di Lévy quindi, gioca un ruolo ineliminabile nella costruzione dei Multifrattali Universali da parte di Schertzer e Lovejoy trattati nel Capitolo 8.

## A.5 Affidabilità delle stime

Alla luce di quanto discusso nei paragrafi precedenti, è opportuno studiare ora come si esegue normalmente la “stima” di una variabile stocastica e quale “attendibilità” si possa attribuire a tale stima.

Solitamente, per stimare la media di una variabile aleatoria  $\{x_i\}$  si usa la espressione:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i = \frac{\sum x_i}{\sum i}$$

dove il valori  $x_i$  sono estratti da una distribuzione (ignota)  $\{x_i\}$  (per il caso della distribuzione di Cauchy, che non ammette media, non ha senso porsi il problema di stimare il valor medio: sarà più opportuno stimare la moda o la mediana, ma ciò non ci interessa in questo momento).

Una misura della affidabilità della stima può essere la sua varianza, che “non è” la varianza delle distribuzione “teorica” della variabile aleatoria  $\{x_i\}$ .

Quando si ha a che fare con valori  $\{x_i\}$  estratti da una gaussiana (A.8), la affidabilità del valor medio è:

$$s^2(\bar{x}) = s^2 \left( \frac{1}{N} \sum x_i \right) = \frac{1}{N} s^2 \left( \sum x_i \right) \quad (\text{A.51})$$

Poichè tutti i punti sono estratti dalla stessa distribuzione “teoricamente” gaussiana”, si ha, per il teorema del limite centrale:

$$s^2(\bar{x}) = \frac{1}{N^2} \left( \sum s^2 x_i \right) = \frac{N}{N^2} s^2 = \frac{s^2}{N}$$

Per una gaussiana l'errore sulla stima del valor medio decresce come  $\frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Nel caso generale della formula (A.35), invece, la affidabilità della stima del valor medio si scrive:

$$s^\alpha(\bar{x}) = s^\alpha \left( \frac{1}{N} \sum x_i \right) = \frac{1}{N^\alpha} \left( \sum s^\alpha x_i \right) = \frac{1}{N^\alpha} N s^\alpha$$

cioè:

$$s^\alpha(\bar{x}) = \frac{s^\alpha}{N^{\alpha-1}} \quad (\text{A.52})$$

Nel caso che i valori delle variabili  $\{x_i\}$  siano estratte da una distribuzione di Cauchy ( $\alpha = 1$ ) si ottiene per la media del campione *finito*  $x_m$ , per esempio:

$$s(x_m) = \frac{s^\alpha}{N^0} = s \quad (\text{A.53})$$

Ovverossia, per una distribuzione di Cauchy l'errore sulla stima della media è indipendente dal numero  $N$  di stime indipendenti eseguite.

Nel caso che i valori delle variabili  $\{x_i\}$  siano estratte da una distribuzione caratterizzata da  $\alpha = \frac{1}{2}$ , si ottiene:

$$\sqrt{\bar{x}} = \sqrt{N} s$$

Da cui:

$$s_{brown}(\bar{x}) = N s_{brown} \quad (\text{A.54})$$

Dal Cap.4, riconosciamo immediatamente che questo è il caso del moto browniano gaussiano. Il parametro di Hurst coincide concettualmente con il parametro di Lévy  $\alpha$ . Nello studio del moto browniano  $n\tau$  era “l’intervallo di tempo” dopo il quale si osservavano le nuove posizioni e gli spostamenti casuali e l’intervallo di tempo usato per misurare gli spostamenti  $\xi_i$ .

È molto chiaro che, allungando l’intervallo di tempo tra due osservazioni, la indeterminazione sulla posizione media e sullo spostamento medio cresce. Infatti le traiettorie del moto browniano, per il teorema di Louiville, al limite riempiono tutto lo spazio.

È anche molto chiaro che il moto browniano frazionale del Cap. 4 si inserisce perfettamente nel panorama costruito con la estensione di Lévy del teorema del limite centrale.

## A.6 Distribuzioni bivariate gaussiane

Prima di addentrarci nella discussione delle distribuzioni multivariate (e qui limitate al solo caso delle bivariate), occorre richiamare il concetto di probabilità composta di eventi stocasticamente indipendenti.

Qualora un evento  $E$  risulti dal concorso simultaneo di due o più eventi  $E_1, E_2, \dots$ , si può calcolare la probabilità composta di  $E$  qualora si conoscano le probabilità semplici di  $E_1, E_2, \dots$ . Prendiamo come semplice esempio illustrativo l’estrazione di due palline bianche ciascuna da due differenti urne di cui siano note le composizioni. Se la prima urna contiene  $n_1$  palline di cui  $a_1$  bianche mentre la seconda  $n_2$  di cui  $a_2$  bianche, il numero di casi possibile è pari a  $n_1 n_2$  mentre il numero di casi favorevoli è  $a_1 a_2$ . Si ha allora:

$$p_{1,2} = \frac{a_1 a_2}{n_1 n_2} = \frac{a_1}{n_1} \frac{a_2}{n_2} = p_1 p_2. \quad (\text{A.55})$$

Abbiamo così dedotto, grazie ad un semplice esempio, la regola generale per la composizione di probabilità a priori: *la probabilità che due eventi incorrelati si verificano contemporaneamente è uguale al prodotto delle singole probabilità.*

Si è dovuto però precisare che gli eventi devono essere *incorrelati o stocasticamente indipendenti*, vale a dire che il verificarsi dell'uno non alteri la probabilità di verificarsi dell'altro. Se questo non è vero la A.55 va adeguatamente modificata.

In statistica, purtroppo, non esistono soltanto variabili aleatorie stocasticamente indipendenti: esistono anche moltissime variabili che sono tra loro correlate, pur senza mostrare una interdipendenza funzionale.

È necessario avere pertanto gli strumenti anche per trattare questi casi.

Per farla breve, supponiamo quindi di avere due variabili aleatorie  $\{x'_i\}$  e  $\{y'_i\}$  distribuite normalmente attorno ai valori medi  $\bar{x}'$  e  $\bar{y}'$  con varianze  $\sigma_{x'}^2$  e  $\sigma_{y'}^2$ . Le probabilità marginali si scrivono:

$$P(x') = \frac{1}{\sigma_{x'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x'-\bar{x}')^2}{2\sigma_{x'}^2}} \quad ; \quad P(y') = \frac{1}{\sigma_{y'}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y'-\bar{y}')^2}{2\sigma_{y'}^2}}$$

Se le variabili  $\{x'_i\}$  e  $\{y'_i\}$  sono stocasticamente indipendenti e perciò completamente scorrelate, la distribuzione aleatoria congiunta dei punti  $(x'_i, y'_j)$  nello spazio bidimensionale è il semplice prodotto delle due probabilità marginali:

$$P(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma_{x'}\sigma_{y'}} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x'-\bar{x}')^2}{2\sigma_{x'}^2} + \frac{(y'-\bar{y}')^2}{2\sigma_{y'}^2}\right]} \quad (\text{A.56})$$

ovverossia, usando le variabili ridotte  $x = \frac{x'-\bar{x}'}{\sigma_{x'}}$  e  $y = \frac{y'-\bar{y}'}{\sigma_{y'}}$ :

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \quad (\text{A.57})$$

## FREQUENZE DI CORRELAZIONE DI REGRESSIONE

Statura (pollici)	dei padri																Totale		
	58,5	59,5	60,5	61,5	62,5	63,5	64,5	65,5	66,5	67,5	68,5	69,5	70,5	71,5	72,5	73,5		74,5	75,5
52,5	—	—	—	—	0,25	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5
53,5	—	—	—	—	0,25	0,25	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5
54,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—
55,5	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1
56,5	0,25	0,25	—	0,25	1,25	0,5	—	1	0,5	0,5	—	—	—	—	—	—	—	—	4,5
57,5	0,25	0,25	0,5	1,5	4,5	1	1,5	1,5	2,5	—	0,5	0,5	—	—	—	—	—	—	14,5
58,5	0,25	0,75	0,5	0,75	0,75	1	1,75	1,25	5	2,75	0,5	0,25	—	—	—	—	—	—	15,5
59,5	0,5	1	2	—	6	4,75	5	6,25	11,75	3,5	3,5	2	1,75	0,5	—	—	—	—	48,5
60,5	0,75	0,75	—	2,5	8	6,25	12,5	18,25	20,25	11	9	4,75	2,5	1,25	1,25	—	—	—	99
61,5	—	0,5	1,75	2	9,75	11,5	13	23,75	23,75	20,25	16,5	10,25	4,25	3	1,25	—	—	—	141,5
62,5	—	1	2,25	2	4,5	12	22,75	26	33	28,25	24,75	14,25	13,75	4,75	0,75	0,5	—	—	190,5
63,5	—	—	0,25	2	6	8,25	11	27,25	35,75	37,25	31,5	26,25	16,25	7,75	1,5	0,75	0,25	—	212
64,5	—	—	0,25	2,5	1,75	3,25	9,25	23	18,75	28,5	33	34,25	24,5	11,75	5,5	1	0,25	1	198,5
65,5	—	—	—	0,5	1	0,5	11	12,25	9,25	19,75	30	26,5	22,25	15	4,75	3,75	2	1	159,5
66,5	—	—	—	0,5	0,5	1,5	3,25	7,25	8,75	16	26,25	26,75	20,5	18,5	7,75	4,25	0,25	0,5	142,5
67,5	—	—	—	—	—	—	1	5,75	7	4	14,25	13,25	12	11,25	4,5	3,75	0,75	—	77,5
68,5	—	—	—	—	0,25	0,25	0,25	0,25	1,5	3	5,5	4,25	5,75	5,25	3,75	2,5	1,5	2	36
69,5	—	—	—	—	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	0,25	1	2,5	6,5	2,25	2,75	2	1	—	19,5
70,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1,75	0,25	4,5	0,75	1,25	0,75	0,25	—	9,5
71,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	0,5	—	0,5	0,5	1,5	0,75	0,25	—	4
72,5	—	—	—	—	—	—	—	—	—	—	1	—	—	—	—	—	—	—	1
Totale	2	4,5	7,5	14,5	45	51,5	92,5	155	178	175	199,5	166	135	82,5	36,5	20	6,5	4,5	1376

Figura A.2: Frequenze di correlazione e di regressione.

Se invece le variabili *non* sono stocasticamente indipendenti, non necessariamente legate da una relazione funzionale, bensì statisticamente interdipendenti, come ad esempio la altezza dei genitori e la altezza dei figli -cresciuti senza particolare ausilio di vitamine o di ..... coadiuvanti chimici speciali- illustrata in fig. A.2, (nella figura è indicato il confine della regione di maggiore concentrazione dei valori di altezza attorno ai valori medi), la (A.57) si scrive:

$$P(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}\xi^2} \quad (\text{A.58})$$

dove però ora  $\xi$  è una forma quadratica generica del tipo:

$$\xi^2 = ax^2 + 2bxy + cy^2.$$

È utile introdurre il cambiamento di variabile:

$$z = c(y - rx) \quad ; \quad \xi^2 = x^2 + z^2 \quad (\text{A.59})$$

Con questa ultima assunzione, la prima delle (A.59) definisce la *curva di regressione* delle variabili  $y$  e  $x$  per le quali esistono  $n$  punti nel piano  $(x, y)$ . La curva di regressione ed il valore di  $r$  si possono determinare sperimentalmente.

Detto  $\rho$  il valor medio di  $r$ , esso è definito come:

$$\rho = \overline{xy} = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \quad (\text{A.60})$$

La varianza di  $z$  risulta allora:

$$\sigma_z^2 = (1 - \rho^2)$$

La distribuzione marginale di  $z$  diventa scorrelata da  $x$  ed è data da:

$$P(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{(y-\rho x)^2}{2(1-\rho^2)}} = P(x, y)$$

per cui la distribuzione (A.58) diventa il prodotto delle due distribuzioni marginali scorrelate:

$$P(x, y) = p(x)p(z) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1-\rho^2}} \quad (\text{A.61})$$

Partendo da  $x'$  e  $y'$ , la determinazione di  $\rho$  si ottiene mediante una estensione della (A.60):

$$\rho = \frac{\overline{x'y'}}{\sigma_{x'}\sigma_{y'}} = \frac{\sum_{i,j=1}^n x'_i y'_j}{\sigma_{x'}\sigma_{y'}} \quad (\text{A.62})$$

Per  $n$  misure, il valore di  $\rho$  è distribuito *quasi* gaussianamente con varianza:

$$\sigma_\rho = \frac{1 - \rho^2}{n - 1} \quad (\text{A.63})$$

Il significato delle bivariate gaussiane qui considerato si mette bene in evidenza graficamente. Per una gaussiana ridotta monodimensionale, le fluttuazioni attorno allo zero hanno varianza  $\sigma^2 = 1$ . La probabilità che un evento della distribuzione cada nell'intervallo  $(-1, +1)$  è del 68.3 %. L'intervallo  $(0, 1)$  rappresenta, per convenzione, l'incertezza con cui si determina il valore  $p(x) = 0$  che è il valore di aspettazione della media di  $x' - \bar{x}'$ .

Per il caso della distribuzione congiunta bivariata di  $(x, y)$ , con  $x$  e  $y$  non correlate tra loro, il 68.3 % è la probabilità che un punto  $(x, y)$  cada entro un cerchio di centro  $(0, 0)$  e di raggio  $(x^2 + y^2) \leq 1$ . Tale cerchio rappresenta la incertezza con cui si determina il punto  $(0, 0)$  e si chiama *cerchio di concentrazione*.

La situazione è illustrata nella fig. A.3a.

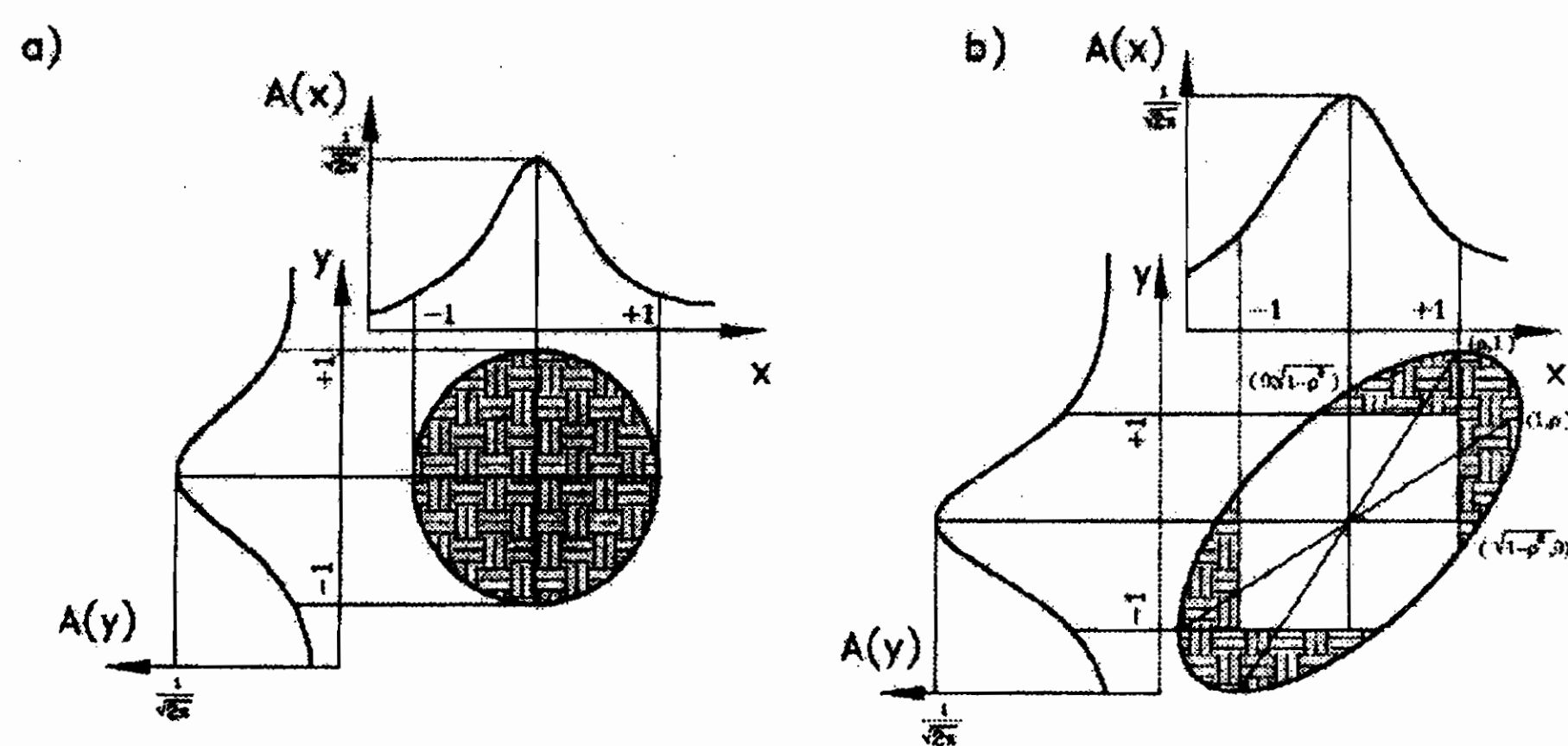


Figura A.3: a- Cerchio di concentrazione di una distribuzione bivariata senza correlazione; b- ellisse di concentrazione di una distribuzione bivariata in presenza di un coefficiente di correlazione  $\rho$ .

Nel caso, invece, della distribuzione congiunta bivariata di  $x$  e  $y$  con coefficiente di correlazione  $\rho$ , il valore 68.3 % rappresenta la probabilità che un punto  $(x, y)$  cada entro l'ellisse di centro  $(0, 0)$  definito dalla disequazione:



$$\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{1 - \rho^2} \leq 1 \quad (\text{A.64})$$

L'ellisse è compreso in un quadrato di lato  $l = 2$  e si chiama *ellisse di concentrazione*. La regione di indeterminazione “non” è ricavabile dalla sola conoscenza delle distribuzioni marginali. Infatti, se si integra la (A.61) in  $x$  o in  $y$ , il coefficiente di correlazione  $\rho$  scompare. Esistono punti  $(x, y)$  appartenenti all'ellisse di concentrazione che distano più di 1 dal centro. La situazione è illustrata nella fig. A.3b.

## A.7 Funzioni e integrali di correlazione

Pensiamo di eseguire l'analisi statistica di  $m$  variabili aleatorie  $\{y_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, m$  (per esempio gli impulsi -longitudinali- di  $m$  particelle prodotte in una interazione di alta energia; oppure le energie di  $m$  fotoni emessi da una superficie). Assumiamo che la variabile  $y$  possa assumere valori nell'intervallo  $\Delta = y_{max} - y_{min}$  e che questo dominio venga suddiviso in intervallini di ampiezza:  $\delta = \frac{\Delta}{n}$ .

Per comodità prendiamo come esempio una interazione  $a + b \rightarrow \sum c_i$  e chiamiamo *rapidità* la variabile  $y_i$ . Ogni particella ha quindi rapidità  $y_i$ . Oltre alle  $N_1 = m$  particelle prodotte, possiamo costruire  $N_2$  “coppie” di particelle prodotte;  $N_3$  “terne” di particelle prodotte,  $\dots$   $N_q$  “q-pletti” di particelle prodotte (È più che chiaro che esiste *un solo* “m-pletto” di particelle).

Possiamo pertanto costruire la distribuzione di densità di probabilità di “particella singola” nello spazio delle fasi (detta semplicemente “distribuzione di particella singola”)  $\rho_1$ , definita come:

$$\rho_1 = \frac{1}{m} \frac{dN}{dy_1} = \sum_{i=1}^m \delta(y - y_i) \quad (\text{A.65})$$

ovvero la “percentuale media” di particelle che cadono nell'intervallo di rapidità compreso tra  $y_i$  e  $y_i + \delta$ . Nella (A.65),  $y_i$  indica una qualsiasi posizione all'interno dell'intervallino  $\delta_i(y)$  (cfr. la distribuzione rettangolare del §A.2.1).

Si può costruire la “densità a due particelle”  $\rho_2$ , definita come:

$$\rho_2 = \rho_2(y_i, y_j) = \frac{1}{m} \frac{d^2 N}{dy_1 dy_2} = \sum_{i,j} \delta(y - y_i) \delta(y - y_j) \quad (\text{A.66})$$

In generale si può costruire la densità a  $q$  particelle definita come:

$$\begin{aligned} \rho_q = \rho_q(y_i, y_j, \dots, y_q) &= \frac{1}{m} \frac{d^q N}{dy_1 dy_2 \dots dy_q} = \\ &= \sum_{i,j} \left( \prod_{p=1}^q \delta(y - y_p) \right) \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Dalle relazioni che definiscono le densità di probabilità si ricavano i coefficienti di correlazione o, meglio, indicatori più appropriati che si chiamano *cumulanti*. Per esempio:

$$C_2(y_1, y_2) = \rho_2(y_1, y_2) - \rho_1(y_1)\rho_1(y_2) \quad (\text{A.68})$$

La loro utilità si vede immediatamente in quanto, se *non* c'è correlazione, le distribuzioni si possono fattorizzare per cui è  $\rho(y_1, y_2) = \rho_1(y_1)\rho_1(y_2)$ , da cui  $C_2 = 0$ .

Rimandando i dettagli a referenze specializzate[158] scriviamo semplicemente le espressioni di  $C_3$  e  $C_4$ , ponendo  $y_i = i$  per semplicità di scrittura:

$$\begin{aligned} C_3(y_1, y_2, y_3) &= \rho_3(1, 2, 3) - \rho_2(1, 2)\rho_1(3) - \rho_2(1, 3)\rho_1(2) - \\ &\quad - \rho_2(2, 3)\rho_1(1) + 2\rho_1(1)\rho_1(2)\rho_1(3) \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

$$\begin{aligned} C_4(y_1, y_2, y_3, y_4) &= \rho_4(1, 2, 3, 4) - \sum_j \rho_3(a, b, c)\rho_1(j) - \\ &\quad - \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_2(i, j) + 2 \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_1(i)\rho_1(j) - 6 \prod_{i=1}^4 \rho_1(i) \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

dove  $i, j = 1, 2, 3, 4$  e  $a, b, c, d$  sono gli indici 1, 2, 3, 4 *non* usati nella sommatoria.

Dalle (A.68),(A.69),(A.70), si ricavano la seguenti espressioni:

$$\rho_2(y_1, y_2) = C_2(1, 2) + \rho_1(1)\rho_1(2) \quad (\text{A.71})$$

$$\rho_3(y_1, y_2, y_3) = C_3(1, 2, 3) - 2 \prod_{i=1}^3 \rho_1(i) + \sum_{i=1}^3 \rho_2(a, b)\rho_1(i) \quad (\text{A.72})$$

$$\begin{aligned} \rho_4(y_1, y_2, y_3, y_4) = & C_4(1, 2, 3, 4) + 6 \prod_{i=1}^4 \rho_1(i) + \\ & + \sum_j \rho_3(a, b, c)\rho_1(j) + \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_2(i, j) - \\ & - 2 \sum_{i,j} \rho_2(a, b)\rho_1(i)\rho_1(j) \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

Molto spesso si usano le *grandezze normalizzate*:

$$r_q(1, 2, \dots, q) = \frac{\rho_q(1, 2, \dots, q)}{\prod_{i=1}^q \rho_1(i)} \quad R_q = \frac{C_q(1, 2, \dots, q)}{\prod_{i=1}^q \rho_1(i)} \quad (\text{A.74})$$

Queste le definizioni. Veniamo ora al *come* questi indicatori statistici vengono costruiti. Cominciamo da  $\rho_2$ : abbiamo  $N_s$  eventi di un campione statistico, ciascuno con  $m$  particelle,  $c_1, c_2, \dots, c_m$ . Ciascun evento è rappresentato quindi da un vettore  $\{y_i\} = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}$ .

- Prepariamo una matrice vuota  $\rho_2(y_1, y_2)$  destinata a generare la correlazione;

- prendiamo il primo evento: scegliamo una coppia generica  $(y_i, y_j)$  ed aggiungiamo una unità alla matrice  $\rho_2(y_1, y_2)$ , nella casella  $[y_i, y_j]$ . Quante volte possiamo fare tale operazione? La eseguiamo  $m(m-1)$  volte. Infatti, possiamo scegliere la rapidità della prima particella in  $m$  modi diversi e la rapidità della seconda particella in  $m-1$  modi diversi (così facendo, ogni coppia è stata contata due volte -*double counting*- ma questo è un difetto facilmente riparabile dividendo per 2)<sup>3</sup>.

---

<sup>3</sup>per particelle di segno diverso -diciamo  $m^+$  positive e  $m^-$  negative, la costruzione di  $\rho_2(+, -)$  si farebbe con  $m^+m^-$  contributi per evento.

- Ripetiamo il procedimento  $N_s$  volte, per quanti sono gli eventi del campione [a rigore  $m$  potrebbe cambiare da evento ad evento, come accade nelle analisi inclusive (cfr. il Cap. 10)].

- Infine facciamo la media di quanto ottenuto dividendo ogni contenuto delle caselle  $[y_i, y_j]$  per  $N_s$  (per  $2N_s$  se vogliamo tener conto del *double counting*).

Fatto questo esercizietto, sappiamo come costruire  $\rho_q(1, 2, \dots, q)$  a  $q$  particelle.

- Dal primo evento di  $m$  particelle con vettore rapidità  $\{y_i\}$  prendiamo un insieme ordinato di  $q$  valori  $(y_1, y_2, \dots, y_q)$  ed aggiungiamo “uno” alla matrice  $\rho_q(y_1, y_2, \dots, y_q)$ , nella cella  $[y_1, y_2, \dots, y_q]$ . Quante volte possiamo fare questa operazione? La possiamo fare  $[m(m-1)(m-2) \dots (m-q+1)]$  volte. Infatti possiamo scegliere la rapidità della prima particella in  $m$  modi diversi; la rapidità della seconda particella in  $(m-1)$  modi diversi, fino ad avere  $(m-q+1)$  rapidità rimaste non ancora scelte (a rigore ogni scelta può essere fatta  $q$  volte se si permettono tutte le permutazioni delle  $q$  particelle senza “ordinarle” come da noi suggerito).

- Ripetiamo il procedimento  $N_s$  volte, per quanti sono gli eventi del campione (ancora una volta, a rigore,  $m$  potrebbe cambiare da evento ad evento, come accade nelle analisi inclusive, consci che gli eventi con  $m \leq q-1$  particelle *non* possono contribuire a  $\rho_q!$ ).

- Infine facciamo la media di quanto ottenuto dividendo ogni contenuto delle caselle  $[y_i, y_j, \dots, y_q]$  per  $N_{s,q}$  (per  $qN_{s,q}$  se vogliamo tener conto del *conteggio multiplo*).

Interessiamoci ora di un aspetto puramente numerologico: non preoccupiamoci, cioè, degli indicatori di correlazione a  $2, 3, \dots, q$  particelle, bensì preoccupiamoci soltanto di *contare* il numero di tutte le coppie possibili, di tutte le terne possibili, ... , di tutti i  $q$ -pletti possibili (lo studio delle correlazioni investe un campo molto interessante della fisica delle particelle elementari ma, dal punto di vista delle *fluttuazioni possibili* ci interessa di più studiare eventualmente quante particelle hanno la rapidità compresa in un intervallino  $\delta$  -magari sempre

più piccolo- e quali sono le fluttuazioni che si osservano in una tale distribuzione).

L'estimatore statistico di questi conteggi si chiama *momento (statistico) binomiale* ( o momento fattoriale "non" normalizzato)  $F_Q$ .

Infatti i conteggi delle coppie si possono ricondurre ai seguenti integrali fatti su un dominio di integrazione che è un ipercubo nello spazio delle fasi, di spigolo  $\Delta_i$  e quindi di volume  $\Omega_2$ , per le coppie,  $\Omega_3$  per le terne, .... ,  $\Omega_q$  per i q-pletti:

$$\int_{\Omega_2} dy_1 dy_2 \rho_2(y_1, y_2) = \overline{m(m-1)} = F_2 \quad (\text{A.75})$$

$$\int_{\Omega_3} dy_1 dy_2 dy_3 \rho_3(y_1, y_2, y_3) = \overline{m(m-1)(m-2)} = F_3 \quad (\text{A.76})$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_q} dy_1 \cdots dy_q \rho_q(y_1, \cdots, y_q) = \\ & = \overline{m(m-1)(m-2) \cdots (m-q+1)} = F_q \end{aligned} \quad (\text{A.77})$$

Ovviamente è:

$$\int_{\Omega} dy = \overline{m} = F_1.$$

Se ricordiamo che, all'inizio del paragrafo dalle densità a più particelle abbiamo ricavato i cumulanti statistici, altrettanto, con formule analoghe alle (A.68),(A.69),(A.70), si definiscono i *momenti cumulanti binomiali* ovvero *momenti cumulanti fattoriali non normalizzati*  $K_q$ :

$$K_2 = \overline{m(m-1)} - \overline{m}^2 \quad (\text{A.78})$$

$$K_3 = \overline{m(m-1)(m-2)} - 3\overline{m} \cdot \overline{m(m-1)} - \overline{m}^3 \quad (\text{A.79})$$

$$\begin{aligned}
K_4 = & \overline{m(m-1)(m-2)(m-3)} - \\
& -4\overline{m} \cdot \overline{m(m-1)(m-2)} - \\
& -3\overline{m(m-1)}^2 + \\
& -6\overline{m(m-1)}\overline{m}^2 - \overline{m}^4
\end{aligned} \tag{A.80}$$

o, per il caso generale[159]:

$$\begin{aligned}
K_q = q! & \left[ (-1)^{(m_1-1)} (m_1-1)! \delta\left(q - \sum_{j=1}^q m_j\right) \right] \\
& \prod_{j=1}^m \frac{1}{(m_j - m_{j+1})!} \left( \frac{\overline{F}_q}{q!} \right)^{(m_j - m_{j-1})}
\end{aligned} \tag{A.81}$$

Va specificato che la sommatoria  $\sum_{j=1}^q$  corre su tutti i valori (ricordiamo “ordinati”)  $m_j \geq m_{j+1}$ . Per esempio, per  $m_1$ ,  $j = 1, 2, \dots, q$ ; per  $m_2$ ,  $j = 2, 3, \dots, q$ ; per  $m_j$ ,  $j = j+1, j+2, \dots, q$ .

I momenti cumulanti binomiali  $K_q$  misurano il discostarsi da una statistica di variabili casuali stocasticamente indipendenti. Per variabili *non* correlate, i momenti cumulanti binomiali si annullano.

Vale la pena di sottolineare che, invertendo la (A.81), i momenti binomiali (non normalizzati)  $F_q$  si possono scomporre in termini di momenti cumulanti binomiali ottenendo:

$$\begin{aligned}
F_q = q! & \left[ \delta\left(q - \sum_{j=1}^q m_j\right) \right] \\
& \prod_{j=1}^m \frac{1}{(m_j - m_{j+1})!} \left( \frac{K_q}{q!} \right)^{(m_j - m_{j-1})}
\end{aligned} \tag{A.82}$$

con le stesse specificazioni fatte per la (A.81).

## A.8 Funzioni generatrici

La relazione tra momenti binomiali e momenti cumulanti binomiali si semplificano e diventano più evidenti introducendo le funzioni generatrici  $Q(z)$  definite come:

$$Q(z) = \sum_{q=0}^{\infty} \frac{(-z)^q}{q!} F_q \quad (\text{A.83})$$

$$\log Q(z) = \sum_{q=1}^{\infty} \frac{(-z)^q}{q!} K_q \quad (\text{A.84})$$

(si noti che nella (A.83) la sommatoria parte da  $q = 0$  mentre nella (A.84) la sommatoria parte da  $q = 1$ ).

Qualche semplice esempio illustra l'utilità delle (A.83) e (A.84).

Prendiamo una distribuzione di Poisson (A.7), scritta per la osservazione di  $m$  eventi che fluttuano attorno al valore  $\bar{m}$ :

$$P_m(\bar{m}) = \frac{\bar{m}^m}{m!} e^{-\bar{m}}$$

Per essa la funzione generatrice è:

$$Q(z) = e^{-z\bar{m}} ; \quad \log Q(z) = -z\bar{m}$$

da cui:

$$F_1 = \bar{m} ; \quad K_1 = \bar{m}$$

$$F_2 = F_3 = \dots = F_q = 0 ; \quad K_2 = K_3 = \dots = K_q = 0$$

La distribuzione di Poisson descrive una distribuzione a *fluttuazione minima*. Si noti infatti che, dalla (A.78), per  $m$  grande e pertanto per  $m \sim m - 1$ .  $K_2$  diventa la dispersione:

$$K_2 = D \sim \overline{m^2} - \overline{m}^2$$

Un secondo esempio è fornito dalla distribuzione binomiale negativa[161]:

$$P_m^k = \frac{(m+k-1)! \left(\frac{\overline{m}}{k}\right)^m}{m!(k-1)! \left(1 + \frac{\overline{m}}{k}\right)^{m+k}} \quad (\text{A.85})$$

la cui funzione generatrice è:

$$Q_k(z) = \left(1 + \frac{z\overline{m}}{k}\right)^k$$

I momenti binomiali  $F_q$  sono semplicemente:

$$F_1 = 1; F_2 = 1 + \frac{1}{k}; F_3 = 1 + \frac{3}{k} + \frac{2}{k^2}; F_4 = 1 + \frac{11}{k^2} + \frac{6}{k^3};$$

$$F_5 = 1 + \frac{10}{k} + \frac{35}{k^2} + \frac{50}{k^3} + \frac{24}{k^4}$$

e i momenti cumulanti binomiali sono semplicemente:

$$K_q = \frac{(q-1)!}{k^{q-1}}$$

cioè:

$$K_1 = 1; K_2 = \frac{1}{k}; K_3 = \frac{1}{k^2}; \dots$$

## A.9 Conclusioni

Gli argomenti di statistica possono facilmente riempire grossi volumi ma qui si è voluto raccogliere gli elementi essenziali ed indispensabili per affrontare i problemi e soprattutto per giustificare il metodo usato per la loro trattazione.

Per i lettori che vogliono approfondire gli aspetti statistici e probabilistici degli svariati problemi che si possono incontrare nella vita di tutti i gironi e nella ricerca scientifica, da un punto rigorosamente matematico di livello avanzato si suggerisce la referenza[39].



# Appendix B

## Le Variabili cinematiche

### B.1 Introduzione

Ogni reazione fra particelle elementari che porti alla produzione di  $n$  corpi nello finale,

$$a + b \rightarrow c_1 + c_2 + \cdots + c_n \quad (\text{B.1})$$

dipende da  $(3n - 4)$  variabili indipendenti. Infatti, ogni particella  $c_i$  è descritta da 4 variabili: le quattro componenti del suo tetra-impulso  $(E_i, p_x, p_y, p_z)$  [ovvero l'impulso  $\mathbf{p}_i$  e la massa  $m_i$ ]. Ciò porta a  $4n$  variabili. Tuttavia, non tutte queste variabili sono indipendenti. Tra ogni quaterna esiste la relazione:  $E_i^2 - p_{x,i}^2 - p_{y,i}^2 - p_{z,i}^2 = m_i^2$ . In aggiunta, nel centro di massa della reazione (a+b), valgono le quattro relazioni di conservazione dell'energia e dell'impulso:

$$\sum_i \mathbf{p}_i = 0 \quad e \quad \sum_i E_i = E_{tot}$$

Le variabili indipendenti sono quindi,  $4n - n - 4 = 3n - 4$ . Una reazione a due corpi, come la diffusione elastica è descrivibile da  $3 \cdot 2 - 4 = 2$  variabili indipendenti, che possono essere scelte a priori, in modo del tutto arbitrario. Una scelta conveniente può cadere sulla energia totale nel sistema del centro di massa [c.m.s.]  $E_{tot}$  alla quale la collisione avviene e sull'angolo di scattering  $\theta$ .

## B.2 Le Variabili di Mandelstam

È opportuno e comodo usare -fin quando è possibile- quali variabili indipendenti- grandezze fisiche che siano anche invarianti relativistici, ossia che restino costanti sotto trasformazione di Lorentz, in modo che, sia la formulazione teorica, sia i valori numerici dei dati sperimentali, risultino indipendenti dal sistema di riferimento [nel quale sono stati rispettivamente calcolati o misurati].

Se, per brevità, schematizziamo la reazione a due corpi in esame:  $1+2 \rightarrow 3+4$ , come in fig. B.1, in cui abbiamo indicato semplicemente con  $p_1, p_2, p_3, p_4$  i quadrivettori relativistici (e ricordiamo che, per definizione, il quadrato di un quadrivettore è un invariante relativistico), tenendo presente la conservazione del quadrimpulso, possiamo *confezionare* al più tre invarianti confacenti al nostro scopo:

$$\begin{cases} s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2 \\ t = (p_1 - p_3)^2 = (p_2 - p_4)^2 \\ u = (p_1 - p_4)^2 = (p_2 - p_3)^2 \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

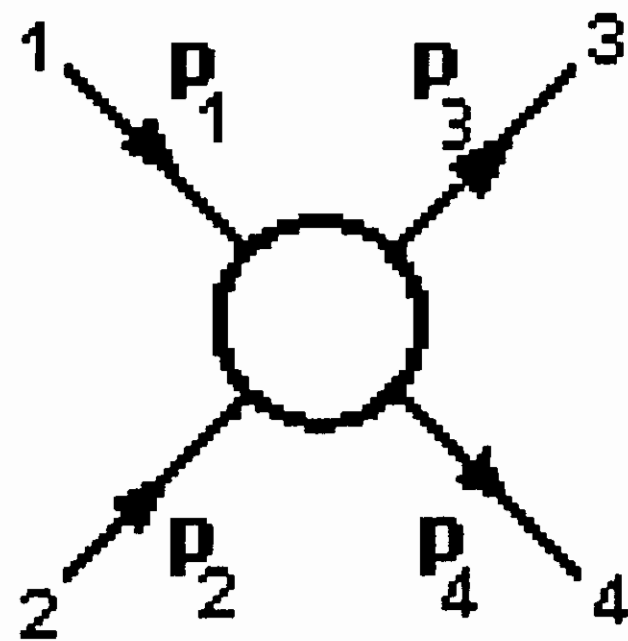


Figura B.1: Rappresentazione di Mandelstam di una reazione a due corpi.

Le variabili  $s, t, u$  sono note come *variabili di Mandelstam* e su di esse si possono fare alcune interessanti osservazioni:

- poichè ogni reazione a due corpi dipende da due sole variabili indipendenti,  $s, t$  ed  $u$  non possono essere indipendenti tra loro. Sono

infatti legate dalla relazione<sup>1</sup>:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \quad (\text{B.3})$$

in cui  $m_1, m_2, m_3, m_4$  sono le masse delle particelle in gioco.

Nella reazione  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$  si può verificare facilmente che è:  $s \geq 0; t \leq 0; u \leq 0$ , ed in particolare è possibile identificare  $s$  come il quadrato della energia totale nel c.m.s.  $E_{tot}$ , mentre  $t$  ed  $u$  sono i quadrati dei quadrimomenti trasferiti dalla particella entrante alla particella uscente indicate nella fig. B.1.

Nell'ipotesi in cui  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ , si dimostra facilmente<sup>2</sup> che:

$$\begin{cases} t = -2q^2(1 - \cos \theta) \\ u = -2q^2(1 + \cos \theta) \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

dove  $q$  è il modulo del trimomento delle particelle (nella nostra ipotesi di masse uguali si dimostra che  $q_1 = q_2 = q_3 = q_4$ ) e  $\theta$  è l'angolo di scattering nel c.m.s. Come vedremo, anche se non vale la condizione di uguaglianza delle masse,  $t$  ed  $u$  dipendono in modo ancora semplice da  $\cos \theta$ .

### B.3 Canale Diretto e Canale Incrociato

Uno dei grandi vantaggi della rappresentazione di Mandelstam sta nella possibilità, che essa ci fornisce, di descrivere, partendo dalla reazione  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , sei processi, ovvero tanti quanti sono i modi in cui si può scegliere lo stato iniziale di due particelle da quattro. Questa possibilità è legata alla *corrispondenza particella antiparticella*, di cui si fa uso nella rappresentazione stessa, che possiamo formulare come segue: *la distruzione della particella  $a$  in uno stato di quadrimomento  $p_a$  equivale alla creazione dell'antiparticella  $\bar{a}$  nello stato di quadrimomento  $-p_a$  e viceversa*. La creazione della particella  $a$  nello stato di quadrimomento  $p_a$

<sup>1</sup>verificare per esercizio la (B.3).

<sup>2</sup>verificare per esercizio la (B.4).

equivale alla distruzione della particella  $\bar{a}$  nello stato di quadrimomento  $-p_a$ . Ciò significa in sostanza che ogni particella entrante può essere trasformata nella sua antiparticella uscente.

Se consideriamo, quindi, le variabili definite nell'eq. (B.2), possiamo individuare tre canali distinti:

- un canale diretto o canale s corrispondente alle reazioni

$$1 + 2 \rightleftharpoons 3 + 4$$

caratterizzato dalla proprietà:

$$s > 0 ; t \leq 0 ; u \leq 0$$

- due canali incrociati, il canale t corrispondente alle reazioni:

$$1 + \bar{3} \rightleftharpoons 2 + \bar{4}$$

caratterizzato dalla proprietà:

$$t > 0 ; s \leq 0 ; u \leq 0$$

- ed il canale u corrispondente a

$$\bar{3} + 2 \rightleftharpoons \bar{1} + 4$$

caratterizzato dalle proprietà:

$$u > 0 ; s \leq 0 ; t \leq 0$$

A proposito delle definizioni dei canali s, t ed u e delle disuguaglianze relative, si può osservare che:

1- in ogni canale, una variabile (quella che individua il nome del canale stesso) rappresenta il quadrato dell'energia nel c.m.s. e le altre due rappresentano i quadrati dei quadrimomenti trasferiti;

2- il passaggio da un canale all'altro avviene per coniugazione CPT (coniugazione di carica + parità + time reversal);

3- le regioni fisiche associate ai tre canali sono indipendenti (come appare chiaro esaminando le tre serie di disuguaglianze precedenti); l'ampiezza di scattering  $f(\theta, E)$  che descrive la reazione in un canale deve descrivere le reazioni associate agli altri due canali: il problema da risolvere è quello della ricerca delle modalità con cui le informazioni contenute in  $f(\theta, E)$  possono essere trasmesse da una regione fisica all'altra.

## B.4 Regioni fisiche dei canali s, t, u

Caso di masse uguali:  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$ . Si dimostra facilmente che valgono le seguenti relazioni:

canale s

$$\begin{cases} s = 4(q_s^2 + m^2) > 4m^2 \\ t = -2q_s^2(1 - \cos\theta_s) \leq 0 \\ u = -2q_s^2(1 + \cos\theta_s) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

canale t

$$\begin{cases} s = -2q_t^2(1 - \cos\theta_t) \leq 0 \\ t = 4(q_t^2 + m^2) > 4m^2 \\ u = -2q_t^2(1 + \cos\theta_t) \leq 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

canale u

$$\begin{cases} s = -2q_u^2(1 - \cos\theta_u) \leq 0 \\ t = -2q_u^2(1 + \cos\theta_u) \leq 0 \\ u = 4(q_u^2 + m^2) > 4m^2 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

e in tutti e tre i canali:

$$s + t + u = 4m^2 \quad (\text{B.8})$$

in cui si è usata la solita terminologia ed i pedici s, t, u indicano il canale in cui sono valutate le quantità q e  $\theta$ .

Le equazioni (B.5, B.6, B.7) insieme alla (B.8) definiscono rispettivamente le regioni fisiche dei canali s, t, u che schematizziamo graficamente come in Fig. B.2. Per rappresentare contemporaneamente

le tre regioni fisiche, anzich'è di un ordinario diagramma in coordinate cartesiane, si fa uso di uno in cui gli assi  $s=0$ ,  $t=0$ ,  $u=0$  formano angoli di  $120^\circ$  l'uno con l'altro e si intersecano in modo da individuare un triangolo equilatero di altezza  $4m^2$ , entro il quale tutte e tre le variabili di Mandelstam sono positive. Ora è noto dalla geometria che la somma delle distanze dei tre lati di un triangolo equilatero di un qualunque punto interno al triangolo stesso è costante ed uguale all'altezza  $h$  del triangolo. Le stesse considerazioni valgono per un punto esterno al triangolo, quando le distanze siano opportunamente dotate di segno, come nel sistema di riferimento di fig. B.2 (i valori di  $s, t, u$  corrispondenti ad un certo *punto = evento fisico* sono ovviamente le tre distanze del punto dagli assi  $s=0, t=0, u=0$ ): allora, certamente,  $s, t, u$ , nella rappresentazione di fig. B.2, soddisfano l'eq. (B.8).

Le regioni fisiche dei tre canali sono tratteggiate in figura e, come si è detto, sono definite dalle relazioni (B.5, B.6, B.7): la condizione  $m_1 = m_2 = m_3 = m_4$  fa sì che anche gli assi corrispondenti all'annullarsi dei quadrimomenti trasferiti (ad esempio. gli assi  $t = 0$  e  $u = 0$  nel canale  $s$ ) facciano parte della regione fisica (scattering elastico:  $|\vec{q}_1| = |\vec{q}_2| = |\vec{q}_3| = |\vec{q}_4|$ ). Vale la pena di notare che le tre regioni non hanno punti in comune.

#### Caso di masse non uguali

Il discorso in questo caso si complica non poco, soprattutto per quanto riguarda il calcolo delle quantità di interesse fisico. Consideriamo, innanzitutto, il canale  $s$ , ponendoci nel c.m.s.

Definiamo:

$$q_{1,2} = q_s ; q_{3,4} = q'_s$$

Allora:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = (\vec{q}_1 + \vec{q}_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 = \\ \left( \sqrt{m_1^2 + q_s^2} + \sqrt{m_2^2 + q_s^2} \right)^2 = \left( \sqrt{m_3^2 + q_s'^2} + \sqrt{m_4^2 + q_s'^2} \right)^2$$

Da queste relazioni, sviluppando i quadrati e con qualche calcolo<sup>3</sup> si

---

<sup>3</sup>verificare per esercizio la (B.9).

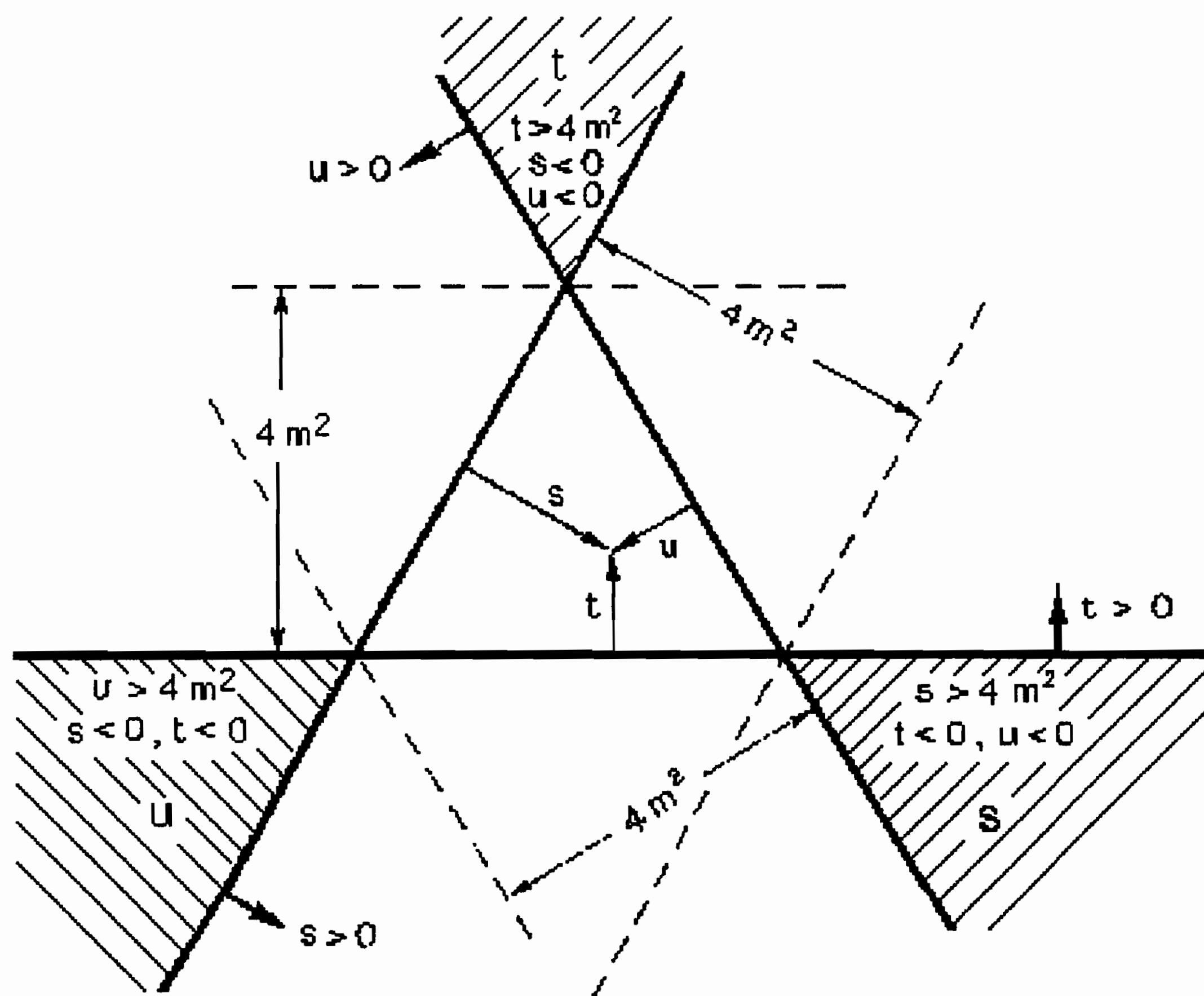


Figura B.2: Regioni fisiche dello spazio  $s, t, u$  rappresentato mediante i numeri triangolari (cfr. anche 9).

ottiene:

$$\begin{aligned} q_s^2 &= \frac{1}{4s} [s - (m_1^2 + m_2^2)^2] [s - (m_1^2 - m_2^2)^2] \\ q_s'^2 &= \frac{1}{4s} [s - (m_3^2 + m_4^2)^2] [s - (m_3^2 - m_4^2)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

I valori:

$$s = (m_1 + m_2)^2, \quad s = (m_3 + m_4)^2$$

rappresentano i minimi del quadrato dell'energia nel c.m.s. per cui si verificano le reazioni  $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$ , il primo e  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , il secondo, ovvero sono i valori di soglia, nel canale  $s$ , per le reazioni suddette: in tal caso,  $q_s = 0$  e  $q_s' = 0$ . Notiamo tuttavia che gli impulsi  $q_s$  e  $q_s'$  si

annullano anche per:

$$s = (m_1 - m_2)^2, \quad s = (m_3 - m_4)^2$$

che son detti valori di pseudosoglia, nel canale  $s$ , per le reazioni  $3 + 4 \rightarrow 1 + 2$  e  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , rispettivamente.

Possiamo calcolare facilmente anche il quadrato dei quadrimomenti trasferiti:

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = m_1^2 + m_3^2 - 2E_1E_3 + 2q_sq'_s \cos(\theta_s) \\ u &= (p_1 - p_4)^2 = m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2q_sq'_s \cos(\pi - \theta_s) = \\ &= m_1^2 + m_4^2 - 2E_1E_4 + 2q_sq'_s \cos(\theta_s) \end{aligned}$$

Come avevamo preannunciato, anche nel caso di masse disuguali,  $t$  ed  $u$  dipendono in modo semplice dal coseno dell'angolo di scattering.

Sottraendo poi il valore di  $u$  a quello di  $t$ , otteniamo:

$$t - u = m_3^2 - m_4^2 - 2E_1(E_3 - E_4) + 4q_sq'_s \cos(\theta_s) \quad (\text{B.10})$$

D'altro canto, ricordando che siamo nel c.m.s. :

$$\begin{aligned} m_3^2 - m_4^2 - 2E_1(E_3 - E_4) &= (m_3^2 + q_s'^2 - m_4^2 - q_s'^2) + \\ &- \frac{[(E_1 + E_2) + (E_1 - E_2)](E_3 + E_4)(E_3 - E_4)}{E_3 + E_4} = \\ &= (E_3^2 - E_4^2) \left[ 1 - \frac{(E_1 + E_2)(E_1 - E_2)}{(E_3 + E_4)(E_1 + E_2)} (E_1 + E_2) \right] = \\ &= (E_3^2 - E_4^2) \left[ \frac{s}{s} - \frac{s + (E_1^2 - E_2^2)}{s} \right] = -\frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s} \end{aligned}$$

Sostituendo questa espressione nell'eq. (B.10), otteniamo:

$$\cos\theta_s = \frac{1}{4q_sq'_s} \left[ t - u + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s} \right] \quad (\text{B.11})$$

Passiamo ora al canale  $t$ : l'algoritmo matematico è assolutamente identico al precedente, per cui ricaviamo, per il processo  $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$ :

$$\begin{aligned} q_t^2 &= \frac{1}{4t} [t - (m_1 + m_3)^2] [t - (m_1 - m_3)^2] \\ q_t'^2 &= \frac{1}{4t} [t - (m_2 + m_4)^2] [t - (m_2 - m_4)^2] \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$



e:

$$\cos\theta_t = \frac{1}{4q_t q'_t} \left[ s - u + \frac{(m_1^2 - m_3^2)(m_3^2 - m_4^2)}{t} \right] \quad (\text{B.13})$$

Le soglie per il processo in esame sono date da:

$$s = (m_1 + m_3)^2, \quad s = (m_2 + m_4)^2$$

e le pseudosoglie da:

$$s = (m_1 - m_3)^2, \quad s = (m_2 - m_4)^2$$

Nel canale u infine ricaviamo le formule

$$\begin{aligned} q_u^2 &= \frac{1}{4u} [u - (m_1 + m_4)^2] [u - (m_1 - m_4)^2] \\ q'_u{}^2 &= \frac{1}{4u} [u - (m_2 + m_3)^2] [u - (m_2 - m_3)^2] \\ \cos\theta_u &= \frac{1}{4q_u q'_u} \left[ s - t + \frac{(m_1^2 - m_4^2)(m_2^2 - m_3^2)}{u} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Per poter descrivere anche graficamente le regioni fisiche dei diversi canali, dobbiamo ancora ricavare l'equazione del contorno delle regioni stesse. Data la simmetria delle formule ricavate, ciò può essere fatto imponendo la condizione:

$$\cos^2\theta_x = 1 \quad (x = s, t, u) \quad (\text{B.15})$$

Notiamo che nel caso di quattro masse uguali, per determinare tali contorni si impone la stessa condizione (B.15): l'uguaglianza delle masse comporta, ad esempio nel canale s, che sia  $t = 0$  per  $\cos\theta_s = +1$  (scattering in avanti) e  $u = 0$  per  $\cos\theta_s = -1$  (scattering all'indietro). Imponiamo la condizione (B.15) nel canale s ( $\cos^2\theta_s = 1$ ): dall'equazione (B.11) si ottiene:

$$16q_s^2 q'_s{}^2 = \left[ t - u + \frac{(m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{s} \right]^2$$

e ricordando la (B.9) :

$$\frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2][s - (m_3 + m_4)^2][s - (m_3 - m_4)^2]}{s^2} = \frac{[s(t - u) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)]^2}{s^2}$$

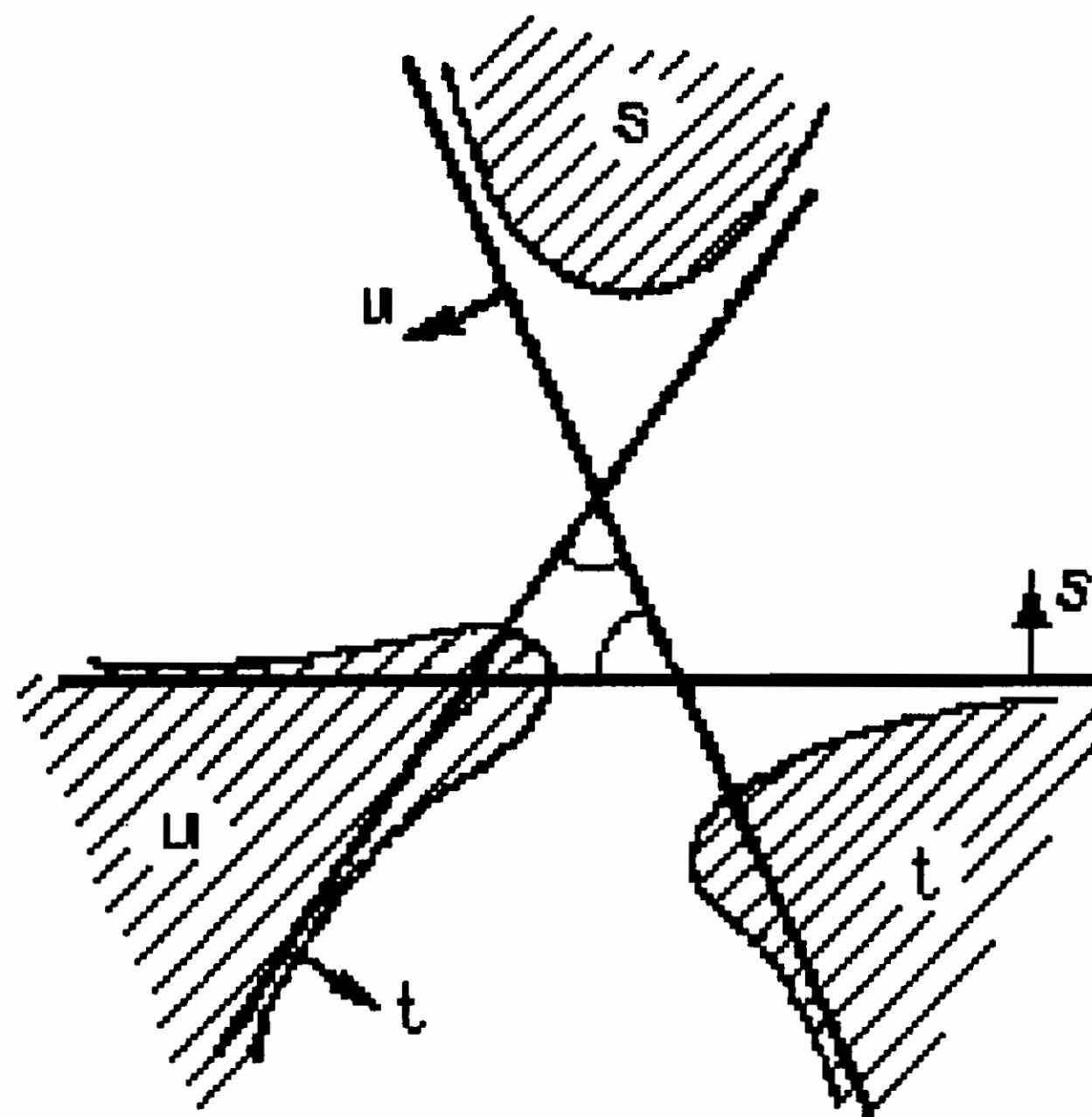


Figura B.3: Regioni fisiche delle variabili di Mandelstam nel caso di masse non uguali.

da cui, finalmente, con qualche calcolo, si ricava:

$$\begin{aligned} \varphi(s, t, u) = & stu - s(m_1^2 m_2^2 + m_3^2 m_4^2) + \\ & -t(m_1^2 m_3^2 + m_2^2 m_4^2) - u(m_1^2 m_4^2 + m_2^2 m_3^2) + \\ & + 2 \sum_{i,j,k=1}^4 m_i^2 m_j^2 m_k^2 \quad (i \neq j \neq k) \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

La curva rappresentata dalla (B.16) gode di alcune proprietà interessanti:

- 1- è un'equazione di 3° grado: quindi, nel piano di Mandelstam, la curva  $\varphi(s, t, u)$  viene intersecata da qualsiasi retta in non più di tre punti;
- 2- è simmetrica in  $s, t, u$  (sotto opportune permutazioni di  $m_1, m_2, m_3, m_4$ );
- 3- ha tre asintoti:  $s=0, t=0$  ed  $u=0$ .

Tuttavia, nonostante queste proprietà piuttosto notevoli, l'eq. (B.16) è assai complicata da risolvere in un caso del tutto generale. Ad esempio, per l'insieme di reazioni:

$$\text{canale } s : \pi^- \bar{K}^0 \rightarrow \bar{p} \Lambda^0$$

$$\begin{aligned} \text{canale } t &: \pi^- p \rightarrow K^0 \Lambda^0 \\ \text{canale } u &: \bar{K}^0 p \rightarrow \pi^+ \Lambda^0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

le regioni fisiche sono descritte in fig. B.3.

La soluzione del nostro problema risulta relativamente semplice per uno scattering del tipo  $a+b \rightarrow a+b$  (canale s) elastico: notiamo immediatamente che le regioni dei canali s ed u sono completamente simmetriche, poichè i processi:

$$a + b \rightarrow a + b \quad ; \quad \bar{a} + b \rightarrow \bar{a} + b$$

sono del tutto identici dal punto di vista cinematico.

Poniamo  $m_a = m$  ed  $m_b = M$  con il che, ricordando le relazioni (B.9), possiamo scrivere:

$$q_s^2 = q_s'^2 = \frac{1}{4s} [s - (M + m)^2][s - (M - m)^2] = k$$

da cui:

$$\begin{aligned} t &= (p_1 - p_3)^2 = \\ &= 2m^2 - 2E_1 E_2 + 2k^2 \cos\theta = -2k^2(1 - \cos\theta) = \\ &= \frac{[s - (M + m)^2][s - (M - m)^2]}{2s} (\cos\theta - 1) = \\ &= \frac{s^2 - s[(M + m)^2 + (M - m)^2] + [(M + m)^2 + (M - m)^2]}{2s} (\cos\theta - 1) = \\ &= \frac{s^2 - 2s(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)}{2s} (\cos\theta - 1) \end{aligned}$$

Come abbiamo detto, il confine della regione cinematica si ottiene imponendo la condizione in eq. (B.15), che nel nostro caso si scrive:

$$\begin{aligned} \text{per } \cos\theta = 1; \quad t &= 0 \\ \text{per } \cos\theta = -1; \quad t &= -s + 2(M^2 + m^2) - \frac{(M^2 - m^2)^2}{s} \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Cominciamo col considerare l'iperbole (B.18): essa ha come asintoti le rette  $s = 0$  ed  $u = 0$ , come discende direttamente dalle condizioni fatte a proposito della (B.16), di cui la (B.18) è un caso particolare.

Inoltre, esaminando la (B.18), si vede che:

$$t \rightarrow \mp\infty \text{ per } s \rightarrow \pm\infty$$

$$t + s \rightarrow 2(M^2 + m^2) \text{ per } s \rightarrow \infty$$

in modo che, ricordando che  $s + t + u = 2(M^2 + m^2)$ , si deduce:

$$u \rightarrow 0 \text{ per } s \rightarrow \infty$$

Vediamo ora per quali valori di  $s$ , sempre nella (B.18), è  $t = 0$ . Dovremo risolvere l'equazione di 2° grado:

$$s^2 - 2s(M^2 + m^2) + (M^2 - m^2)^2 = 0$$

che ammette come soluzioni:

$$s = (M \pm m)^2$$

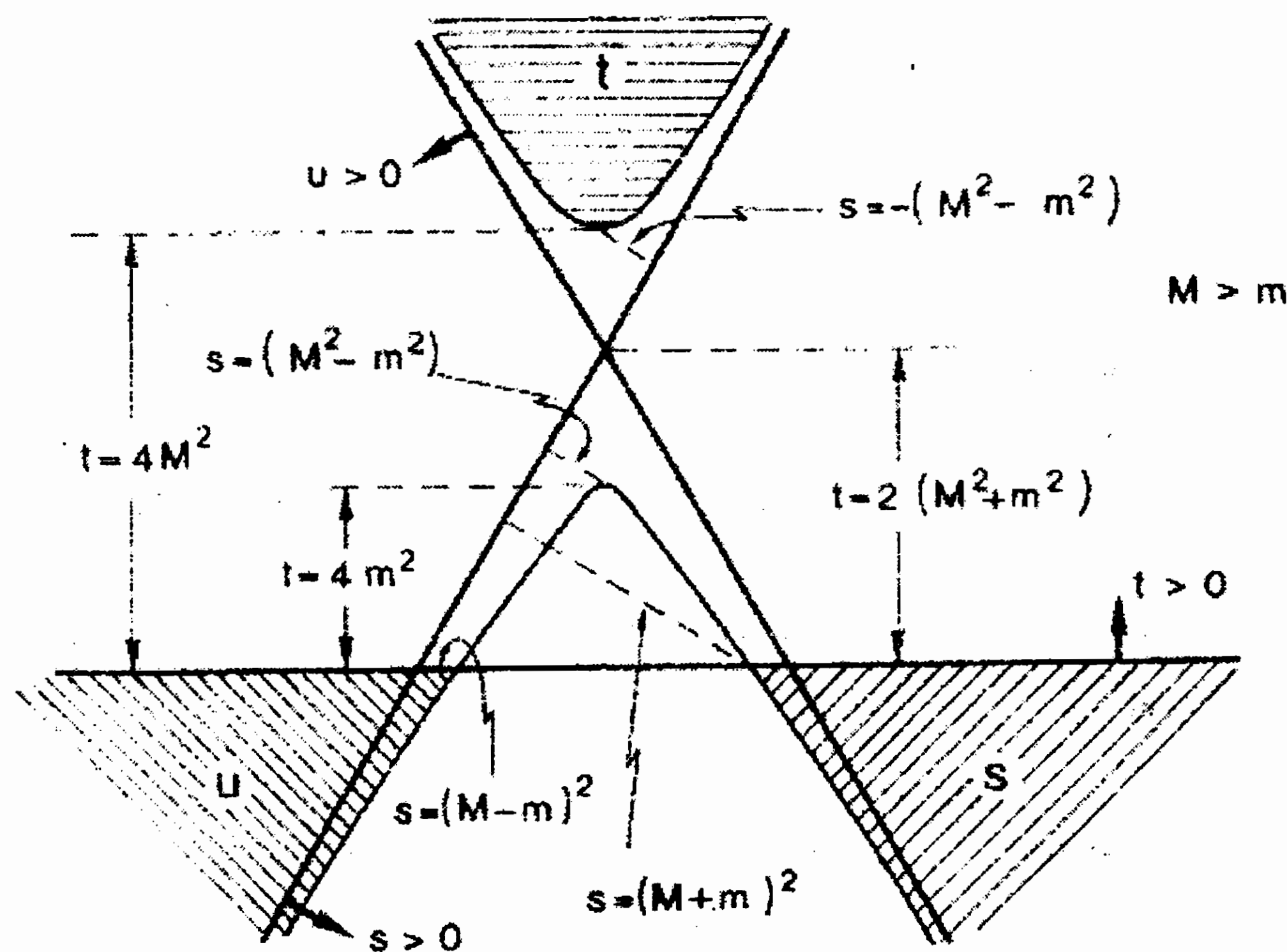


Figura B.4: Regione fisica per il caso dello scattering elastico di particelle di massa diversa (per es.  $\pi p \rightarrow \pi p$ ).

Infine, ci restano da calcolare soltanto le posizioni di massimo e di minimo della funzione  $t(s)$ , imponendo la condizione  $\frac{dt}{ds} = 0$ :

$$\frac{dt}{ds} = -1 + \frac{(M^2 - m^2)^2}{s^2}$$

che si annulla per:

$$s = \pm(M^2 - m^2)$$

I valori corrispondenti di  $t$  sono:

$$\text{per } s = -(M^2 - m^2); t = 4M^2$$

$$\text{per } s = (M^2 - m^2); t = 4m^2$$

Possiamo quindi rappresentare le regioni fisiche dei canali  $s$ ,  $t$ ,  $u$  come in fig. B.4.

## B.5 Mandelstam e la simmetria di crossing

Nel diagramma di Mandelstam in  $s$ ,  $t$ ,  $u$ , alle tre regioni fisiche corrispondono tre processi distinti:

$$\text{canale } s: 1 + 2 \rightarrow 3 + 4$$

$$\text{canale } t: 1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$$

$$\text{canale } u: 1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$$

e quindi dobbiamo trattare tre differenti ampiezze:

$$f^s(s, t) f^t(s, t) f^u(s, t) \quad (\text{B.19})$$

Come abbiamo visto, le tre regioni fisiche associate ad ognuno dei canali  $e$ , quindi, ad ognuna delle ampiezze (B.19) non hanno punti in comune: tuttavia, poichè, oltre al processo  $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ , anche  $1 + \bar{3} \rightarrow \bar{2} + 4$  e  $1 + \bar{4} \rightarrow \bar{2} + 3$  sono processi fisici, un problema di grande interesse che si pone è quello di correlare queste tre ampiezze, nonostante la netta separazione esistente fra i loro domini di definizione.

La variabile  $s$ , che nel canale  $s$  è il quadrato dell'energia totale nel c.m.s. è legata all'angolo di scattering nel canale  $t$  dalla relazione:

$$s = -2q_t^2(1 - \cos\theta_t)$$

nel caso di quattro masse uguali. È chiaro, quindi, che nel canale  $s$ ,  $\theta_t$  perde il significato di angolo fisico, poichè, essendo  $s > 0$ , deve essere

verificata la condizione  $\cos\theta_t > 1$ : in più, quando  $s \rightarrow \infty$   $\cos\theta_t \rightarrow \infty$ . Se vogliamo confrontare  $f^t(s, t)$  con  $f^s(s, t)$  nella regione fisica del canale  $s$ , quindi, si deve manipolare una funzione,  $f^t(s, t)$ , descrivendola in termini di polinomi di Legendre, per  $|\cos\theta_t| \leq 1$ , introducendovi delle funzioni più generali del coseno di un angolo complesso  $\theta_t$ . È necessario, perciò, eseguire un *prolungamento analitico*, per fare la qual cosa occorrono due ipotesi fondamentali:

1- il prolungamento è possibile, facendo uso della teoria di variabile complessa;

2-  $s, t, u$  debbono considerarsi variabili complesse, che diventano reali nelle singole regioni fisiche.

Sfruttando la possibilità di eseguire questo prolungamento analitico, è possibile poi applicare l'ipotesi della *crossing symmetry* che permette di correlare il valore di un'ampiezza, ad esempio  $f^s(t, u)$ , in un punto  $P(\bar{t}, \bar{u})$  nella regione fisica del canale  $s$ , con il valore di  $f^t(\bar{t}, \bar{u})$ , *continuata analiticamente* nel medesimo punto  $P(\bar{t}, \bar{u})$  della regione fisica. L'ipotesi di *crossing symmetry*, in realtà, è insita nella descrizione di Mandelstam, poichè un'unica funzione analitica  $f(s, t)$  descrive il processo in tutti e tre i canali fisici:  $f(s, t)$  si chiama *ampiezza invariante per crossing symmetry*, mentre con  $f^x(s, t)$ , ( $x = s, t, u$ ), si indica la sua continuazione analitica nel canale  $x$ .

L'ipotesi fondamentale di Mandelstam è che le sole singolarità di un'ampiezza invariante per *crossing symmetry* sono poli e tagli: *queste singolarità sono connesse a tutti i possibili stati intermedi realizzabili nei tre canali*. In altri termini, qualunque fenomeno accada in un canale influenza il comportamento dell'ampiezza negli altri canali (vedremo fra breve quanto importante sia il significato di tale affermazione).

Un'altra estensione appare a questo punto ovvia: sappiamo dalla teoria dello scattering che l'ampiezza  $f$  è una funzione, oltre che di  $s$  e  $t$ , anche del momento angolare  $l$ :  $f = f(s, t, l)$ . È quindi conveniente considerare  $l$  come variabile continua, anzichè come variabile complessa,

essendo la sua regione fisica definita dalle condizioni:

$$\text{Im}(l) = 0, \text{Re}(l) = n \text{ (n intero)}$$

Come vedremo, i poli di Regge sono poli della funzione  $f(l; s, t)$  nel modello a poli di Regge, quindi, rispetto all'elettrodinamica quantistica ed al metodo dei diagrammi di Feynman, si parla di *particelle fisiche* e di *processi fisici* nei canali incrociati e non di particelle virtuali. Questa semplificazione concettuale richiede, dal punto di vista matematico, la complicazione dell'uso delle funzioni analitiche.

## B.6 Nuove variabili cinematiche

Nel 1969 R. Feynman ipotizzò che la sezione d'urto per processi inelastici, con un elevato numero di prodotti secondari, potesse avere un comportamento indipendente dal modello adottato; questo avrebbe permesso di ricavare informazioni significative da dati sperimentali riferiti a diverse energie.

Egli distinse gli esperimenti di tipo esclusivo da quelli di tipo inclusivo formulando quello che sarebbe poi stato chiamato *Feynman scaling*. Nei prossimi paragrafi tratteremo i due casi in modo separato.

## B.7 Reazioni Esclusive

In un processo di tipo esclusivo ipotizziamo che venga misurato il quadrimpulso di tutte le particelle nello stato finale.

Risulta chiaro come la matrice di interazione  $M$  contenga le informazioni fisiche del processo che stiamo trattando. La sezione d'urto  $\sigma$  per il processo dato risulta:

$$\sigma(mb) = \Phi \int_{\Omega} |M|^2 dV_R \quad (\text{B.20})$$

dove con  $\Phi$  abbiamo indicato il fattore di flusso:

$$\Phi = \frac{1}{P_a^{cms} \sqrt{s}}$$

e  $dV_R$  rappresenta l'elemento di volume dello spazio delle fasi invariante per trasformazioni di Lorentz.

Dalla (B.20) possiamo osservare quanto segue:

- $M$  contiene le informazioni dinamiche del processo;
- $\Phi$  contiene le informazioni sulle condizioni esterne quali l'impulso del fascio, l'energia totale  $\sqrt{s}$ , etc...;
- $dV_R$  contiene le informazioni di tipo cinematico.

Dal momento che le proprietà di  $\Phi$  sono note "a priori", si deve cercare di controllare le variazioni dovute alla cinematica, eventuali fattori che potrebbero mascherare le informazioni fisiche, così da avere informazioni più dirette su  $|M|^2$ .

Una volta fatto questo, si può misurare  $|M|^2$  come funzione di  $(3n - 5)$  variabili (essendo dato il valore di  $\sqrt{s}$ ). Per poter farlo si deve ricavare in modo esplicito il fattore  $dV_R$ .

Considerando la reazione:

$$a + b \rightarrow \sum_i^n c_i,$$

per i teoremi della conservazione dell'energia e dell'impulso, nel C.M.S.:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0$$

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sqrt{s}$$

da cui:

$$dV_R = \frac{1}{\prod_{i=1}^n E_i} dV = \delta\left[\sum_{i=1}^n \vec{p}_i\right] \delta\left[\sqrt{s} - \sum_{i=1}^n E_i\right] \prod_{i=1}^n \frac{d_3\vec{p}_i}{E_i} \quad (\text{B.21})$$

In linea di principio le nostre richieste sono completamente soddisfatte se si misura la *sezione d'urto differenziale* :

$$\frac{d\sigma}{dV_R} = \Phi |M|^2 \quad (\text{B.22})$$



o in modo equivalente:

$$|M|^2 = \Phi^{-1} \frac{d\sigma}{dV_R} \quad (\text{B.23})$$

Tuttavia a causa della elevata dimensionalità dello spazio delle fasi, questa procedura è possibile solo in esperimenti per i quali sono disponibili un grande numero di eventi.

## B.8 Spazio longitudinale delle fasi (LPS)

L. Van Hove ha successivamente proposto un compromesso, in base a cui si possono raggiungere soddisfacenti risultati.

Limitiamoci, per semplicità, a considerare che tutte le particelle nello stato finale siano rivelate, cioè che siano noti tutti i momenti finali  $\vec{p}_i$ . Decomponiamo il vettore  $\vec{p}_i$  nella componente longitudinale  $\vec{q}_i$  e in quella trasversale  $\vec{r}_i$

$$\vec{p}_i = \vec{q}_i + \vec{r}_i \quad (\text{B.24})$$

Ovviamente  $\vec{q}_i$  è diretto, per definizione, lungo l'asse del fascio. Scriviamo le leggi di conservazione nel seguente modo:

$$\sum_{i=1}^n \vec{p}_i = 0 \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^n q_i = 0 \\ \sum_{i=1}^n \vec{r}_i = 0 \end{cases} \quad (\text{B.25})$$

Dove i momenti  $q_i$  non possono essere *né tutti positivi né tutti negativi*. La conservazione dell'energia:

$$\sum_{i=1}^n E_i = \sqrt{s} \quad (\text{B.26})$$

viene ad assumere la forma:

$$\sum_i \sqrt{q_i^2 + r_i^2 + m_i^2} = \sqrt{s} = \sum |q_i| \sqrt{1 + \frac{r_i^2 + m_i^2}{q_i^2}} \quad (\text{B.27})$$

Per grandi  $s$  abbiamo:  $\sqrt{s} \approx 2p_a$ .

Facciamo ora delle utili considerazioni sulle eq:(B.27). È possibile ordinare i valori dei  $q_i$ :

$$q_1 < q_2 < \dots < q_l < 0 < q_{l+1} < \dots < q_n \quad (\text{B.28})$$

Secondariamente, ricordiamo che, di norma, negli esperimenti di alta energia, i valori di  $r_i$  sono piccoli rispetto a quelli di  $q_i$ . In accordo con le (B.28) ciò non può essere vero per tutti gli indici  $i$ ; tuttavia, senza perdere di generalità nella trattazione, nello spirito della approssimazione di L. Van Hove, consideriamo la situazione limite  $r_i = 0$ ,  $m_i = 0$ .

Le equazioni (B.25) e (B.28) diventano:

$$\begin{aligned} \sum q_i &= 0 \\ \sum |q_i| &= K \end{aligned} \quad (\text{B.29})$$

dove  $K \neq \sqrt{s}$ .

Le equazioni (B.29) definiscono un poliedro i cui contorni giacciono su un iperplano  $H_{n-1}$  con  $(n-1)$  dimensioni [a causa dei vincoli (B.29)] nello spazio  $S_n$  ad  $n$  dimensioni, se con  $n$  indichiamo il numero finale di particelle.

Si possono fare allora le seguenti osservazioni:

1- siccome per molte particelle abbiamo  $m_i \neq 0$ , la “vera” ipersuperficie  $K_{n-1}$  è contenuta in  $H_{n-1}$ .

2- siccome  $r_i \neq 0$ , i punti fisici non giacciono sulla ipersuperficie  $K_{n-1}$ , ma piuttosto nelle sue vicinanze.

Vediamo in modo esplicito due esempi per i valori  $n=3,4$ .

### B.8.1 Caso di 3 corpi

Poniamo  $n=3$ . Scriviamo le equazioni (B.29) nel seguente modo:

$$q_1 + q_2 + q_3 = 0 \quad (\text{B.30})$$

$$|q_1| + |q_2| + |q_3| = K \quad (\text{B.31})$$

Le equazioni (B.30), (B.31) definiscono un esagono come riportato in fig. B.5, il che era facilmente intuibile partendo anche da considerazioni

elementari. Se i valori di  $q_i$  ( $i=1,2,3$ ) fossero tutti definiti positivi, la (B.31) rappresenterebbe le proprietà di un triangolo (le stesse usate in fig. B.5, sulla base delle equazioni per  $s,t,u$ , oppure le meglio conosciute proprietà del plot di Dalitz-Fabri); poichè invece i  $q_i$  sono numeri relativi (e non tutti hanno lo stesso segno), ci sono sei possibili permutazioni tra le particelle 1, 2 e 3. Dalle eq. (B.30) segue immediatamente l'esagono.

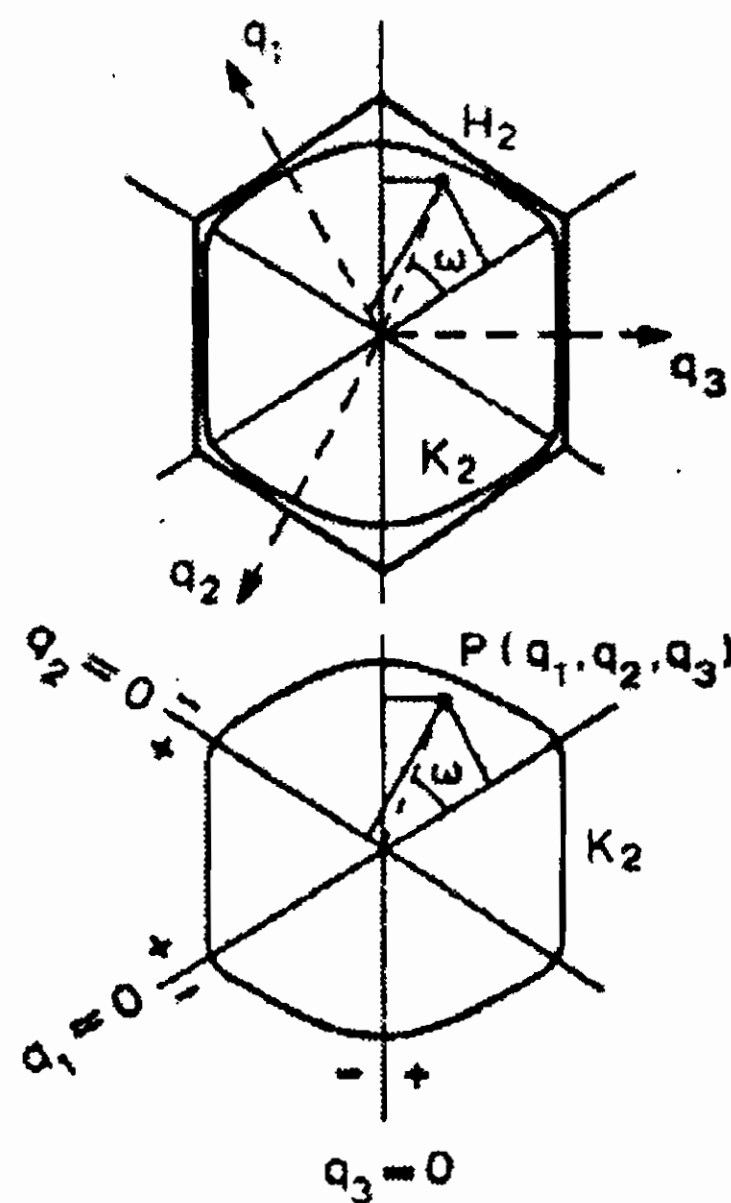


Figura B.5: L'esagono di Van Hove con i limiti cinematici.

Come mostrato in fig. B.5, la rappresentazione del "punto"  $P$  ( $q_1, q_2, q_3$ ) viene ottenuta misurando le distanze  $q_i$  dai tre assi che formano angoli di  $120^\circ$  e propriamente orientati.

1. Essendo  $m_i \neq 0$  l'ipersuperficie  $K_2$  è interna all'esagono  $H_2$ .
2. Essendi  $r_i \neq 0$  i punti reali giacciono all'interno di  $K_2$ .

Considerando un valore fissato per  $s$ , una variabile (l'angolo  $\omega$  indicato in figura) è sufficiente per identificare in modo completo la *configurazione longitudinale* in un collisione a tre corpi.

Menzioniamo inoltre che, in linea di principio, non risulta necessario considerare nulli  $r_i$ , per esempio assumendo  $0 < r_i < \epsilon$ , si individua una "corona circolare" lungo tutto il perimetro  $K_2$ .

### B.8.2 Caso di 4 corpi

Consideriamo come secondo esempio  $n=4$ .

$$q_1 + q_2 + q_3 + q_4 = 0 \quad (\text{B.32})$$

$$|q_1| + |q_2| + |q_3| + |q_4| = K \quad (\text{B.33})$$

Le eq.(B.32) definiscono un "CUBOTTAEDRO"  $H_3$ , come mostrato nella fig. B.6. Le facce triangolari rappresentano le configurazioni longitudinali con un valore di  $q_i > 0$  ( $q_i < 0$ ) e gli altri 3  $q_i$  negativi (positivi). Le facce rettangolari rappresentano le configurazioni longitudinali nelle quali due  $q_i$  assumono valori positivi e due valori negativi.

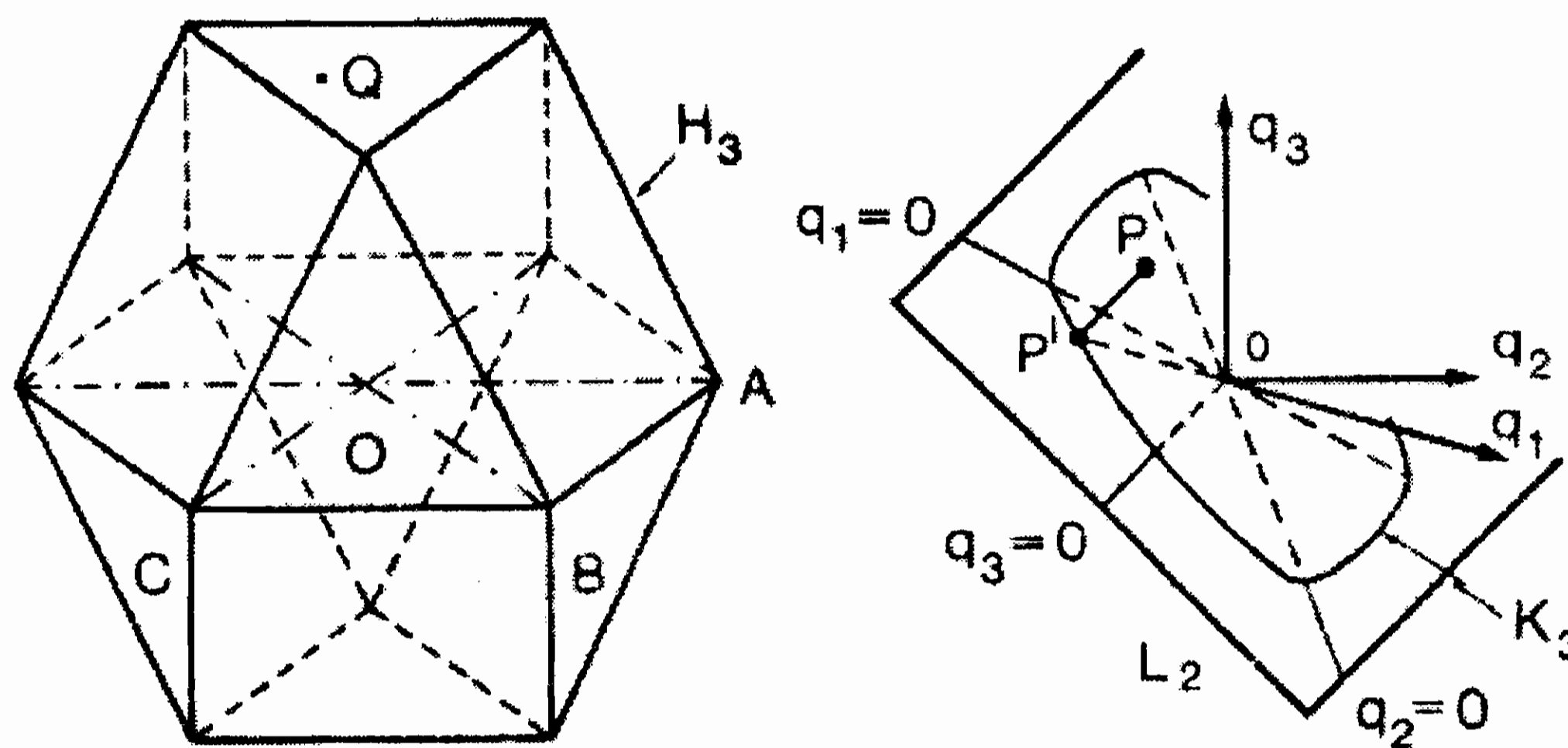


Figura B.6: Il cubottaedro delle spazio delle fasi longitudinale per reazioni a 4 corpi.

1. Poichè  $m_i \neq 0$ , la ipersuperficie  $K_3$  è contenuta nel CUBOTTAEDRO  $H_3$ ;
2. poichè  $r_i \neq 0$ , i punti reali giacciono all'interno di  $K_3$ .

In questo caso due variabili sono sufficienti per identificare completamente la *configurazione longitudinale* di una collisione con produzione di quattro corpi.

È ovvio che nell'equazione (B.29)  $K$  è in relazione con  $\sqrt{s}$ . Per le reazioni di tipo esclusivo è possibile introdurre *un impulso longitudinale ridotto*  $x_i$  che elimina la dipendenza esplicita della dimensionalità del poliedro da  $\sqrt{s}$  (anche se questa assunzione non è rigorosamente necessaria). Infatti si può porre:

$$\sum_i |q_i| = 2Q \quad (\text{B.34})$$

è una quantità nota. Poichè  $\sqrt{s} \approx 2p_a$ , è utile introdurre il fattore 2 cosicchè per  $s \rightarrow \infty$ ,  $Q \rightarrow \frac{1}{2} \sum |q_i| \approx p_a$ , che è l'impulso della particella entrante nel sistema del centro di massa.

Definiamo:

$$x_i = \frac{2q_i}{\sum_i |q_i|} \quad (\text{B.35})$$

Notiamo che nell'ultimo caso  $x_i$  tende asintoticamente alla variabile di Feynman  $x_j = 2\frac{2q_j}{\sqrt{s}}$  o equivalentemente  $x_j = q_j/p_a$ .

Usando le nuove variabili ridotte, le eq.(B.29) diventano:

$$\sum x_i = 0 \quad (\text{B.36})$$

$$\sum |x_i| = 2 \quad (\text{B.37})$$

L'ordinamento delle  $q_i$  ora diviene:

$$x_1 < x_2 < \dots < x_l < 0 < x_{l+1} < \dots < x_n \quad (\text{B.38})$$

e dalle eq:(B.36) e eq:(B.37) si ricava:

$$\sum_{i=1}^l x_i = -1 \quad \sum_{j=l+1}^n x_i = +1 \quad (\text{B.39})$$

Facendo uso delle nuove variabili  $x_i$  si può ricavare esplicitamente l'eq. (B.23) data in precedenza; a questo scopo si devono esprimere le variabili

$x_i$  in funzione delle  $q_i$  utilizzando i vincoli imposti dalle eq. (B.39) ed il fatto che  $Q$  è una quantità nota.

Nella eq. (B.21) occorre effettuare la seguente trasformazione

$$d_3\vec{p}_i = dq_i d_2\vec{r}_i \implies dx_i d_2\vec{r}_i$$

Dalle eq. (B.34), (B.35) e (B.39) la trasformazione finale diventa:

$$\prod_{i=1}^n dq_i = Q^{n-2} dQ \prod_{j=2}^{n-2} dx_j \quad (\text{B.40})$$

In questi termini possiamo esprimere la legge di conservazione dell'energia  $\delta(\sum E_i - \sqrt{s})$  come:

$$\delta\left(\sum \sqrt{m_i^2 + r_i^2 + x_i^2 Q^2} - \sqrt{s}\right)$$

e deve essere valutata per un fissato valore  $Q'$ .

Questo comporta un nuovo fattore di moltiplicazione:

$$\frac{1}{\partial E_i / \partial Q} = \frac{1}{Q \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{E_i} \right) \right]} \quad (\text{B.41})$$

Alla fine abbiamo:

$$\prod_{i=1}^n dq_i = \frac{Q^{n-3}}{\sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{E_i} \right)} \prod_{j=2}^{n-1} dx_j \quad (\text{B.42})$$

Dalle equazioni eq. (B.22) e (B.42) segue immediatamente l'espressione della sezione d'urto differenziale:

$$\frac{d^{2n-1}\sigma}{\prod_{j=2}^{n-1} dq_j \prod_{i=1}^n d\vec{r}_i} = \frac{\Phi Q^{n-3}}{\prod_{i=1}^n E_i} \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{E_i} \right) \right]^{-1} |M|^2 \quad (\text{B.43})$$

L'eq. (B.42) contiene ancora l'elevata dimensionalità del problema ma separa le informazioni cinematiche da quelle dinamiche.

Per semplicità definiamo:

$$dV_T = \prod_{i=1}^n d\vec{r}_i \quad (\text{B.44})$$

$$W^{-1} = \frac{\Phi Q^{n-3}}{\prod_{i=1}^n E_i \left[ \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i^2}{E_i} \right) \right]} \quad (\text{B.45})$$

Dalla eq.(B.43) segue:

$$\frac{d^{n-2}\sigma}{dx_2 \cdots dx_i \cdots dx_{n-1}} = W^{-1} \int |M|^2 dV_T \quad (\text{B.46})$$

Se rinunciamo all'ambiziosa idea di studiare la sezione d'urto differenziale abbiamo delle buone opportunità di ottenere informazioni fisiche sul valore dell'elemento di matrice di transizione mediato per intervalli finiti (o su tutto lo spettro) di impulso trasverso. Quest'ultima limitazione, ovviamente, non è necessaria ma viene imposta dalla limitata statistica di cui usualmente disponiamo in esperimenti di tipo esclusivo inelastici ad alte energie.

Dalla eq. (B.46) segue:

$$\int |M|^2 dV_T = W \frac{d^{n-2}\sigma}{dx_2 \cdots dx_{n-1}} \quad (\text{B.47})$$

dove  $W$  è una quantità misurabile. Si noti che gli errori sulla eq.(B.45) possono essere calcolati in modo esplicito[162].

Questo approccio permette di ottenere in modo indipendente dal modello informazioni sulle principali proprietà degli elementi di matrice che intervengono in un determinato processo esclusivo.

## B.9 Il Prisma Plot

In questo paragrafo diamo un esempio di una scelta alternativa di un set completo delle  $(3n - 5)$  variabili. Per comodità di calcolo limitiamo il nostro interesse ad un sistema di tre corpi, usiamo un metodo ideato da F.T. Dao[163]. Il problema è strettamente legato alla elevata dimensionalità dello spazio che consideriamo e, nonostante il supporto di un computer sia sufficiente per manipolare tutte le informazioni necessarie al nostro scopo, una rappresentazione in 3 dimensioni si rivela molto utile dal punto di vista propedeutico nel caso specifico.

Consideriamo per esempio la reazione:



Come abbiamo menzionato nel par. (B.8) è sufficiente una sola variabile, l'angolo  $\omega$ , per identificare in modo completo la configurazione longitudinale dello stato finale.

Allora l'angolo  $\omega$  di Van Hove è la prima variabile.

Per ottenere la "configurazione trasversale" possiamo usare un parametro che dipende dalla distanza  $R$  del punto rappresentativo dall'origine.

Definiamo in modo esplicito tre versori ( $\vec{u}_p, \vec{u}_+, \vec{u}_o$ ) che indicano la direzione rispettivamente di  $\vec{p}_p, \vec{p}_+$  e  $\vec{p}_o$ . Essi sono disposti ad angoli di  $120^\circ$ :

$$\begin{aligned} \vec{u}_p &= (1, 0) \\ \vec{u}_+ &= \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow (\text{Rotazione di } +120^\circ) \\ \vec{u}_o &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \Rightarrow (\text{Rotazione di } -120^\circ) \end{aligned} \quad (\text{B.49})$$

Riferendoci allora al sistema definito dalle eq. (B.49) definiamo la distanza  $R$ :

$$R = \sqrt{2/3(q_p^2 + q_{\pi^+}^2 + q_{\pi^0}^2)} \quad (\text{B.50})$$

e l'angolo di Van Hove:

$$\omega = \text{arctg}\left(\frac{q_{\pi^+} - q_{\pi^0}}{\sqrt{3}q_p}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{B.51})$$

dove abbiamo indicato la fase  $\frac{\pi}{2}$  per pura convenzione. Adesso  $R_{max}$  viene definito dalle condizioni al contorno :

$$|q_p| + |q_{\pi^+}| + |q_{\pi^0}| = \sqrt{s} \quad (\text{B.52})$$

ottenuto sotto le condizioni  $r_i = 0, m_i = 0$ .

La *trasversalità* della interazione può essere indicata dalla quantità:

$$Z = \frac{R}{R_{max}} \quad (\text{B.53})$$



Allora Z è la seconda variabile indipendente.

Nella reazione (B.48) la produzione di risonanze genera delle “correlazioni” tra le variabili che abbiamo scelto. Nel caso particolare abbiamo:

$$\pi^+ p \rightarrow \Delta^{++}(1236)\pi^0 \quad (\text{B.54})$$

$$\rightarrow \rho^+(750)p \quad (\text{B.55})$$

$$\rightarrow \Delta^0(1236)\pi^+ \quad (\text{B.56})$$

È possibile allora ottenere un “prisma plot” per la reazione (B.48) e studiare in modo migliore le risonanze usando un Plot di Dalitz, sfruttando la relazione:

$$T_p + T_{\pi^+} + T_{\pi^0} = m_p^2 + m_{\pi^+}^2 + m_{\pi^0}^2 \quad (\text{B.57})$$

dove con  $T_i$  abbiamo indicato l’energia cinetica della particella  $i$ .

Per ogni reazione risonante un  $T_j$  è approssimativamente costante.

Per la (B.54),  $T_{\pi^0} \sim \text{cost}$  dal momento che  $M_{p\pi^+} \sim \text{cost}$

Per la (B.55),  $T_p \sim \text{cost}$  dal momento che  $M_{\pi^+\pi^0} \sim \text{cost}$

Per la (B.56),  $T_{\pi^+} \sim \text{cost}$  dal momento che  $M_{p\pi^0} \sim \text{cost}$

Così vediamo che due delle energie cinetiche possono essere considerate come variabili indipendenti additive (la trasversalità non è essenziale; per una energia di 3.92 Gev simulazioni Montecarlo generano eventi con un valore  $Z \sim 0.5$  contro il valore “reale” di  $Z \sim 0.9$ ).

Se andiamo a fissare la variabile Z, (per esempio,  $Z = 0.9$ ) abbiamo una completa descrizione di una reazione a tre corpi contenuta in un prisma plot nel quale il Dalitz plot è analizzato al variare di  $\omega$ . È interessante notare come i dati sperimentali si configurano in tale diagramma fig. B.7.

Gli eventi si presentano in forma di spirale lungo l’asse centrale parallelo ad  $\omega$  e la reazione risonante è chiaramente distinta. Le “Bande di risonanza” sono stirate lungo l’asse  $\omega$  e le “regioni sovrapposte” sono ridotte. Si può capire che lo spazio a 4 dimensioni è quasi vuoto e solo

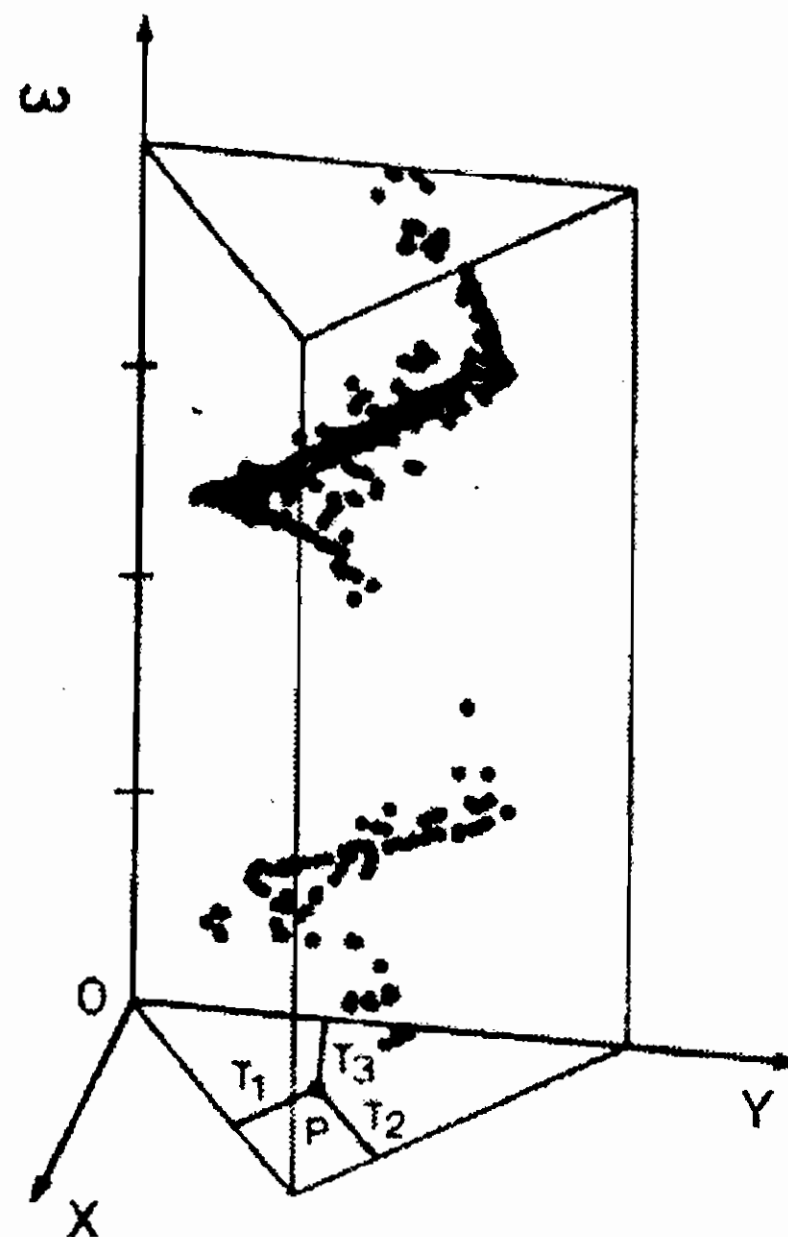


Figura B.7: Prisma plot per la reazione (B.48):  $\pi^+p \rightarrow \pi^+\pi^0p$

pochi elementi  $dV_R$  sono pieni con eventi fisici. Questo approccio ha aperto nuovi campi di indagine ed ha portato ad una grande varietà di tecniche nell'analisi dei dati che vanno dalla ricerca di addensamenti nello spazio delle fasi a metodi di massima verosimiglianza.

## B.10 Reazioni inclusive

In una reazione inclusiva per definizione abbiamo a che fare con variabili che si riferiscono ad una singola particella rivelata prodotta in una reazione di tipo:

$$b + t \rightarrow m + X \quad (\text{B.58})$$

dove  $b$  è il fascio,  $t$  il bersaglio,  $m$  la particella in esame e  $X$  è un qualsiasi altro prodotto della collisione con massa invariante  $M$  (Missing Mass).

Il diagramma relativo, illustrato in fig. B.8 è molto simile a quello in fig. B.1 eccetto nel fatto che una particella è stata sostituita da un sistema di un numero indefinito di particelle. La quantità da misurare è la sezione d'urto invariante per trasformazione di Lorentz (di fatto una

funzione di distribuzione):

$$f(s, \vec{p}) = E \frac{d^3\sigma}{d\vec{p}} \quad (\text{B.59})$$

È possibile usare differenti insiemi di variabili in relazione al fenomeno in esame. Per brevità, ci concentriamo su esperimenti di collisione a “quasi due corpi”

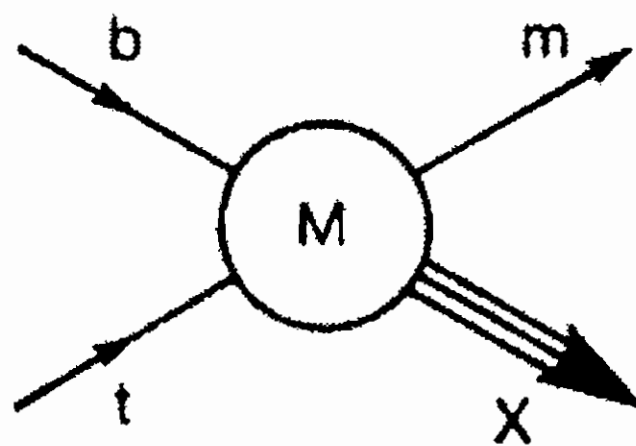


Figura B.8: Diagramma di Mandelstam per una reazione inclusiva.

Per la reazione (B.58) possiamo definire delle variabili invarianti per trasformazioni di Lorentz: comunque avremo la necessità di usare una variabile addizionale, cioè la massa mancante:

$$M^2 = (P_b + P_t - P)^2 \quad (\text{B.60})$$

dove con  $P$  si indica il tetravettore. Con ciò, l'eq (B.3) diventa:

$$s + t + u = M^2 + m_b^2 + m_t^2 + m^2 \quad (\text{B.61})$$

Abbiamo la necessità di usare tre variabili. Se con  $s$  indichiamo l'energia (al quadrato) siamo di fronte a diverse possibili scelte per le altre due (non essendo  $t$  ed  $u$  necessariamente le variabili più comode).

## B.11 Impulsi longitudinali e trasversali

Le due variabili sono misurabili in modo diretto in un esperimento. Nel sistema del centro di massa la regione fisica è contenuta nel cerchio:

$$q^2 + r^2 = (p_{MAX}^{CM})^2$$

dove  $p_{MAX}^{CM} = \lambda(s, m^2, M_{min}^2)/4s$  dove  $M_{min}^2$  è il valore più piccolo possibile per il sistema M e  $\lambda(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xy - 2xz - 2yz$ .

Nel sistema di riferimento del laboratorio, una volta effettuate le trasformazioni di Lorentz il cerchio di cui sopra assume la forma di un'ellisse. Un'altra variabile utile è rappresentata dalla "massa trasversa" :

$$\mu^2 = E^2 - q^2 = m^2 + r^2 \quad (\text{B.62})$$

## B.12 La $x$ di Feynman e $p_t$ della particella

Richard Feynman si è posto il problema di identificare una variabile che, se non invariante per trasformazione di Lorentz, variasse linearmente con quest'ultima. In tal modo, la distribuzione di tale variabile misurata nel sistema del Laboratorio viene ottenuta mediante una semplice traslazione lungo il suo asse. Pertanto, se non proprio la variabile, almeno la "distribuzione" risulta invariante per trasformazione di Lorentz.

La variabile  $x$  di Feynman è definita nel modo seguente:

$$x = \frac{q^{CM}}{|q_{MAX}^{CM}|}; \quad x \rightarrow \frac{2}{\sqrt{s}}q^{CM} \text{ per } s \rightarrow \infty \quad (\text{B.63})$$

dove  $q^{CM}$  è il valore massimo dell'impulso longitudinale che una particella di massa  $m$  può assumere nel sistema del centro di massa. È molto simile alla variabile di Van Hove definita dalla eq. (B.35)<sup>4</sup>.

La regione fisica in questo caso è molto semplice, cioè:  $-1 < x < +1$ . La variabile  $x$  in quanto variabile longitudinale ridotta individua, in generale, tre differenti regioni:

1. La regione di frammentazione del fascio:  $x \gg 0$  ( $m$  si muove lungo la direzione del fascio definita positiva)  $r \sim \text{cost.}$  per  $s \rightarrow \infty$
2. La regione di frammentazione del bersaglio:  $x \ll 0$  ( $m$  si muove lungo la direzione del fascio definita negativa)  $r \sim \text{cost.}$  per  $s \rightarrow \infty$

---

<sup>4</sup>Purtroppo si usa lo stesso simbolo per la variabile di Van Hove e per quella di Feynman, ma ciò capita in tutta la bibliografia scientifica.

3. La regione centrale:  $X \approx 0$ .

Rimaniamo nel sistema del Centro di Massa. Possiamo scrivere:

$$E_{CM}^2 = q_{CM}^2 + r^2 + m^2$$

per una particella  $m$ . Inoltre:

$$M^2 = s - 2\sqrt{s}E_{CM} + m^2$$

Nel caso in cui  $q_{CM} > r$ ,  $m$  è valida una semplice relazione tra  $M$ ,  $s$  ed  $x$ , cioè:

$$\frac{M^2}{s} = 1 - x \quad (\text{B.64})$$

Ne segue che  $x$  ed  $r$  sono due variabili molto utili per descrivere il processo di urto del fascio sul bersaglio. Nella regione centrale, invece  $x$  è una variabile poco sensibile.

## B.13 La rapidità $y$ e $p_t$ della particella

Abbiamo visto nel §B.10 che la descrizione di una particella  $m$  prodotta in una reazione inclusiva si riduce, in sostanza, a descrivere la sua posizione nello spazio di Minkowski sull'iperbole di massa  $E^2 - p^2 = m^2$  rappresentata in fig. B.9.

Da un punto di vista puramente geometrico, basta porre (dalla fig. B.9):

$$\begin{aligned} E &= m \cosh y^* \\ p &= m \sinh y^* \end{aligned} \quad (\text{B.65})$$

per verificare immediatamente che  $y^*$ , variabile adimensionale, individua la posizione della particella  $m$  sull'iperbole di massa. Infatti:

$$\begin{aligned} E^2 &= m^2 \frac{(e^{y^*} + e^{-y^*})^2}{4} = \frac{m^2}{4} (e^{2y^*} + e^{-2y^*} + 2); \\ p^2 &= m^2 \frac{(e^{y^*} - e^{-y^*})^2}{4} = \frac{m^2}{4} (e^{2y^*} + e^{-2y^*} - 2); \\ E^2 - p^2 &= \frac{m^2}{4} [e^{2y^*} + e^{-2y^*} + 2 - e^{2y^*} - e^{-2y^*} + 2] = m^2. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

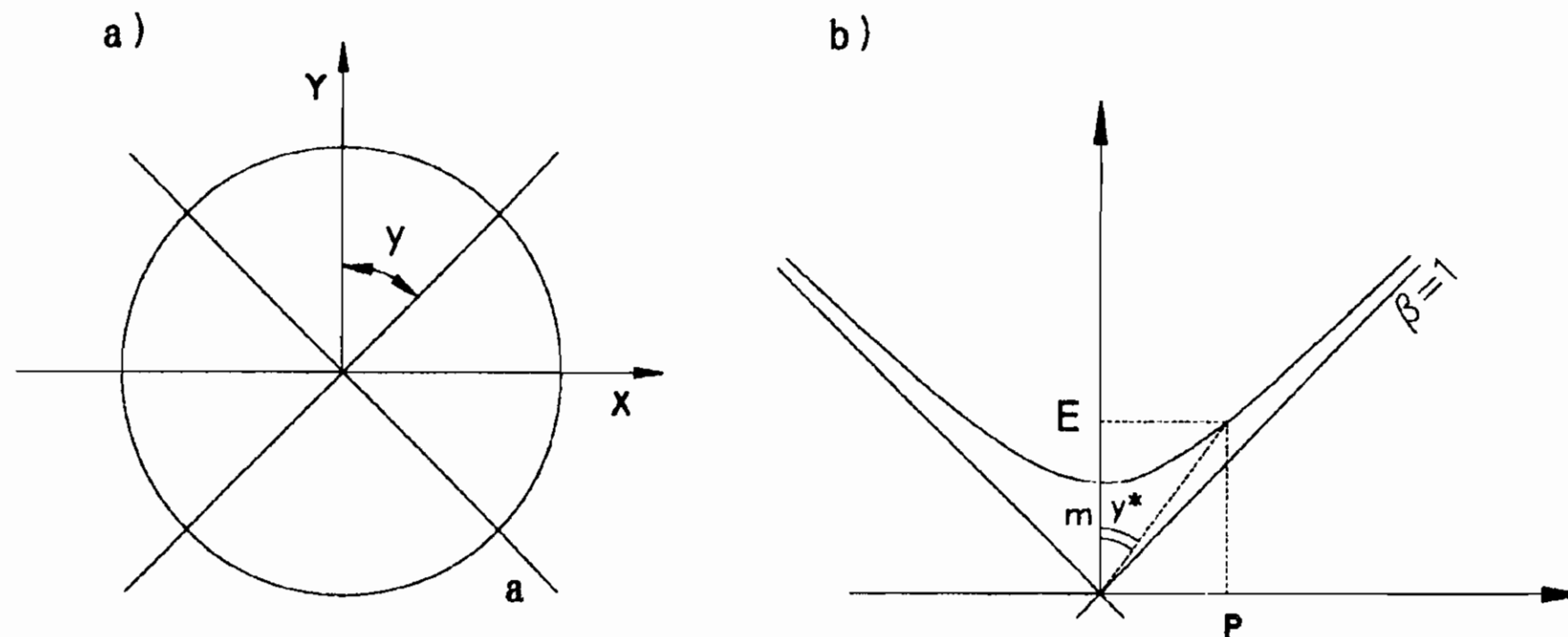


Figura B.9: a- posizione di un punto sul cerchio; b- posizione di un punto sulla iperbole di massa

La variabile  $y^*$  è stata chiamata da R. Feynman *rapidità assoluta* [164]. Essa è infatti legata alla velocità della particella  $m$ .

Partendo dalle (B.65) si ricavano importanti e utili relazioni che legano la rapidità assoluta alle grandezze cinematiche relativistiche. Infatti<sup>5</sup>:

$$\gamma = \frac{E}{m} = \cosh y^* \quad (\text{B.67})$$

$$\beta\gamma = \frac{p}{m} = \sinh y^* \quad (\text{B.68})$$

$$\beta = \frac{p}{E} = \tanh y^* \quad (\text{B.69})$$

$$(\text{B.70})$$

che, per  $y^*$  piccolo (zona centrale nel centro di massa) si riducono a:

$$\beta \approx \gamma \quad (\text{B.71})$$

il che giustifica il nome dato a  $y^*$ .

È utile esprimere la rapidità assoluta in funzione di  $\beta$ . Esplicitando la (B.70) si ottiene:

$$\beta = \frac{e^{y^*} - e^{-y^*}}{e^{y^*} + e^{-y^*}};$$

<sup>5</sup> $E = Mc^2 = \gamma M_0 c^2$ . In tutta la trattazione si usano le unità naturali in cui  $c = 1$ .

$$\begin{aligned} \beta e^{y^*} + \beta e^{-y^*} &= e^{y^*} - e^{-y^*} (1 - \beta) e^{y^*} = e^{-y^*} (\beta + 1); \\ e^{2y^*} &= \frac{1 + \beta}{1 - \beta} 2y^* = \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

cioè:

$$y^* = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta}{1 - \beta} = \frac{1}{2} \log \frac{E + p}{E - p}. \quad (\text{B.73})$$

Ancora, sommando le (B.65) si ha:

$$E + p = m(\cosh y^* + \sinh y^*) = m \frac{e^{y^*} + e^{-y^*} + e^{y^*} - e^{-y^*}}{2} = m e^{y^*} \quad (\text{B.74})$$

da cui si ottiene:

$$y^* = \log \frac{E + p}{m} \quad (\text{B.75})$$

Applichiamo ora un “boost di Lorentz”  $\gamma_L, \beta_L$  nella direzione *longitudinale*  $L$  di moto della particella  $m$ , di modo che siano nulle le due componenti trasverse dell’ impulso  $p_2$  e  $p_3$ . In una metrica  $(E, p)$  otteniamo:

$$\begin{cases} E_L = \gamma_L E - \beta_L \gamma_L p \\ p_L = \gamma_L p - \beta_L \gamma_L E \end{cases} \quad (\text{B.76})$$

dove, per la rapidità assoluta valgono, nel sistema di riferimento isolato rispetto al sistema di riferimento inerziale le (B.70) ed  $m$  è sostituito da  $E_{TOT} = \sqrt{s}$ .

Le relazioni precedenti si possono riscrivere esplicitamente; si ottiene:

$$\begin{cases} E_L = \cosh y m \cosh y^* - \sinh y m \sinh y^* = m \cosh (y - y^*) \\ p_L = \cosh y m \sinh y^* - \sinh y m \cosh y^* = m \sinh (y - y^*) \end{cases} \quad (\text{B.77})$$

che mostrano come la rapidità assoluta sia una variabile additiva per trasformazioni di Lorentz. Non è relativisticamente invariante come le variabili di Mandelstam del §B.2, ma una sua distribuzione in un sistema traslato è identica (traslata) alla distribuzione nel sistema inerziale.

Ora è noto che, passando dal sistema del laboratorio al sistema solidale con il centro di massa di una interazione, le componenti trasverse (rispetto all’ asse di collisione) dell’ impulso delle particelle prodotte

rimangono invariate. Soltanto la componente longitudinale  $q$  varia secondo le (B.70).

Pertanto la “rapidità” è definita in uno dei seguenti modi:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \log \frac{E + q}{E - q}; \\ \text{RAPIDITÀ} \quad y &= \log \frac{E + q}{\mu} \\ y &= \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta_L}{1 - \beta_L} \end{aligned} \quad (\text{B.78})$$

La (B.79) assume una forma particolarmente semplice per impulsi trasversi trascurabili e per masse trascurabili.

Infatti:

$$E^2 = q^2 + p^2 + m^2 = q^2 + \mu^2 \quad (\text{B.79})$$

se  $\mu^2 \ll q^2$  (dove  $\mu$  rappresenta la massa trasversa) ci si colloca sul cono di luce e nel piano longitudinale. Allora  $E \approx p$  e quindi:

$$\frac{q}{E} \approx \cos \phi \quad (\text{B.80})$$

dove  $\phi$  rappresenta l'angolo di produzione della particella  $m$  rispetto all'asse di collisione, e la (B.79) assume la forma:

$$y \approx \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos \phi}{1 - \cos \phi} \equiv \eta \quad \text{PSEUDO RAPIDITÀ} \quad (\text{B.81})$$

Ricordando dalla trigonometria che:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

e quindi che:

$$\cos \phi = \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2},$$

si ottiene subito:

$$\eta = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}}{1 - \cos^2 \frac{\phi}{2} - \sin^2 \frac{\phi}{2}} = \frac{1}{2} \log \frac{2 \cos^2 \frac{\phi}{2}}{2 \sin^2 \frac{\phi}{2}} = -\log \tan \frac{\phi}{2} \quad (\text{B.82})$$



Per le collisioni ad altissima energia quindi, la distribuzione degli angoli di produzione assumono particolare importanza. Per la loro proprietà di variare linearmente a seguito di una trasformazione di Lorentz longitudinale, la rapidità  $y$  o la pseudo-rapidità  $\eta$ , sostituiscono molto bene l'impulso longitudinale come variabile per descrivere una particella di massa  $m$  prodotta in interazioni ad alta energia.

Rimane quindi il problema della "scelta" della coppia di variabili "utili" per descrivere la particelle prodotte.

La definizione (B.82) equivale a modificare le (B.65) come segue:

$$E = \mu \cosh y^* q = \mu \sinh y^* \quad (\text{B.83})$$

e, detto  $\beta_L = \frac{q}{E}$  la componente longitudinale della velocità  $\beta$ , si ha anche:

$$\beta_L = \frac{q}{E} = \tanh y^*. \quad (\text{B.84})$$

Per descrivere l'interazione nella regione centrale ( $x \approx 0$ ) viene introdotta una variabile  $y$ :

$$y = \sinh^{-1}\left(\frac{q}{\mu}\right) = \log\left(\frac{E+q}{\mu}\right) = \frac{1}{2}\log\frac{E+q}{E-q} - \frac{1}{2}\log\frac{1-\beta_L}{1+\beta_L} \quad (\text{B.85})$$

Dove con  $\beta_L$  abbiamo indicato la componente longitudinale della velocità della particella  $m$ , quantità che risulta indipendente dalla massa di quest'ultima.

$$\beta_L = \frac{q}{E} = \tanh y \quad (\text{B.86})$$

Tenendo conto che:

$$P^\pm = E \pm q \quad (\text{B.87})$$

con:

$$P^+ P^- = \mu^2$$

alla fine abbiamo:

$$P^\pm = \mu \cosh y \pm \mu \sinh y = \mu e^{\pm y} \quad (\text{B.88})$$

Le principali proprietà della reapidità sono:

- a:  $y \neq 0$  per  $q \neq 0$ ;  
 b:  $y$  non è solo una variabile longitudinale ma contiene anche informazioni sul impulso trasverso (attraverso la dipendenza da  $\mu$ );  
 c: nel limite non-relativistico  $\beta_L \ll 1$  (cioè  $q \ll E$ ):

$$y = \beta_L \quad (\text{B.89})$$

- d: nel limite ultra-relativistico  $E \gg m$ ;  $E \sim p$ , allora  $q = p \cos \theta$

$$y = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \frac{q}{p}}{1 - \frac{q}{p}} = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} = -\log \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \eta \quad (\text{B.90})$$

La variabile  $\eta$  viene spesso indicata come pseudorapidità e viene generalmente usata nella fisica dei raggi cosmici, o in generale quando non è possibile misurare direttamente l'impulso;

- e: sotto una qualsiasi trasformazione longitudinale del sistema di riferimento, la rapidità  $y$  cambia nel modo seguente:

$$y = y' + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta_R}{1 - \beta_R} \quad (\text{B.91})$$

dove  $\beta_R$  è la velocità relativa dei due sistemi di riferimento.

In questo modo  $y_{Lab}$  e  $y_{CMS}$  sono connessi dalla relazione lineare:

$$y_{Lab} = y_{CMS} + \frac{1}{2} \log \frac{1 + \beta_R}{1 - \beta_R} \quad (\text{B.92})$$

In questo caso  $\beta_R$  è la velocità che il centro di massa del sistema ha nel sistema del laboratorio;

- f: (intervallo di rapidità) una variabile molto utile che può sostituire  $s$  è la differenza tra la rapidità del fascio e quella del bersaglio.

Prendiamo in considerazione il caso di particelle incidenti,  $r = r_t = 0$ ; dalle eq. (B.63) e (B.85) segue immediatamente che, essendo  $y = \sinh^{-1}(\frac{q}{\mu})$ , nel CMS ( $q_b = q_t = q^{CM}$ ) si può scrivere:

$$y_b^{CM} = \sinh^{-1} \frac{q^{CM}}{m_b} \approx \sinh^{-1} \frac{\sqrt{s}}{2m_b} \quad (\text{B.93})$$

$$y_t^{CM} = \sinh^{-1} \frac{q^{CM}}{m_t} \approx -\sinh^{-1} \frac{\sqrt{s}}{2m_t} \quad (\text{B.94})$$

da cui:

$$(y_b - y_t)^{CM} = \log \frac{(E_b^{CM} + q^{CM})(E_b^{CM} - q^{CM})}{m_b m_t} \approx \log \frac{s}{m_b m_t} \quad (\text{B.95})$$

Si vede allora che la rapidità varia in modo proporzionale a  $\log s$ .

Abbiamo una relazione analoga anche nel sistema del Laboratorio ( $y_t = 0$ ):

$$y_b = (y_b^{CM} - y_t^{CM}) \approx \log \frac{s}{m_b m_t}$$

che risulta come una conseguenza della proprietà additiva (B.92). Possiamo schematizzare nel diagramma rappresentato in fig. B.10 le variabili che abbiamo introdotto in questo paragrafo.

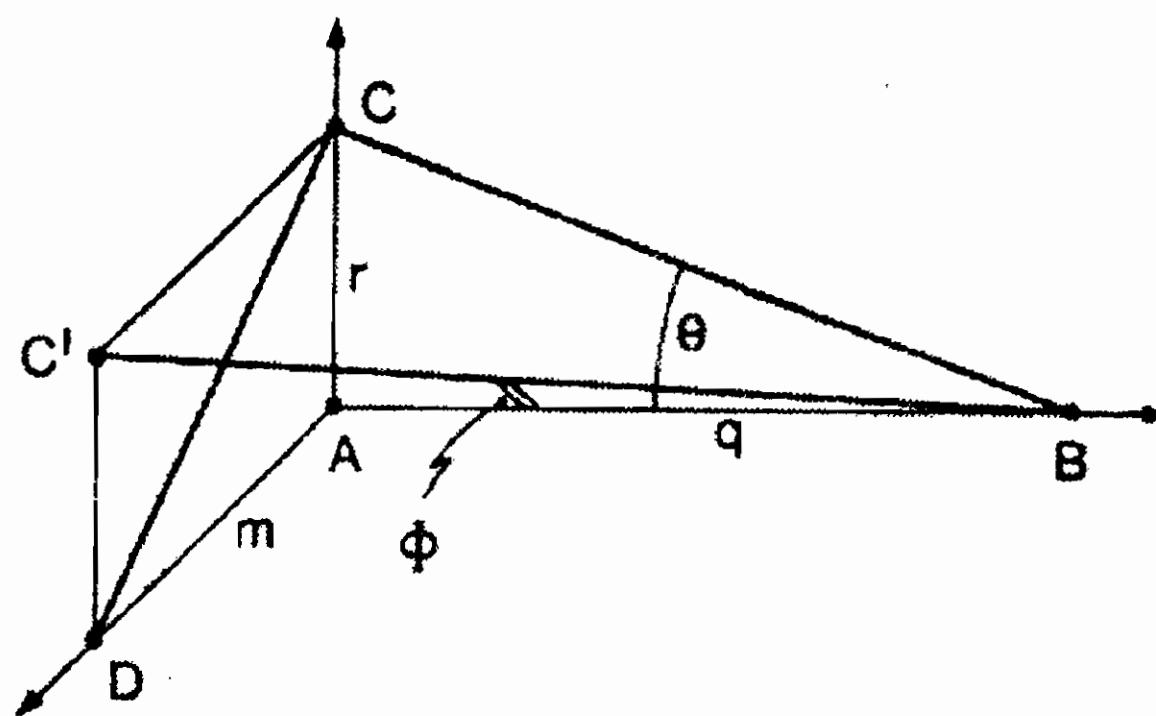


Figura B.10: Definizioni e illustrazione delle variabili usate

Notiamo dalla fig. B.10 che:  $\overline{AB} = q$ ;  $\overline{AC} = \overline{DC'} = r$ ;  $\overline{AD} = m$ . Perciò  $\overline{CB} = p$ ;  $\overline{C'B} = E$ ;  $\overline{CD} = \mu$  e  $q/r = \text{tg}\theta$ ;  $\mu/q = \text{tg}\phi$ . Adesso dalla eq. (B.85):

$$y' = \frac{1}{2} \log \frac{\frac{E}{q} + 1}{\frac{E}{q} - 1} = \frac{1}{2} \log \frac{\sqrt{\frac{\mu^2}{q^2} + 1} + 1}{\sqrt{\frac{\mu^2}{q^2} + 1} - 1} = -\log \text{tg}\left(\frac{\phi}{2}\right) \quad (\text{B.96})$$

Vediamo come quest'ultima equazione sia molto simile alla eq. (B.90). Nel caso  $r \gg m$   $\mu \rightarrow r$  e da questo segue:

$$\phi \approx 0; y \approx \eta.$$

## B.14 Relazione tra $x$ e rapidità di Feynman

Nel C.M.S., dove  $x$  è definita per grandi  $s$  partendo dalla eq. (B.63) ed usando le eq. (B.87) e (B.88), si ricava:

$$x = \frac{2q}{\sqrt{s}} = \frac{P^+ - P^-}{\sqrt{s}} = \frac{2\mu}{\sqrt{s}} \sinh^{-1} y \quad (\text{B.97})$$

che nella regione di frammentazione del fascio diventa:

$$x \sim \frac{\mu}{\sqrt{s}} e^y \text{ per } s \rightarrow \infty \quad (\text{B.98})$$

e nella regione di frammentazione del bersaglio:

$$x \sim \frac{\mu}{\sqrt{s}} e^{-y} \text{ per } s \rightarrow \infty \quad (\text{B.99})$$

Se usiamo successivamente la eq. (B.93), nella regione di frammentazione del fascio otteniamo:

$$\sqrt{s} = m_b e^{y_b}$$

ed usando la (B.98):

$$x \approx \frac{\mu}{\sqrt{s}} e^{(y-y_b)}; \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \quad (\text{B.100})$$

Se usiamo la eq. (B.94), nella regione di frammentazione del bersaglio otteniamo:

$$\sqrt{s} = m_t e^{-y_t}$$

ed usando la (B.99), arriviamo a:

$$x \approx -\frac{\mu}{\sqrt{s}} e^{-(y-y_t)}; \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} \quad (\text{B.101})$$

Infine nella regione centrale ( $x \approx 0$ ), dalle equazioni (B.85), (B.64) si ottiene:

$$y = \log\left(\frac{\sqrt{x^2 + \frac{4\mu^2}{s}} + x}{\frac{2\mu}{s}}\right) \quad (\text{B.102})$$

Da cui  $x = 0$  per  $y = 0$ , come era ovvio aspettarsi, ed inoltre

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{s}}{\mu} \quad (\text{B.103})$$

Allora la pendenza di  $y$  rispetto ad  $x$  valutata per  $x \approx 0$  aumenta in modo proporzionale all'energia, ed inversamente all'impulso trasverso.

Possiamo adesso fare una importante precisazione sulla variabile rapidità  $y$ : considerata come l'angolo longitudinale di boost questa variabile ha una naturale variabile canonicamente coniugata, l'operatore di boost  $k_3$  nella direzione longitudinale (l'autovalore  $k_3$  di  $K_3$  contrariamente ad  $y$  è un numero quantico aggiuntivo).

Per avere una interpretazione fisica del formalismo nello spazio  $K_3$ , è possibile analizzare il legame del suddetto spazio con una rappresentazione nel "parametro d'impatto longitudinale"

Le ampiezze di diffusione possono essere espresse sia in termini della rapidità che di  $K_3$ . La semplicità del formalismo nello spazio di rapidità può essere trasferito allo spazio delle coordinate. È possibile sviluppare una teoria di campo sia in  $y$  o in  $K_3$  e le sezioni d'urto possono essere espresse in termini dell'operatore numero di campo.

## B.15 Variabili non ortodosse

Può risultare utile ricordare che, in dipendenza delle condizioni sperimentali, possono essere introdotte variabili diverse da quelle presentate nei § precedenti ma comunque atte ad individuare la posizione di un punto sulla iperbole di massa nella spazio di Minkowski.

Tra queste, due sono particolarmente in auge; la prima è l'"energia ridotta" in opposizione all'"impulso ridotto" (B.63), definita come segue:

$$\xi = \frac{2E_{CMS}}{\sqrt{s}} \quad (\text{B.104})$$

che non commentiamo. La seconda è l'"impulso trasverso ridotto" che è definito:

$$X_T = \frac{2r}{r_{max}} \quad (\text{B.105})$$

nella quale  $r_{max}$  rappresenta il valore massimo dell'impulso trasverso, che per i vincoli imposti dalla cinematica vale:

$$r_{max} = p^{CMS}$$

Sono evidenti le similarità delle equazioni (B.63), (B.104), (B.105).

## B.16 Variabili di mass shell e di cono di luce

Le variabili che abbiamo discusso nel §(B.10) sono di semplice interpretazione cosicchè, usando una rappresentazione nello spazio energia impulso (E,p) diviene manifesta.

Consideriamo la reazione (B.58) e definiamo un sistema di riferimento, come in fig. B.11, solidale con il centro di massa, con l'asse z orientato lungo la direzione del fascio.

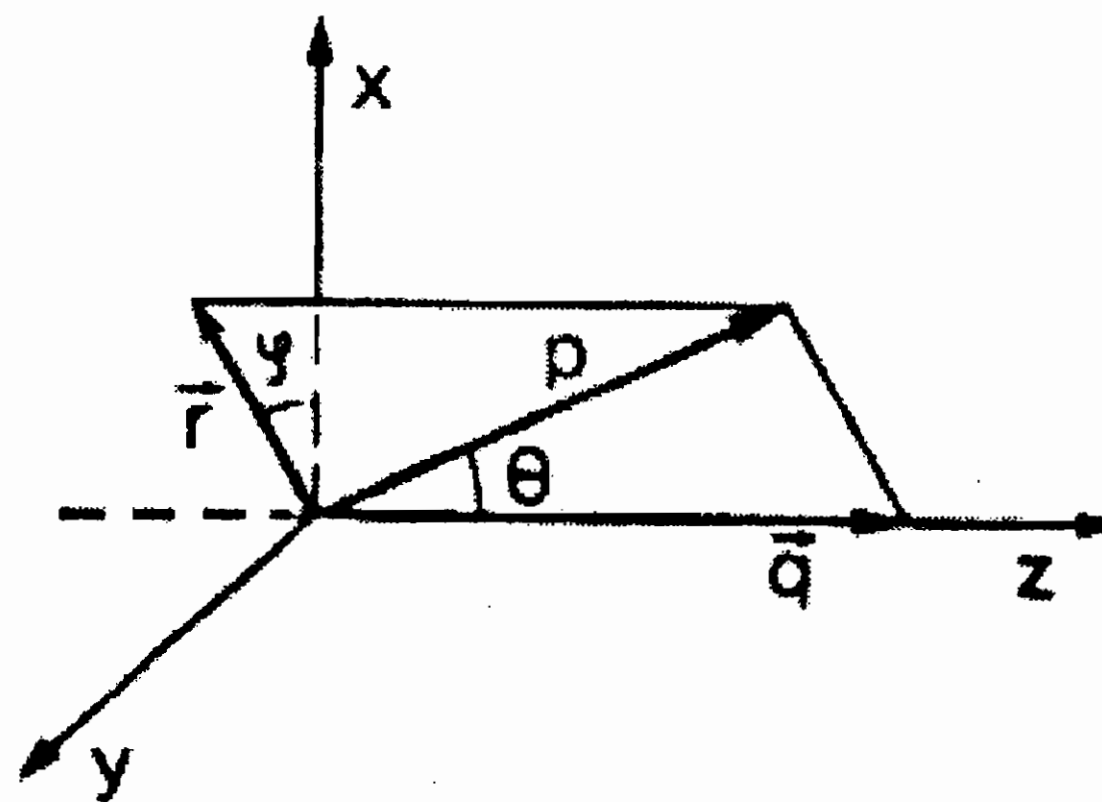


Figura B.11: Costruzione delle variabili

Indichiamo con  $P(E, \vec{p})$  il quadrimpulso della particella  $m$ ,  $\vec{q}$  l'impulso longitudinale ed  $\vec{r}$  l'impulso trasverso ( $\vec{r} = \vec{r}_x + \vec{r}_y$ ); siano  $\theta$  e  $\phi$  rispettivamente gli angoli polare ed azimutale ( $q = p_z = p \cos \theta$ ;  $r_x = p_x = r \cos \phi$ ;  $r_y = p_y = r \sin \phi$ ).

Se rappresentiamo la particella  $m$  nello spazio di Minkosky otteniamo la metà di un iperboloide di rotazione come mostrato in fig. B.12,

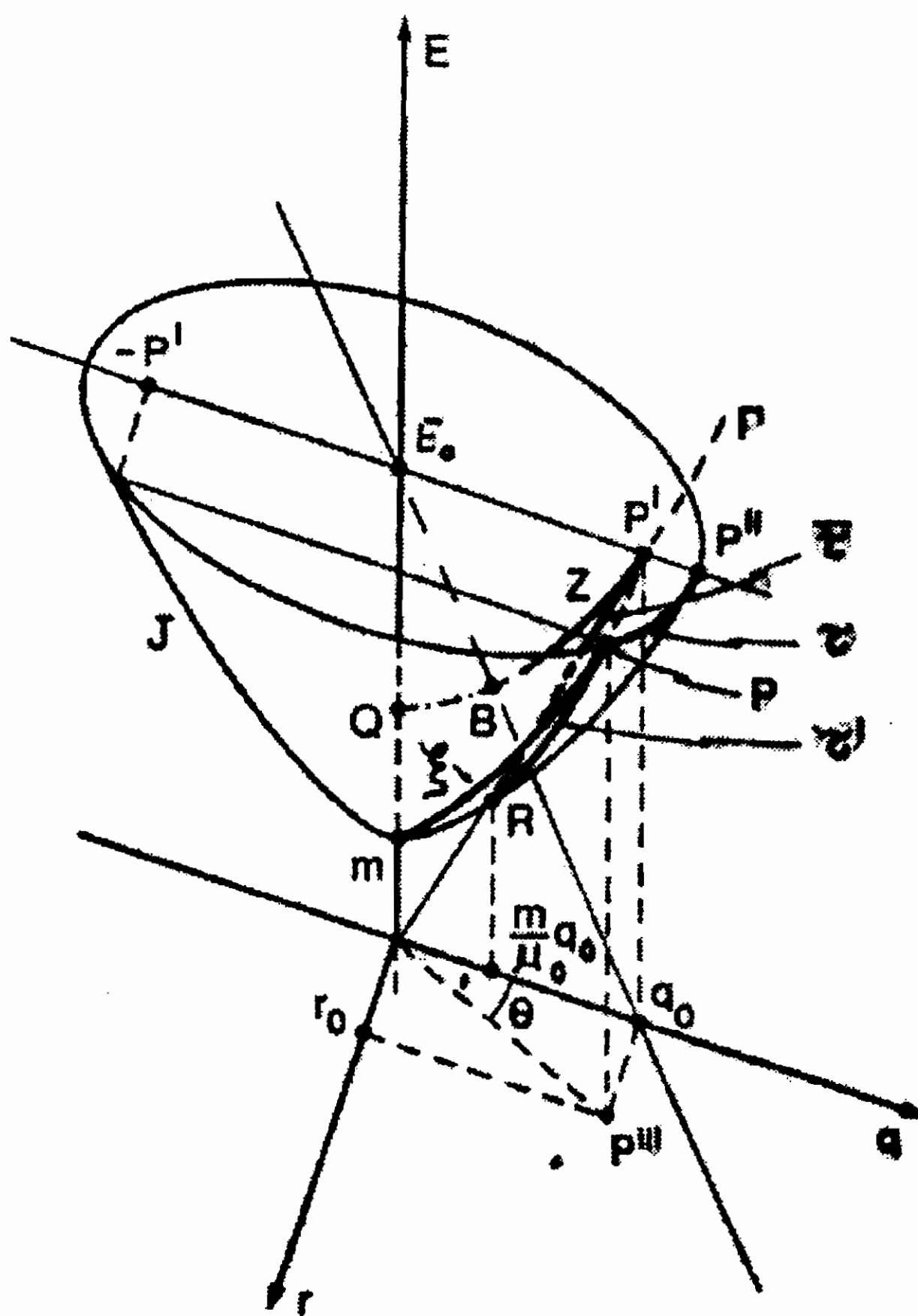


Figura B.12: Rappresntazione delle variabili sul paraboloide di Minkowski.

trascurando l'angolo azimutale  $\phi$  ed assumendo come coordinate i valori  $(r_o, q_o, E_o)$ , il punto rappresentativo della particella giace in una *shell di massa* definita dalla relazione:

$$E^2 - q^2 r^2 = m^2 ; E > m ; r < 0 \quad (\text{B.106})$$

Il livello  $E_o$  è determinato dalle leggi di conservazione dell'impulso e dell'energia  $E_o + E_x = \sqrt{s}$ , ovvero:

$$E_o = \frac{s + m^2 - M_x^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{B.107})$$

Al livello  $E_o$  la particella giace in un piano, determinato dalla (B.107), su un semicerchio di raggio :

$$p_o = \sqrt{E_o^2 - m^2} \quad (\text{B.108})$$

centrato sull'asse delle energie ad un angolo  $\theta$  tale che:

$$q_o = p_o \cos \theta \quad r_o = |p_o \sin \theta|$$

Le tre variabili non sono indipendenti tra loro, il che ci permette di restringere le nostre considerazioni al piano longitudinale (q,E). Le variabili del cono di luce sono definite da una rotazione degli assi q ed E:

$$\delta = \frac{E + q}{2} \quad H = E - q = \frac{r^2 + m^2}{2} \quad (\text{B.109})$$

la cui utilità viene messa in evidenza in più lavori.

Consideriamo ora la proiezione  $P'$  di  $P$  sul piano (E,q); la condizione di appartenenza della particella alla mass shell equivale alla (B.62).

Facciamo un taglio dell'iperboloide in  $P$  con un piano parallelo a (E,q), la posizione di minimo dell'iperboloide fornisce la posizione  $Q$  di  $\mu$  sull'asse delle energie  $Q = (0, 0, \mu)$ .

$P'$  giace sul segmento  $(-p_o, +p_o)$  dato dalla (B.108) in una posizione che dipende da  $r$ .

Una scelta naturale delle coordinate alternative a (E,q) è quella di usare la massa trasversa  $\mu$  e la distanza  $z$  misurata lungo la shell di massa trasversa (B.62).

Usiamo la metrica (-+++), la distanza  $dz^2$  è:

$$dz^2 = -(dE)^2 + (dq)^2$$

Differenziando la (B.62), tenendo  $\mu^2$  costante si trova:  $E dE = q dq$ , da cui:

$$\begin{aligned} dz^2 &= -\frac{q^2}{E^2} dq^2 + dq^2 = \left(1 - \frac{q^2}{E^2}\right) dq^2 \\ \left(\frac{E^2 - q^2}{E^2}\right) dq^2 &= \left(\frac{\mu}{E} dq\right)^2 \end{aligned} \quad (\text{B.110})$$

Prendendo la radice aritmetica, la distanza  $\overline{QP'}$  sulla shell di massa trasversa è:

$$z = \int_o^q \frac{\mu}{E(q)} dq = \int_\mu^{E+q} \frac{d(E+q)}{(E+q)} = \mu \log \frac{E+q}{\mu} \quad (\text{B.111})$$



Le variabili  $z$  e  $\mu$  sono chiamate *variabili di mass shell*.

Dalla relazione (B.111) abbiamo due conseguenze immediate: ci si presenta la possibilità di avere una *interpretazione geometrica* delle variabili introdotte. Infatti:

1- dividendo  $z$  per  $\mu$  ritroviamo la rapidità di Feynman:

$$y = \frac{z}{\mu} = \log \frac{E + q}{\mu}$$

*La rapidità di Feynman rappresenta la distanza pseudoeuclidea del punto  $P'$  da  $Q$ , misurata in unità di massa trasversa*

2- Prendiamo la (B.111) ed assumiamo come limite inferiore dell'integrale il punto B, intersezione tra la Shell di massa trasversa e la linea:

$$E + q = 1$$

otteniamo:

$$z = \mu \int_1^{E+q} \frac{d(E+q)}{E+q} = \mu \log(E+q) \quad (\text{B.112})$$

Dividendo  $z'$  per  $\mu$  ritroviamo la “rapidità del cono di luce” come proposta da Bjorken:

$$y' = \log(E+q) \quad (\text{B.113})$$

Le due rapidità (B.85) e (B.113) differiscono per un termine di massa trasversa.

$$y = y' - \log \mu \quad (\text{B.114})$$

Allo stesso modo le due distanze  $z$  e  $z'$  differiscono per un termine  $\mu \log \mu$

$$z = z' - \mu \log \mu \quad (\text{B.115})$$

Sia le rapidità che le distanze si trasformano addittivamente sotto trasformazioni longitudinali.

Chiamiamo  $\alpha$  il parametro di boost ( $\alpha = \beta\gamma \pm \gamma$ ):

$$(E + q) \Rightarrow (E + q)e^\alpha$$

allora:

$$\begin{cases} y' \Rightarrow y' + \alpha \\ y \Rightarrow y + \alpha \\ z \Rightarrow z + \mu\alpha \\ z' \Rightarrow z' + \mu\alpha \end{cases} \quad (\text{B.116})$$

Le variabili di mass shell e quelle di cono di luce tendono a diventare equivalenti nel limite delle alte energie sia nella regione di frammentazione sia del fascio che del bersaglio. Ricordandoci che la proprietà di addittività per trasformazioni di Lorentz è comune a tutte le distanze pseudoeuclidee, è possibile introdurre molte altre variabili.

## B.17 Variabili aggiuntive di Mass shell

Riferendoci alla fig. B.12, chiamiamo, per comodità, J l'iperboloide di mass-shell;  $\Gamma$  l'iperbole della massa trasversa.

Adesso andiamo ad intersecare J (e  $\Gamma$ ) con una linea retta condotta da  $P'$  a O; il punto di intersezione R avrà coordinate:

$$R = \left(0, \frac{m}{\mu}q, \frac{m}{\mu}E\right)$$

la distanza:

$$\bar{\tau} = \overline{P'R} = \mu - m \quad (\text{B.117})$$

fornisce una “energia cinetica trasversa” o “Q-valore trasverso”; la distanza:

$$\tau' = \overline{PR}_{(suJ)}$$

è:

$$\tau' = m \sinh^{-1}\left(\frac{\Gamma}{m}\right) \quad (\text{B.118})$$

Notiamo che la distanza:

$$z = \overline{P'Q}_{(su\Gamma)}$$

può essere anche scritta come:

$$z = \mu \sinh^{-1}\left(\frac{q}{\mu}\right) \quad (\text{B.119})$$

La distanza:

$$\xi = \overline{PK}_{(suJ)}$$

risulta essere:

$$\xi = m \sinh^{-1}\left(\frac{p}{m}\right) \quad (\text{B.120})$$

La distanza:

$$\tau = \overline{PP''}_{(suJ)}$$

è semplicemente:

$$\tau = p_o\theta \quad (\text{B.121})$$

Il modo in cui queste distanze sono state scritte è istruttivo, almeno come ausilio mnemonico.

La variabile  $\bar{\tau}$  (B.117) è la minima distanza di  $P'$  dalla iperbole trasversale; la variabile  $\tau$  (B.121) è la massima distanza di  $P$  dal piano longitudinale. Entrambe possono sostituire l'impulso trasverso per la rappresentazione dei dati.

Le tre variabili  $\tau'$  (B.118);  $z$  (B.119) e  $\xi$  (B.120) sono essenzialmente del tipo:

$$A = m \sinh^{-1}(\beta\gamma) \quad (\text{B.122})$$

Cioè il prodotto delle masse ( $\tau', \xi$ ), o della massa trasversa, per l'arcoseno iperbolico del rapporto (impulso/massa), che è  $\beta\gamma$ .

Quindi la variabile  $\tau'$  (B.118); è un “ $\beta\gamma$  trasverso”, la variabile  $\xi$  (B.120) corrisponde ad un coefficiente “ $\beta\gamma$ ”, la variabile  $z$  (B.119) corrisponde ad un “ $\beta\gamma$  longitudinale” di una particella avente massa trasversa  $\mu$  anziché  $m$ .

In fig. B.13 vengono mostrate rispettivamente le distribuzioni sperimentali di  $z, \tau', \xi, \mu, \tau$  e  $\bar{\tau}$  per il processo inclusivo di produzione di particelle in una collisione  $\pi^-p$  a 11.2 Gev/c. Vale la pena anche menzionare che la conoscenza della massa  $m$  della particella rivelata è necessaria per la misura della rapidità  $y$  (B.85). A questo punto sentiamo la necessità di fare alcuni commenti, riferendoci alla fig. B.13:

A- Immediata è la definizione della variabile:

$$\tau = p\theta \quad (\text{B.123})$$

B- La distribuzione della massa trasversa deforma la distribuzione dei  $p_T$  e, implicitamente, indica il rapporto  $\pi/p$ .

C- La distribuzione della  $\tau$  non è molto diversa per differenti topologie, in linea di principio,  $\tau = p\theta$  non è una variabile migliore di  $r$ .

D- Nella distribuzione delle  $z$ , la moltiplicazione di  $y$  per  $\mu$  dilata la scala per le particelle pesanti.

E- La distribuzione della  $\xi$ , ancora una volta, mette in evidenza la separazione  $\pi/p$  dovuto all'assegnazione (o misura) delle masse evidenziando in modo chiaro gli eventi elastici.

F- La distribuzione della  $\tau'$  risulta interessante se comparata con quella dell'impulso trasverso.

## B.18 Scelte di coppie di variabili

Come  $\xi$ ,  $\tau'$  è, per una data massa, funzione di  $r$ ; la variabile  $\tau'$  delimita uno strato sottile nello spazio delle fasi; essa separa pioni da protoni e finalmente fornisce una miglior separazione sperimentale nella regione ad alto  $p_T$  più dello stesso  $p_T$ .

Per concludere abbiamo anche la distribuzione della "Energia cinetica trasversa". Non è irrilevante notare che la distribuzione di  $\bar{\tau}$  sono diverse per differenti topologie più di quanto accada per distribuzioni di  $p_T$ .

Nel paragrafo (B.10) è stato possibile render conto dei fattori dello spazio delle fasi, in reazioni esclusive, per mezzo di una scelta particolare di coordinate. È possibile scegliere coppie di variabili per reazioni inclusive con cui la densità dello spazio delle fasi è uniforme per un fissato  $M_x$ .

Il compito è piuttosto facile poich'è si sta tramando con una singola particella rivelata e misurata; la sezione d'urto sarà data dalla (B.20), che scritta con il formalismo Lorentz invariante (B.59).

Abbiamo:

$$dV_R = d(Lips)$$

dove, come al solito, Lips significa spazio delle fasi Lorentz invariante.

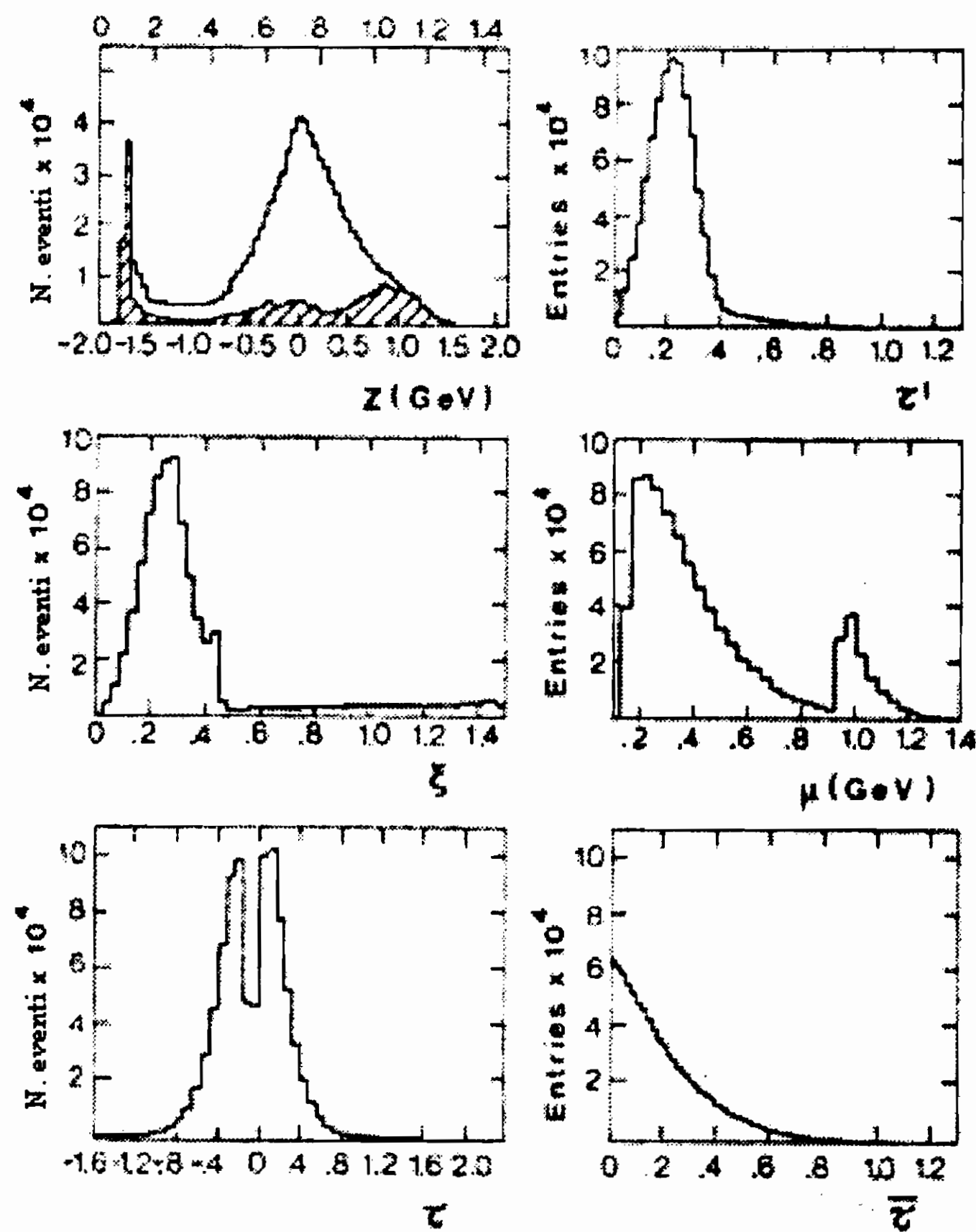


Figura B.13: Interazioni inclusive adrone-adrone a 150 GeV[165]. a- Distribuzione della variabile  $z$  data dalla (B.111); b- distribuzione di  $\tau'$  dato dalla (B.118); c- distribuzione di  $\xi$  definito dalla (B.120); d- distribuzione della massa traversa, definita dalla (B.62); e- distribuzione della variabile  $\tau$  definita dalla (B.123); f- distribuzione della variabile  $\bar{\tau}$  definita dalla (B.117).

Riferendoci alla fig. B.13,  $d(Lips)$  per una data  $m$  diventa:

$$\begin{aligned} d(Lips(m)) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(E^2 - p^2 - m^2) d^4p = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \delta(E^2 - p^2 - m^2) dE r dr d\varphi dq \end{aligned} \quad (B.124)$$

quindi integrando in  $dr$ :

$$dLips(m) = \frac{1}{(2(2\pi)^3)} dE d\varphi dq \quad (B.125)$$

Alternativamente è possibile integrare su  $E$  per ottenere:

$$dLips(m) = \frac{1}{(2(2\pi)^3)} \frac{dq}{E} r dr d\varphi$$

cioè:

$$dLips(m) = \frac{1}{(4(2\pi)^3)} dyd(r^2)d\varphi \quad (\text{B.126})$$

oppure:

$$dLips(m) = \frac{1}{(4(2\pi)^3)} dyd(\mu^2)d\varphi \quad (\text{B.127})$$

e ancora:

$$dLips(m) = \frac{1}{(2(2\pi)^3)} dy\mu d\mu d\varphi = \frac{1}{(2(2\pi)^3)} dzd\mu d\varphi \quad (\text{B.128})$$

Queste considerazioni dirette suggeriscono l'adozione di 4 possibili coppie di coordinate:

$$(E, q); (y, r^2); (y, \mu^2); (z, \mu)$$

L'abitudine di usare diagrammi  $(y, r)$  dovrebbe essere abbandonata. Il confine che racchiude la regione fisica è facilmente ricavabile dalla mappatura. Nel caso particolare del piano  $(E, q)$ , la regione fisica sottostà alla ovvia condizione:

$$E^2 - q^2 = m^2 \quad (\text{B.129})$$

e:

$$E = \frac{s - m^2 - M_{min}^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{B.130})$$

dove con  $M_{min}$  abbiamo indicato la più piccola massa possibile per la particella  $x$  nella eq (B.58).

Analogamente nel piano  $(y, \mu^2)$  la regione fisica soddisfa alla condizione:

$$\mu^2 = m^2 \quad (\text{B.131})$$

e:

$$\mu \cosh y = \frac{s - m^2 - M_{min}^2}{2\sqrt{s}} \quad (\text{B.132})$$

dove abbiamo  $E = \mu \cosh y$ .

## B.19 Sfericità, Sferocità e thrust

Sin dai primi anni 70[166] si è compresa l'importanza di realizzare degli esperimenti che utilizzando collisioni  $e^+e^-$  studiano la struttura interna degli adroni. Il processo  $e^+e^- \rightarrow \text{adroni}$  ad energie  $\sqrt{s} \approx 5$  Gev o superiori, differiscono dalla maggioranza degli altri processi adronici in quanto gli adroni sono il risultato del decadimento di un fotone virtuale arbitrariamente pesante.

Il modo nel quale tale fotone “pesante” decada in adroni è argomento di speculazioni, tuttavia una rappresentazione affascinante è di vedere il fotone che decade in una coppia virtuale di partoni (quark-antiquark per intenderci) che, a loro volta, decadono in pioni o adroni. In questo processo, a causa della elevata forza di legame del sistema quark-antiquark si può prevedere una distribuzione angolare non isotropa per gli adroni nello stato finale del processo, questo perché in un certo senso gli adroni “sembrano ricordarsi” la direzione lungo la quale vengono emessi i loro costituenti “originali”. Sotto queste condizioni l'impulso trasverso degli adroni finali, relativamente alla linea di volo dei loro costituenti *originali*, sarà limitato come nelle collisioni adrone-adrone, mentre l'impulso longitudinale potrà essere decisamente superiore. Questo porta al formarsi di *jet* nei processi di collisione di fasci e la distribuzione degli impulsi come l'aumento della molteplicità degli adroni nelle collisioni  $e^+e^-$  sarà molto più simile alla situazione che si presenta nelle ordinarie collisioni adrone-adrone.

Esperimenti in questo senso furono realizzati nel 1975[166]b. Per determinare come si distribuiscono eventi di tipo jet in collisioni  $e^+e^-$ , il gruppo di SLAC lavorando a SPEAR ha calcolato una quantità di carattere globale (nel senso che caratterizza tutto l'evento) denominata *sfericità*. Consideriamo la reazione (B.1) iniziata con  $e^+ = a$  ed  $e^- = b$  (tutte le quantità sono considerate nel CMS), la sfericità viene definita usando la (B.24), nel modo seguente:

$$S = \frac{3}{2} \text{Min} \left( \frac{\sum r_i^2}{\sum p_i^2} \right) \quad (\text{B.133})$$

La variabile  $S$  ha la proprietà di avvicinarsi a 0 per eventi che presentano impulsi trasversi legati, invece tende ad 1 per eventi con un'alta molteplicità ed isotropia nella distribuzione delle particelle nello spazio delle fasi<sup>6</sup>. L'asse del jet viene scelto in modo da minimizzare  $(\sum r_i^2)$ .

Recentemente si sono sviluppate analisi teoriche della struttura dei jet nell'ambito della *Quantum chromodynamics* (QCD) che hanno prodotto una serie di parametri misurabili.

Nel 1977, H.Georgi e M.Machacek hanno definito una variabile  $S'$ , chiamata sferocità che come  $S$  (B.133) misura la deviazione dell'evento da una struttura esattamente a 2-jet.

La sferocità è definita nel seguente:

$$S' = \left(\frac{4}{\pi}\right)^2 \text{Min} \left( \frac{\sum r_i}{\sum p_i} \right)^2 \quad (\text{B.134})$$

in questo caso l'asse dei jet è scelto in modo da minimizzare  $\sum |r_i|$ , mentre il fattore  $(\frac{4}{\pi})^2$  viene dalla necessità di normalizzare la variabile  $S'$ , che deve essere 1 per eventi a simmetria perfettamente sferica.

La giustificazione di tale scelta si basa sul punto cruciale che una quantità misurabile sperimentalmente deve essere indipendente dalle funzioni che vanno a descrivere il decadimento dei partoni, deve invece dipendere dalle proprietà di insieme di ciascun jet. Trascurando la dispersione dell'impulso trasverso all'interno di ciascun jet, la sferocità (B.134) dipende solo dall'impulso totale di ciascun jet, mentre la sfericità (B.133) dipende da come l'impulso dei jet si distribuisce tra gli adroni finali. Questo argomento suffraga una teoria generale dovuta a Sterman e Weinberg che una variabile calcolabile su base teorica o da un modello, non deve poter distinguere tra stati fisici indistinguibili

Una variabile complementare introdotta con motivazioni simili alle precedenti, fu proposta da E.Fahri[168], venne chiamata *thrust*  $D$ , tende ad evidenziare il massimo valore della componente longitudinale

---

<sup>6</sup>La (B.133) coincide con la definizione del tensore degli sforzi (cfr.[167]).



dell'impulso, definita come:

$$D = 2\text{Max} \left[ \frac{\sum q_i}{\sum p_i} \right] \quad (\text{B.135})$$

dove la somma al numeratore viene eseguita su tutte le particelle emesse in un emisfero rispetto al sistema del centro di massa.

Una generalizzazione della sferocità (B.134) come variabile insensibile ai dettagli del decadimento dei quarks e gluoni in adroni e calcolabile in modo perturbativo con la QCD è stata proposta da A.Roychaudhuri, partendo dall'osservazione che le "buone" proprietà della sferocità si sarebbero conservate per una qualsiasi funzione della combinazione:

$$u = \left( \frac{\sum r_i}{\sum p_i} \right) \quad (\text{B.136})$$

L'autore ha focalizzato la sua attenzione sul comportamento di differenti potenze di  $u$  trovando che per talune potenze superiori al secondo grado, i contributi di tipo non perturbativo calcolati con la QCD contribuiscono solo per una piccola frazione, ad energie inferiori ai 10 Gev.

Per questo sono state definite nuove variabili:

$$T_n = \left( \frac{4}{\pi} \right)^n \text{Min} \left\{ \frac{\sum r_i}{\sum p_i} \right\}^n \quad (\text{B.137})$$

Anche in questo caso, il fattore numerico assicura che, per un evento perfettamente sferico  $T_n$  assuma il valore 1 per  $n$  qualsiasi e sia nullo per un evento esattamente a due jet.

Le variabili (B.133), (B.134), (B.135) e (B.137) forniscono informazioni globali su eventi a multicorpi nel senso che esse usano le informazioni che derivano da tutte le particelle rivelate nello stato finale per determinare un'unica quantità misurabile. Essi forniscono un modo per testare per le previsioni della QCD. Usando la direzione dell' "asse thrust" come asse Jaffe e Low hanno valutato le "correlazioni" tra i piani determinati. Per concludere diciamo che, ovviamente, l'uso delle suddette variabili non si restringe al solo campo della fisica  $e^+e^-$ , ma è di applicazione diretta anche nel caso di collisioni adroniche.

## B.20 Conclusioni

Nella nostra ricerca di parametri misurabili sensibili ai fenomeni fisici, l'uso di variabili invarianti per trasformazione di Lorentz come  $t$  ed  $u$  è stata spesso abbandonata al passaggio da processi a due corpi ad altri con inelasticità superiore, sono state preferite delle variabili che variano linearmente in funzione delle trasformazioni di Lorentz. Possono essere suggerite ulteriori variabili di questo tipo senza alcuna limitazione numerica. Una scelta ragionevole si presenta in quei casi nei quali non ci sono alcune predizioni teoriche. Comunque, quando abbiamo una teoria o un modello in grado di fare delle esplicite previsioni, le variabili da misurare sperimentalmente risultano obbligate, queste potrebbero essere sia di tipo vecchio che di tipo nuovo.

# Bibliografia

- [1] B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, (Ed. W.H. Freeman and Co., New York) 1983;
- [2] J.Perrin: *La discontinuité de la Matière*: Revue du Mois **1**, 323 (1906);
- [3] a)- J. Feder and A. Aharony: *Fractals in Physics: in honor of B.B. Mandelbrot* (Ed. North-Holland, Amsterdam) 1989; b) L. Pietronero: *Theoretical Concepts for Fractal Growth*: in *Fractals in Physics*, ibidem p. 279;
- [4] M.V. Berry: The New Scientist, 27 gennaio 1983;
- [5] M. Davis and P.J.E. Peebles: Astron. Journ. **267**, 465 (1983);
- [6] S. Weinberg: *Gravitation and Cosmology* (Ed. John Wiley, 1972);
- [7] Y. Barishev and P. Teerikorpi *Discovery of Cosmic Fractals* (Ed. World Scientific, 2002);
- [8] L. Pietronero: Physica **A144**, 257 (1987);
- [9] J. Feder: *Fractals* (Ed. Plenum Press, New York, 1988);
- [10] a- F. Hausdorff: Mathematische Annalen **LXXIX**, 157 (1919); b- A.S. Besicovitch: Journ. London Math. Soc. **IX**, 126 (1934); c- A.S. Besicovitch: Mathematische Annalen **CX**, 321 (1935);
- [11] B.B. Mandelbrot: *Fractals: Form, Chance and Dimension* (Ed. W.H. Freeman, 1977). Questa edizione è diversa da quella originale francese *Les Objects Fractals* (nel consultare una traduzione italiana bisogna fare attenzione a quale delle due edizioni ci si riferisca);
- [12] B.B. Mandelbrot: *The Fractal Geometry of Nature*, W.H. Freeman, New York, (1982);
- [13] Y. Gefen and B.B. Mandelbrot and A. Aharony: Phys. Rev. Lett. **50**, 77 (1980);
- [14] J.M. Gordon et al.: Phys. Rev. Lett. **56**, 2280 (1986);
- [15] M.V. Berry and Z.V. Lewis: Proc. R. Soc. London **A370**, 459 (1980);

- [16] R.D. Mauldin: in *Dimension and Entropies in Chaotic Systems* (Ed. Springer Verlag, 1986) p. 28;
- [17] R.F. Voss: in *Scaling Phenomena in Disordered Systems* (Ed. Plenum Press, 1985) p. 1;
- [18] a)M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjio, Y. Sawada: Phys. Rev. Lett. **53**, 286 (1984); b) Phys Rev. **A32**, 3814 (1985); vedi anche L. Pietronero, E. Tosatti *Fractals in Physics* (Ed. North Holland, 1985);
- [19] H. Poincaré: *Calcul des probabilité* (Ed. Gauthiers-Villars, 2<sup>a</sup> edizione, 1912);
- [20] F. Gassmann, R. Kotz, A. Wokaun: Europhysicnews **34/5**, 176 (2003);
- [21] R. Dawkins: *The Blind Watchmaker* (Ed. Norton, 1996);
- [22] H. Titchmarsh: *The Theory of Functions* (Ed. Oxford Univ. Press, 1958) p. 351;
- [23] A. Einstein: *Investigation on the Theory of Brownian Movement* (Ed. Dover, 1926). Gli articoli originali sono: a- A. Einstein: Annalen der Phys. **17**, 548 (1905); b- ibidem **19**, 371; c- 289 (1906); d- Zeit. f. Elektrochemie **13**, 41 (1907); e- ibidem **14**, 235 (1908);
- [24] H.E. Hurst, R.P. Black Y.M. Simaika: *Long-term Storage: an experimental Study* (Ed. Constable, 1965);
- [25] B.B. Mandelbrot and Van Ness: SIAM Rev. **10**, 422 (1968);
- [26] B.B. Mandelbrot: Water Resour. Res. **7**, 543 (1971);
- [27] H. Hentschel and I. Procaccia: a- Phys. Rev. A **29**, 1461 (1986); b- vedi anche: Phys. Rev. **A27**, 1266 (1983);
- [28] B.B. Mandelbrot: *Statistical Models and Turbulence*, Lectures Notes in Physics **12**, 333 (1972);
- [29] P. Bak: Physics Today **39**, 38 (1986);
- [30] C. Meneveau and K. Sreenivasan: Phys. Rev. Lett. **59**, 1424 (1987);
- [31] B.B. Mandelbrot: Journ. Fluid Mech. **62**, 331 (1974);
- [32] P. Billingsley: *Ergodic Theory and Information* (Ed. J. Wiley, 1965);
- [33] P. Grassberger: Phys Lett. A **97**, 227 (1983);
- [34] U. Frisch and G. Parisi: *Turbulence and Predictability in Geophysics Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (Ed. North Holland, 1985) p. 84, p. 88;
- [35] D. Katzen and I. Procaccia: Phys. Rev. Lett. **58**, 1169 (1987);
- [36] M.J. Sewell: *Maximum and Minimum Principles*, Cambridge University Press (1990);

- [37] B.B. Mandelbrot e J.W. Van Ness: S.I.A.M. Rev. **10**, 422 (1968);
- [38] S. Lovejoy: a- Proc. XXth Conf. on Radar Met., American Meteorological Society, Boston (1986) p.476; b- Science **216**, 186 (1982); c- Hanille Blanche **516**, 413 (1983);
- [39] W. Feller: *Introducion to Probability Theory and its applications*, vol. II (Ed. J. Wiley, 1971);
- [40] a- B.B. Mandelbrot, J.R. Wallis: Water Resour. Res. **4**, 909 (1968); b- H.B. Prosper: Phy. Rev. **D37**,1153 (1997); c- ibidem **D38**, 3584 (1988);
- [41] S. Lovejoy, B.B. Mandelbrot: Tellus **374**, 209 (1985);
- [42] G.F. Salvadori: *Multifrattali Stocastici: Teoria e Applicazioni*, Tesi di Dottorato in Matematica Applicata ed Operativa, Univ. di Pavia (1993);
- [43] A.G. Svesnikov e A.N. Tichinov: *Teoria delle Funzioni di Variablile Complessa* (Ed. Riuniti, Roma 1984);
- [44] H. Callen *Thermodynamics* (Ed. J. Wiley, 1960);
- [45] M. Ghil, O. Berni, G. Parisi: *Turbulence and Predictability in Geophysical Fields* North Holland (1985) p. 84;
- [46] a- D. Schertzer, S. Lovejoy, R. Visvanathan, D. Lavallo, J. Wilson: Universal Multifractals in Turbulence, in: *Fractal Aspects in Materials: Disordered Systems*, (Ed.s D.A. Weitz, L.M. Sanders, B.B. Mandelbrot, MRS, Pittsburg, 1988), pag. 267; b- D. Schertzer, S. Lovejoy, D. Lavallo, F. Schmitt: Universal Hard Multifractals, Theory and Observations: in *Nonlinear Dynamics of Structures*, (Ed.s R.Z. Sagdeev, U. Frisch, F. HUssain, S.S. Moiseev, N.S. Erokhin, World Sci., Singapore, 1994) pag. 213; c- S. Lovejoy and D. Schertzer: in *New Uncertainty Concepts in Hydrology and Hydrological Modeling*, (Ed. A.W Kundzewicz Cambridge Un. Press, 1995), pag. 62; d- S. Lovejoy and D. Schertzer: J.Geophys. Res. **95**, 2021(1990);
- [47] T.C. Hasley, M.H. Jensen, L.P. Kadanoff, I. Procaccia, B.I. Shraimian: Phys. Rev. **A33**, 1141 (1986);
- [48] S. P. Ratti et al., Z.Phys. **C61**, 229 (1994);
- [49] S. Lovejoy and D. Schertzer: comunicazione privata;
- [50] H.G. Schuster: *Deterministic chaos* (Ed. Physik Verlag Weinheim, 1988);
- [51] M.W. Hirsh and S. Smale : *Differential Equations, Dynamic Systems and Linear Algebra* , (Ed. Accademic Press, 1965);

- [52] V.I. Arnold, A. Avez: *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, (Ed. W.A. Benjamin, 1968);
- [53] H. Goldstein: *Meccanica Classica* (Ed. Zanichelli, 1991);
- [54] D. Ruelle: *Math. Intelligence* **2**, 126, (1980);
- [55] D. Ruelle : *Chaotic Evolution and Strange Attractors* (Ed. Cambridge Univ. Press, 1989);
- [56] D. Ruelle, J-P. Eckmann: *Rev. Mod. Phys.* **57**, 3, Part 1 (1985);
- [57] W.H. Press..et al.: *Numerical recipes* (Ed. Cambridge Univ. Press, 1986);
- [58] K.S. Kunz: *Numerical Analysis* (Ed. McGraw Hill, 1957);
- [59] P.S. Laplace : *Essai Philosophique sur les Probabilités* (Ed. Coucier, Paris, 1814);
- [60] Videocassetta *I frattali* prodotta da Scientific American e pubblicata da Mondadori (mostrata agli studenti del corso);
- [61] H. Poincare': *Science and Method* (Ed. Thoemmes Press, 1914);
- [62] J. Ford: *Physics Today*, april 1983;
- [63] C. Sparrow: *The Lorenz Equations: Bifurcation, Chaos and Strange Attractors* (Ed. Springer Verlag, 1988);
- [64] E.N. Lorenz: *Jou. Atm. Sciences* **20**, 130 (1963);
- [65] Edward N. Lorenz, *Deterministic Nonperiodic Flow*, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **20**, 130 (1963);
- [66] Steven H. Strogatz, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Addison-Wesley Publishing Co. (1994);
- [67] S. Eubank - D. Farmer, *An Introduction to Chaos and Randomness*, Lectures in Complex systems, SFI Studies in the Sciences of Complexity, Lect. Vol.II, Ed. Erica Jen, Addison-Wesley (1990);
- [68] Si veda ad esempio: A.I. Khinchin, A. Gamow: *Mathematical Foundations of Statistical Mechanics* (Ed. Dover, 1999);
- [69] A.J. Lichtenberg, M.A. Lieberman: *Regular and Stochastic Motion*, (Ed. Springer-Verlag, 1983);
- [70] J. Kaplan J. Yorke: *Springer Lect. Notes in Math.* **730**, 204 (1979);
- [71] G. Benettin, L. Galgani, J.M. Strelcyn: *Phys. Rev.* **A14**, 2338 (1976);
- [72] Barry Saltzman, *Finite Amplitude Free Convection as an Initial Value Problem-I*, *Journal of the Atmospheric Sciences*, **19**, 329 (1962);
- [73] Edward N. Lorenz, *Maximum Simplification of the Dynamic Equations*, *Tellus*, **12**, 243 (1960);
- [74] I. Stewart, *The Lorenz attractor exists*, *Nature*, **406**, 948 (2000);

- [75] W. Tucker, *The Lorenz attractor exists*, C.R. Acad. Sci. Paris, t.328, Serie I, p.1197 (1999);
- [76] a- T. Kohonen, *Self-Organization and Associative Memories* (Ed. Springer-Verlag, 1984); b- Biological Cybernetic **43**, 59 (1982); J. Blackmore, R. Miikkulainen *Visualizing high dimensional structures with incremental grid growing neural network*, in A. Prieditis and S. Russel (Eds) Machine learning Proc. 12th Int. Conf. (1995);
- [77] Si veda ad esempio, *Multiparticle Dynamics* (Ed.s A.Sissakian, G.Kozlov and E.Kolganova, World. Sci., 2003);
- [78] a- W. Kittel: Physica **A338**, 7 (2004); b- H.C. Eggers, ibidem, p. 20; c- M. Ta-chung, ibidem, p. 28; d- L. Quin, ibidem, pag. 36;
- [79] T. H. Burnett et al. (JACEE), Phys.Rev. Lett. **50**, 2062 (1983);
- [80] M. Adamus et al. (NA22), Phys. Lett. **B185**, 200 (1987);
- [81] A. Bialas and R. Peschanski, Nucl.Phys. **B273**, 703 (1986);
- [82] A. Bialas and R. Peschanski, Nucl.Phys. **B308**, 857 (1988);
- [83] E. A. De Wolf, I. M. Dremin, W. Kittel, Physics Report **270**, 1-141 (1996) (Si rimanda alla vasta bibliografia ivi contenuta);
- [84] V. Arena, G. Boca, R. Diaferia, S.P. Ratti et al.: Il Nuovo Cimento **A105**, 865 (1992);
- [85] S. P. Ratti et al. (IHSC), *Universal Multifractal Analysis of Multiparticle Production in h-h Collisions at  $\sqrt{s}=16.7$  GeV*, Proc.XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, Eds.Y. F. Wu and L. S. Liu (World Scientific, Singapore,1992) p.409;
- [86] S. P. Ratti, *Seminclusive Universal Multifractal Analysis of Multiparticle Production in h-h Collisions at  $\sqrt{s}=16.7$  GeV*, Proc.XXI Int. Symp. on Multiparticle Dynamics, Eds. C. Pajares (World Scientific, Singapore, 1992) p.299;
- [87] C. Albajar et al. (UA1), Nucl.Phys. **B345**,1 (1990);  
P. Lipa et al. (UA1) *Proc. Ringberg Workshop on Multiparticle Production, Ringberg Castle, Germany 1991*, Eds. R. C. Hwa, W. Ochs and N. Schmitz (World Scientific, Singapore, 1992) p.111;
- [88] Esistono numerosi libri di testo di livello piú o meno elementare sulla Cromodinamica Quantistica. Un buon testo introduttivo é: W. Greiner, S. Schramm, E. Stein: *Quantum Chromodynamics (Second edition)*, Springer, 2002;
- [89] G.Veneziano, *Proc. 3<sup>rd</sup> Workshop on Current Problems in High Energy Particle Theory*, Firenze 1979, Eds. R.Casalbuoni et al., Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1979;

- [90] R. C. Hwa, Phys.Rev. **D41**, 1456 (1990);
- [91] R. C. Hwa and J. C. Pan, Phys.Rev. **D45**, 1476 (1992);
- [92] Ph.Brax, R.Peschanski, Phys. Lett. **B253**, 225 (1991);
- [93] Per una panoramica introduttiva su vari aspetti di cosmologia e di astronomia si può fare riferimento a: B. Bertotti: *Introduzione a ... la cosmologia* (Ed. Le Monnier, 1980);
- [94] E. Mach: *La meccanica nel suo sviluppo storico-critico* (Ed. Boringhieri, 1968);
- [95] P.J.E. Peebles: *Large scale structure of the Universe*, Princeton University Press, Princeton (1980);
- [96] M. Davis and P.J.E. Peebles: *Survey of Galaxy Redshift* , Astrophysical Journal **267**, 465 (1983);
- [97] L. Pietronero: *The Fractal Structure of The Universe*, Physica A **144**, 257 (1987);
- [98] G.J. Baln and E.D. Feigelson: *Astrostatistics* (Ed. Chapman and Hall, London, 1996);
- [99] T.A. Agekjan: *Stelle Galassie Metagalassia*, Edizioni Mir, (1985);
- [100] occorre citare HUBBLE!
- [101] J. Hucra M. Davis D. Latham J. Tonry: Astrophysical Journal Supp. **52**, 89 (1983);
- [102] P.H. Coleman L. Pietronero: *The Fractal Structure of The Universe*, Physics Reports **213**, 311 (1992);
- [103] A. Blanchard and J.M. Alimi : Astronomy and Astrophysics **203**, L1-L4 (1988);
- [104] H.E. Stanley: Introduction to Phase Transition and Critical Phenomena (Ed. Oxford Univ. Press., 1971);
- [105] F. Sylos Labini: *Scale-invariance of Galaxy Clustering*, Physics Reports **293** 61-226 (1998);
- [106] De Vaucouleurs: Science **167** 1203 (1970);
- [107] S.M. Feber J.S. Gallagher: Astronomy and Astrophysics Annual Review **17**, 135 (1979);
- [108] V. de Lapparent et al.: Astrophys. Journ. **343**, 1 (1989)
- [109] B.B.Mandelbrot: a- *Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk*. (Ed. Springer-Verlag, 1997); b- Scientific American, February (1999); c- *Multifractals and 1/F Noise: Wild Self-Affinity in Physics* (Ed. Springer-Verlag, 1999); d- B.B.Mandelbrot, L. Calvet, A. Fisher: Discussion Papers of the Cowles Foundation of Economics. (Ed. Cowles Foundation, Yale University, 1997) p. 1164;



- [112] R.N. Mantegna, H.E. Stanley: *An introduction to Econophysics* (Ed. Cambridge University Press, 2000);
- [113] A. Papoulis: *Probabilità, variabili aleatorie e processi stocastici* (Ed. Boringhieri, 1973);
- [114] Autori Vari: *Come si legge il Sole24Ore* (Ed. Edizioni il Sole24Ore, 2000);
- [115] M. Gabrielli e S. De Bruno: *Capire la Finanza: Guida pratica agli Strumenti Finanziari* (Ed. Edizioni il Sole24Ore, 2002); *Capire la finanza*. Edizioni il Sole24Ore.
- [116] J. C. Hull: *Opzioni, Futures ed altri derivati* (Ed. Edizioni il Sole24Ore, 1999);
- [117] R. Pring *Analisi tecnica dei mercati finanziari* (Ed. McGrawHill, 1996);
- [118] W.Feller: *An Introduction to Probability and Its Applications* (Ed. John Wiley and Sons, 1968);
- [119] B.V.Gnedenko: *The Theory of Probability* (Ed. Mir Publishers, Moscow, 1975);
- [120] M.G. Bruno, P. Allegrini, P. Grigolini: *Appl. Stoch. Mod. in Bus. and Ind.* **15**, 1 (1999);
- [121] M.G. Bruno, G. Olivieri: *Economia Società e Istituzioni*, Anno XI, n. 3 (1999);
- [122] Ya. A. Smorodinsky and J. Taqqu: *Stable non-gaussian random processes* (Ed. Chapman and Hall, 1980);
- [123] a cura di M. Ramondetta e A. Repossi: *Seveso vent'anni dopo. Dall'incidente al Bosco delle Querce.*, Fondazione Lombardia per l'Ambiente, Milano (1998);
- [124] a- G. Belli, G. Bressi, S. Cerlesi, S.P. Ratti: *Chemosphere*, **12**, 517, (1983); b- S. Cerlesi, G. Belli, S.P. Ratti, in: *Proc. Int. Conf. Energia e Ambiente* (Ed. Soc. Ital. di Merceologia, 1984) pag. 217; c- G. Belli, S. Cerlesi, S.P. Ratti, in: *Technological Response to Chemical Pollution*. Ed. Lith Gamas, Milano, 1985) pag. 121 e pag. 129; d- S.P. Ratti, G. Belli, A. Lanza, S. Cerlesi: in: *Chlorinated Dioxins and Dibenzofurans in Perspective*. (Ed. C.Rappe, G.Choudoury, L.H.Keith, Lewis Publ., 1986) pag. 467; e- S.P. Ratti, G. Belli, A. Lanza, S. Cerlesi, G.U. Fortunati: *Chemosphere*, **15**, 1549 (1986); f- S. Cerlesi, A. di Domanico, S.P. Ratti: *ibidem* **18**, 898, (1986); g- *ibidem* 855, (1986); h- A. di Domenico, S. Cerlesi, S.P. Ratti: *Chemosphere* **20**, 1559 (1989);

- [125] F. Argentesi, L. Bollini, S. Facchetti, G. Nobile, W. Tumiatti, G. Belli, S.P. Ratti, S. Cerlesi, G.U. Fortunati, V. La Porta, in: Proc. World Conf. on Chemical Accidents. (ed. CEP Consultant Ltd, 1987) pag 227;
- [126] S.P. Ratti: Gli incidenti di Seveso e di Chernobyl *Presentazione per il XXVII Congresso Nazionale della Società Italiana di Fisica*, Sassari, 30 Settembre 2002.
- [127] G. Belli, G. Bressi, E. Callegarich, S. Cerlesi, S.P. Ratti, in: *Chlorinated Dioxin and Related Compounds: Impact on Environment* (Ed. O. Hutzinger, Pergamon Press, 1982) p. 137;
- [128] G. Belli, S. Cerlesi, E. Milani, S.P. Ratti: *Tox. Environ. Chem.* **22**, 101, (1989)
- [129] G. Belli, S. Cerlesi, A. Lanza, S.P. Ratti, in: *Chlorinated Dioxins and Dibenzofurans in Perspective* (Ed. C. Rappe, G. Choudhary, L.H. Keith, Lewis publishers Inc., 1985) p. 467.
- [130] a- S.P. Ratti: *The role of statistical analysis in the management of chemical accidents*, in: Proc. Ecoinforma (Ed. O. Hutzinger, Ecoinforma Press, 1989) pag. 1; b- G. Belli, S. Cerlesi, S. Kapila, S.P. Ratti, A.F. Yanders: *Chemosphere*, **18**, 1251 (1989);
- [131] G. Belli, G. Bressi, L. Carrioli, S. Cerlesi, M. Diani, S.P. Ratti, G. Salvadori: *Chemosphere* **20**, 1567 (1990);
- [132] a- G. Belli, S.P. Ratti, G. Salvadori: *Tox. and Environ. Chem.*: **33**, 201 (1991); b- G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, S. Lovejoy, D. Schertzer: *Improvement of the multifractal analysis of the Seveso TCDD pollution*: *Ann. Geophys.* **10**, C343 (1992); c- G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, S. Lovejoy, D. Schertzer: *Seveso pollution as a hard multifractal process*. *E. O. S.* **73**, 57 (1992).
- [133] Y. Chiriginskaya and D. Schertzer: private communication.
- [134] S.P. Ratti, G. Belli, G. Bressi, M. Cambiaghi, A. Lanza, G. Salvadori, D. Scannicchio: *Analysis of radiological measurements in the R.E.M. data base*, in: Improvement of reliable long distance atmospheric transport models. (Report EUR-12549, 1990), vol. 1, pag. 1;
- [135] S.P. Ratti, G. Belli, G. Bressi, M. Cambiaghi, A. Lanza, G. Salvadori, D. Scannicchio: *Analysis of air radioactivity in Italy and France and a hint into a fractal model. Code for assessing off-site consequences of nuclear accidents*. (Report EUR-13013, 1990), vol. 2, pag. 1183;

- [136] S.P. Ratti, G. Belli, G. Salvadori: *Analisi e descrizione frattale della radioattività in aria in Italia ed in Francia dopo l'incidente di Chernobyl*. Modellistica dei sistemi complessi e radiprotezione. (Ed. ENEA, 1991) pag. 37;
- [137] G. Salvadori, D. Schertzer, S. Lovejoy, S.P. Ratti, G. Belli: *Ann. Geophys.* **11**, C310 (1992);
- [138] G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, E. Quinto, G. Graziani, M. de Cort: *Fractal modelling of Chernobyl radioactive fallour over Europe* Proc. Fractals in Geoscience and remote sensing. (Ed. G.G. Wilkinson, I. Kanellopoulos, J. Merger, Report EUR-16092, 1994) pag. 237;
- [139] D. Schertzer, S.P. Ratti, G. Salvadori, G. Belli: *Multifractal analysis of Chernobyl fallout self organized criticality and hot spots*. Reactor Phys. and Environ. Anal. (Ed. Am. Nucl. Soc., 1995) pag. 743;
- [140] S. Lovejoy: *The statistical Characterization of Rain Areas in terms of Fractals*, Conference on Radar Meteorology, Toronto (1981);
- [141] G. Salvadori: *Modelli matematici per lo studio della distribuzione della radioattività in Italia indotta dall'incidente nucleare di Chernobyl*, Tesi di Laurea, Università degli studi di Pavia, Pavia, A.A. 1987/88;
- [142] G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli, F. Missineo, E. Giroletti, I. Kobal, J. Vaupotic: *Analisi multifrattale della distribuzione spaziale di  $^{222}\text{Rd}$  "indoor" in Slovenia*. Proc. ARIA (Ed. P. Orlando, G. Sciocchetti, R.R. Trevisi, LITO, Roma, 1993) pag. 329;
- [143] S.P. Ratti, G. Salvadori, G. Belli, E. Quinto: *A monofractal model of air radioactivity pollution*. Congr. Naz. A.I.R.P. (Ed. AIRP, 1995) pag. 353;
- [144] G. Salvadori, S.P. Ratti, G. Belli: *Health Physics* **72**, 60 (1997);
- [145] E. Quinto: *Modelli mono e multifrattali per lo studio della distribuzione di inquinanti in aaria e al suolo*, Tesi di Laurea, Università degli studi di Pavia, Pavia A.A. 1993/94
- [146] B.H. Kaye: *A Random walk through fractal dimensions*, VCH, Weinheim (1989);
- [147] A. Benjamin: *Probability, Statistic and Decision for Civil Engineering*, McGraw Hill (1978);
- [148] N. Cressie: *Statistics for spatial data*, J. Wiley and Sons (1992);

- [149] U. Maione e U. Moisello: *Elementi di statistica per l'idrologia*, La Goliardica Pavese, Pavia (1990);
- [150] B.D. Ripley: *Spatial statistics*, (Ed. J. Wiley and Sons, 1981);
- [151] S. Ratti e L. Tallone: *Elementi introduttivi all'analisi delle osservazioni* (Ed. Quattri, Milano, 1964);
- [152] A. Rotondi, P. Pedroni, A. Pievatolo: *Probabilità Statistica e Simulazione* (Ed. Springer-Verlag, Milano, 2005) II Edizione;
- [153] V. Smirnov: *Cours de Mathematique Superieur* (Ed. MIR, Mosca, 1970) vol. I, pag. 413;
- [154] B.H. Prosper, *Phys. Rev.* **D38**, 3584 (1988); **D37**, 1153 (1988); **D36**, 2087 (1987); **D38**, 854 (1988);
- [155] a- F. Mandl: *Statistical Physics* (Ed. J. Wiley, N. York, 1988);  
b- E. Fermi *Thermodynamics* (Ed. Dover, N. York, 1937);c- un qualunque testo di Termodinamica ben fatto;
- [156] Per una descrizione più dettagliata si veda S. Ratti: "Appunti di Fisica Generale" Ed. La Goliardica Pavese (1974);
- [157] W. Paul, J. Baschnagel *Stochastic Processes From Physics to Finance* (Ed. Springer, 1999);
- [158] E.A. DeWolf, I.M. Dremin e W. Kittel: *Physics Reports* **270**, n.1; (1996) (si rimanda anche alla vasta bibliografia ivi contenuta);
- [159] A.H. Muller *Phys. Rev.* **D4**, 150 (1971);
- [160] G.B. Falland: *Fourier Analysis and its applications*, (Wadsworth and Brooks, California, 1987), pag. 227: (si veda la App. A);
- [161] A. Giovannini, L. Van Hove: *Acta Physica Polonica* **B19**, 917 (1988);
- [162] W. Kittel, S.P. Ratti, L. Van Hove: *Nucl. Phys.* **B30**, 333 (1971);
- [163] F.T. Dao, M.F. Hodous, I.A. Pless, R.A. Singer: *Phys. Rev. Lett.* **27**, 1481 (1971);
- [164] R.P. Feynman: *Proc. IIIrd Int. Conf. at Stony Brook* (Ed. New York State Univ. at Stony Brook, 1969) p. 237;
- [165] P. Antich, E. Calligarich, G. Cecchet, F. Impellizzeri, L. Liotta, S.P. Ratti: *Proc. Multiparticle Hadrodynamics* (Ed.s F. Duimio, A. Giovannini, S.P. Ratti, Pubbl. by INFN, 1973);
- [166] a- J.D. Bjorken: *Phys. Rev.* **D1**, 1416 (1970); b- G. Hanson et al.: *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1609 (1975);
- [167] B. Finzi: *Meccanica Razionale* Ed. Zanichelli, 1952;
- [168] E. Fahri: *Phys. Rev. Lett.* **39**, 1587 (1977); si veda anche A. De Rujula et al.: *CERN Report TH-2455* (1978); So-Young-Pi et al.: *Phys. Rev. Lett.* **41**, 142 (1978);

- [169] A.Giovannini, G.C. Mantovani, S.P. Ratti: Riv. Nuovo Cim., Serie 3, Vol. 2, n. 10 (1979).



# Contents

<b>1</b>	<b>I frattali e il nostro mondo</b>	<b>3</b>
1.1	Considerazioni iniziali . . . . .	3
1.2	Nomen est Numen . . . . .	4
1.3	Jean Perrin - 1906 . . . . .	5
1.4	I frattali naturali e non . . . . .	13
1.5	I frattali e la fisica . . . . .	16
1.6	Lo sviluppo del presente volume . . . . .	19
1.7	Ringraziamenti . . . . .	22
<b>2</b>	<b>I frattali geometrici</b>	<b>25</b>
2.1	Introduzione . . . . .	25
2.2	Dimensione di Hausdorff-Besicovitch . . . . .	26
2.2.1	La curva di Peano . . . . .	28
2.2.2	Dimensione frattale di box counting . . . . .	29
2.2.3	Le coste della Norvegia e di altri Paesi . . . . .	30
2.2.4	La codimensione frattale . . . . .	32
2.3	La curva triadica di Koch . . . . .	34
2.4	L'insieme triadico di Cantor . . . . .	36
2.5	Curdling, trema e whey . . . . .	38
2.6	Dimensione di somiglianza: affinità . . . . .	39
2.7	La dimensione frattale di cluster . . . . .	42
2.8	Insiemi di Minkowsky . . . . .	49
2.9	Frattali autoinversi . . . . .	50
2.10	Insiemi di Mandelbrot-Given e di Sierpinski . . . . .	53

2.11	Frattali veri: automobili ad idrogeno . . . . .	55
2.11.1	Un'audace proposta . . . . .	57
2.11.2	I supercondensatori frattali . . . . .	58
2.11.3	I supercondensatori nelle auto ad idrogeno . . . . .	61
2.11.4	Il test su strada . . . . .	62
2.12	Un volo ardito nell'evoluzione . . . . .	63
<b>3</b>	<b>Le funzioni frattali</b>	<b>73</b>
3.1	Introduzione . . . . .	73
3.2	Linee e funzioni, aree ed integrali . . . . .	74
3.3	Il paradosso di Schwarz . . . . .	79
3.4	Lo <b>scaling</b> delle funzioni frattali . . . . .	83
3.5	La funzione di Weierstrass . . . . .	84
3.6	La funzione di Weierstrass-Mandelbrot . . . . .	86
3.7	Funzioni di W-M deterministiche . . . . .	87
3.8	Funzioni di W-M stocastiche . . . . .	93
<b>4</b>	<b>Random Walks e Frattali</b>	<b>97</b>
4.1	Introduzione . . . . .	97
4.2	Il Moto Browniano di Einstein . . . . .	98
4.3	Random walks mono-dimensionali . . . . .	104
4.4	Proprietà di scaling . . . . .	105
4.5	Il moto browniano frazionale . . . . .	110
4.5.1	Definizione di moto browniano frazionale . . . . .	112
4.5.2	Simulazione del moto browniano frazionale . . . . .	115
4.5.3	Dettagli della simulazione . . . . .	120
4.6	L'analisi range - varianza . . . . .	124
<b>5</b>	<b>Misure di insiemi frattali</b>	<b>127</b>
5.1	Introduzione . . . . .	127
5.2	Barra di Cantor e scale diaboliche . . . . .	130
5.3	Il processo moltiplicativo binomiale . . . . .	133
5.4	Sottoinsiemi frattali . . . . .	137



<i>CONTENTS</i>	569
5.5	Esponente di Lipschitz-Hölder e $f(\alpha)$ . . . . . 140
5.6	Gli esponenti di massa . . . . . 144
5.7	La relazione tra $\tau(q)$ e $f(\alpha)$ . . . . . 147
<b>6</b>	<b>Frattali stocastici semplici</b> <b>151</b>
6.1	Introduzione . . . . . 151
6.2	Evidenza empirica dello scaling . . . . . 154
6.3	Il rapporto area perimetro . . . . . 159
6.4	Le serie temporali di pioggia . . . . . 164
6.5	FSP monodimensionali . . . . . 167
6.6	Simulazione di FSP in una dimensione . . . . . 169
6.7	La FSP in due dimensioni . . . . . 171
6.8	Appendice: interpretare una figura . . . . . 173
<b>7</b>	<b>I multifrattali stocastici</b> <b>177</b>
7.1	Introduzione . . . . . 177
7.2	Importanza della codimensione . . . . . 178
7.3	Cascate e processi moltiplicativi . . . . . 182
7.4	I modelli moltiplicativi . . . . . 184
7.4.1	Il modello $\beta$ . . . . . 184
7.4.2	Il modello $\alpha$ . . . . . 185
7.5	Scaling Multiplo delle distribuzioni . . . . . 187
7.6	Proprietà della funzione $c(\gamma)$ . . . . . 190
7.7	Dimensione stocastica del campione . . . . . 193
7.8	Scaling dei momenti statistici . . . . . 196
7.9	Proprietà della funzione $K(q)$ . . . . . 198
7.10	La codimensione duale dei momenti . . . . . 202
7.11	Prima classificazione di Multifrattali . . . . . 202
7.12	Proprietà bare e dressed: il flusso . . . . . 206
7.13	I Trace Moments o momenti di traccia . . . . . 207
7.14	Classificazione di fluttuazioni e di processi . . . . . 209
7.15	Modello $\alpha$ e momenti statistici . . . . . 213

<b>8</b>	<b>Multifrattali Universali</b>	<b>217</b>
8.1	Introduzione . . . . .	217
8.2	Multifrattali Universali Conservativi . . . . .	220
8.3	Multifrattali non conservativi . . . . .	225
8.4	I momenti a doppia traccia: DTM . . . . .	227
8.5	considerazioni conclusive . . . . .	229
<b>9</b>	<b>Il Caos e gli Attrattori Strani</b>	<b>231</b>
9.1	Introduzione . . . . .	231
9.2	Introduzione ai Sistemi Dinamici . . . . .	233
9.2.1	Relazione tra Mappe e Flussi . . . . .	236
9.2.2	Sistemi Conservativi e Dissipativi . . . . .	237
9.2.3	Stabilità di un sistema dinamico . . . . .	238
9.2.4	Insiemi invarianti ed attrattori . . . . .	240
9.3	Rappresentazione delle Soluzioni . . . . .	243
9.4	Il Caos Deterministico . . . . .	246
9.4.1	Lo shift di Bernoulli . . . . .	249
9.4.2	Gli esponenti di Liapunov . . . . .	252
9.5	Le Equazioni di Lorenz . . . . .	254
9.6	Derivazione delle equazioni di Lorenz . . . . .	255
9.6.1	Semplificazioni e approssimazioni . . . . .	257
9.7	Considerazioni generali . . . . .	265
9.8	Studio comparato traiettorie - fluido . . . . .	269
9.8.1	Risultati numerici . . . . .	270
9.9	Caos e ordine . . . . .	275
9.10	Esponenti di Liapunov ed equazioni di Lorenz . . . . .	277
9.11	L'Attrattore Strano di Lorenz . . . . .	285
9.11.1	Dimensione Frattale dell'Attrattore Strano . . . . .	289
9.11.2	La Congettura di Kaplan e York . . . . .	290
9.12	Criticalità auto-organizzata . . . . .	292
9.13	Conclusioni . . . . .	295

<i>CONTENTS</i>	571
<b>10 Intermittenza e particelle</b>	<b>297</b>
10.1 Introduzione . . . . .	297
10.2 I momenti fattoriali . . . . .	300
10.2.1 Richiamo di alcune definizioni . . . . .	301
10.2.2 Studi in una dimensione . . . . .	304
10.2.3 Studi in dimensioni piú estese . . . . .	312
10.3 Analisi multifrattale . . . . .	314
10.3.1 I momenti generalizzati G . . . . .	315
10.3.2 Analisi sperimentali . . . . .	320
10.4 Multifrattali universali . . . . .	326
10.4.1 Analisi sperimentale . . . . .	327
<b>11 La materia dell'Universo</b>	<b>335</b>
11.1 Introduzione . . . . .	335
11.2 I cataloghi astronomici . . . . .	337
11.3 Analisi tramite la funzione $\xi(\vec{r})$ . . . . .	343
11.4 La probabilità condizionata . . . . .	350
11.5 Validazione delle funzioni usate . . . . .	352
11.6 Analisi comparativa del catalogo CfA . . . . .	359
11.7 Analisi multifrattale . . . . .	361
11.8 Conseguenze dei risultati ottenuti . . . . .	364
<b>12 Multifrattali ed Economia</b>	<b>369</b>
12.1 Introduzione . . . . .	369
12.2 Multifrattali e listino di Borsa . . . . .	371
12.3 Il mercato finanziario: un sistema complesso . . . . .	376
12.4 Modelli stocastici . . . . .	378
12.4.1 Processi di Wiener e fenomeni di diffusione . . . . .	378
12.4.2 Processi di Wiener generalizzati e processi di Ito . . . . .	383
12.4.3 Il lemma di Ito e sue conseguenze . . . . .	387
12.5 Comportamento empirico dei prezzi . . . . .	389
12.6 Conclusione . . . . .	394

<b>13 L'incidente di Seveso</b>	<b>397</b>
13.1 Introduzione: 10 luglio 1976 . . . . .	397
13.2 Primi interventi e misurazioni . . . . .	400
13.3 Metodo empirico . . . . .	401
13.4 Curva di massima contaminazione . . . . .	403
13.5 Simulazione monofrattale . . . . .	405
13.5.1 Confronto tra modello e dati sperimentali . . . . .	409
13.6 Analisi con i multifrattali universali . . . . .	410
13.7 Un diversivo interessante . . . . .	412
<b>14 Il caso Chernobyl</b>	<b>417</b>
14.1 Introduzione . . . . .	417
14.2 L' incidente di Chernobyl . . . . .	417
14.3 Provenienza e selezione dei dati . . . . .	418
14.4 La simulazione frattale . . . . .	423
14.5 Concentrazione in aria: curve di arrivo . . . . .	424
14.5.1 Funzione interpolante . . . . .	424
14.5.2 Pseudomisure: recupero di valori di A, B, C . . . . .	427
14.6 Recupero di informazioni . . . . .	428
14.6.1 Stima del parametro B . . . . .	429
14.6.2 Stima del tempo di arrivo della nube $\sqrt{C}$ . . . . .	431
14.7 Controllo delle procedure . . . . .	432
14.8 Simulazione per il Nord Italia . . . . .	436
14.8.1 Dati utili e zona della simulazione . . . . .	436
14.8.2 Modello monofrattale . . . . .	437
14.8.3 Risultati finali per il Nord Italia . . . . .	439
14.8.4 Confronto con i dati del J.R.C. di Ispra . . . . .	441
14.9 Deposizione al suolo di $^{137}\text{Cs}$ in Europa . . . . .	442
14.9.1 Analisi geometrica . . . . .	443
14.9.2 Analisi statistica . . . . .	443
14.9.3 Modello multifrattale stocastico . . . . .	444
14.9.4 Normalizzazione della simulazione . . . . .	447
14.9.5 Confronto con i dati reali . . . . .	448

<i>CONTENTS</i>	573
14.9.6 Analisi di predittività del modello . . . . .	449
<b>A Richiami di statistica</b>	<b>459</b>
A.1 Introduzione . . . . .	459
A.1.1 Distribuzione binomiale di Bernoulli . . . . .	460
A.1.2 Distribuzione di Poisson . . . . .	461
A.1.3 Distribuzione di DeMoivre-Gauss . . . . .	463
A.1.4 Teorema del limite centrale . . . . .	463
A.1.5 La distribuzione multinomiale . . . . .	464
A.1.6 Alcune osservazioni . . . . .	466
A.2 Altre distribuzioni di probabilità . . . . .	467
A.2.1 Distribuzione rettangolare . . . . .	468
A.2.2 Distribuzione di Boltzmann . . . . .	469
A.2.3 Distribuzioni di Fermi-Dirac e Bose-Einstein . . . . .	472
A.2.4 Distribuzione esponenziale . . . . .	478
A.2.5 Distribuzione di Breit-Wigner o di Cauchy . . . . .	479
A.2.6 Altri estimatori di dispersione: il quantile . . . . .	481
A.2.7 Le variabili ed i voli di Lèvy . . . . .	482
A.3 Le distribuzioni log-normali . . . . .	484
A.4 Le funzioni caratteristiche . . . . .	486
A.5 Affidabilità delle stime . . . . .	490
A.6 Distribuzioni bivariate gaussiane . . . . .	492
A.7 Funzioni e integrali di correlazione . . . . .	497
A.8 Funzioni generatrici . . . . .	503
A.9 Conclusioni . . . . .	504
<b>B Le Variabili cinematiche</b>	<b>505</b>
B.1 Introduzione . . . . .	505
B.2 Le Variabili di Mandelstam . . . . .	506
B.3 Canale Diretto e Canale Incrociato . . . . .	507
B.4 Regioni fisiche dei canali s, t, u . . . . .	509
B.5 Mandelstam e la simmetria di crossing . . . . .	517
B.6 Nuove variabili cinematiche . . . . .	519

B.7	Reazioni Esclusive . . . . .	519
B.8	Spazio longitudinale delle fasi ( <i>LPS</i> ) . . . . .	521
B.8.1	Caso di 3 corpi . . . . .	522
B.8.2	Caso di 4 corpi . . . . .	524
B.9	Il Prisma Plot . . . . .	527
B.10	Reazioni inclusive . . . . .	530
B.11	Impulsi longitudinali e trasversali . . . . .	531
B.12	La $x$ di Feynman e $p_t$ della particella . . . . .	532
B.13	La rapidità $y$ e $p_t$ della particella . . . . .	533
B.14	Relazione tra $x$ e rapidità di Feynman . . . . .	540
B.15	Variabili non ortodosse . . . . .	541
B.16	Variabili di mass shell e di cono di luce . . . . .	542
B.17	Variabili addizionali di Mass shell . . . . .	546
B.18	Scelte di coppie di variabili . . . . .	548
B.19	Sfericità, Sferocità e thrust . . . . .	551
B.20	Conclusioni . . . . .	554

Volume I - n. 1 4/3/1986	CINQUANTA ANNI DI INTERAZIONI DEBOLI: DALLA TEORIA DI FERMI ALLA SCOPERTA DEI BOSONI PESANTI - Marcello Conversi	pag. 1
Volume I - n. 2 1/7/1986	EFFECTS OF DIOXINS ON NATURE AND SOCIETY - Opening talk, Sergio P. Ratti DIOXIN IN MISSOURI - Armon F. Yanders DEMONSTRATION OF INNOVATIVE REMEDIAL ACTION TECHNOLOGIES AT UNITED STATES MILITARY DIOXIN CONTAMINATED SITES - Terry L. Stoddard TIMES BEACH DIOXIN RESEARCH FACTTLY - Robert J. Schreiber E.P.A. RISK ASSESSMENT OF CHLORINATED DIBENZO-P-DIOXIN AND DIBENZOFURANS (CCDs/CDFs) - Donald G. Barnes, Patricia Roberts RECENT INTERNATIONAL COOPERATION IN EXCHANGE OF INFORMATION ON DIOXIN - Donald G. Barnes CHLORACNE AND THE AGENT ORAGE PROBLEM IN THE U.S.A. - B.Fischmann	pag. 3 pag. 11 pag. 23 pag. 41 pag. 51 pag. 63 pag. 69
Volume II - n. 1 15/9/1987	CONVEGNO SU "LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITA- ZIONALE" - MOTIVAZIONI DEL CONVEGNO - Sergio P. Ratti LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITAZIONALE: UN PROBLEMA APERTO - Sergio P. Ratti, Roberto Silvotti SVILUPPI RECENTI SULLA CONOSCENZA DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE - Anna Grassi, Giuliano Strini LIMITI SPERIMENTALI SULLA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' - Roberto Cassinis CONSEGUENZE SPERIMENTALI DELLA IPOTESI DI ESISTENZA DI UNA QUINTA INTERAZIONE - Fabrizio Massa VERIFICA DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA E FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI - Bruno Bertotti	pag. 3 pag. 5 pag. 19 pag. 31 pag. 43 pag. 81
Volume II - n. 2 10/12/1987	TRANSIZIONE LIQUIDO SOLIDO - Mario Tosi EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - Emilio Zavattini	pag. 3 pag. 27
Volume III - n. 1 6/6/1988	METODI DI DILATAZIONE ANALITICA E RISONANZE IN SISTEMI QUANTISTICI NON RELATIVISTICI - Fausto Borgonovi CAMPO ELETTRICO ED EMISSIONI DA CARICHE IN UN MEZZO - Michele Spada SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE DI SUPERRETTICOLI SEMICONDUCTTORI - Luciano Colombo SOLITONI IN FISICA NUCLEARE - Marco Radici ASPETTI NON LOCALI DEL COMPORTAMENTO QUANTISTICO - Oreste Nicrosini	pag. 1 pag. 13 pag. 29 pag. 51 pag. 83
Volume III - n. 2 4/7/1988	CARATTERIZZAZIONE OTTICA IN SITU DI FILMS SOTTILI - Alessandra Piaggi TRANSIZIONI DI WETTING - Tommaso Bellini FORZE A TRE CORPI NEI GAS RARI - Silvia Celi	pag. 1 pag. 23 pag. 49
Volume III - n. 3 15/12/1988	FLAVOUR PHYSICS - Luciano Maiani THE STANDARD ELECTROWEAK MODEL: PRESENT EXPERIMENTAL STATUS - Pierre Darrulat WHY BE EVEN-HANDED? - Martin M. Block	pag. 1 pag. 27 pag. 47
Volume IV - n. 1 6/4/1989	LA FISICA DEI COLLIDER - Paolo Bagnaia, Fernanda Pastore	pag. 1
Volume IV - n. 2 15/6/1989	SOLAR WIND AND PHYSICS OF THE HELIOSPHERE - Bruno Coppi THE IGNITOR PROJECT - Bruno Coppi, Francesco Pegoraro	pag. 2 pag. 32
Volume IV - n. 3 15/9/1989	SPETTROSCOPIA ELLISSOMETRICA NEI SOLIDI - Alessandra Piaggi UNA INTRODUZIONE AL SUPERCONDUCTING SUPERCOLLIDER - R. Diaferia FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI - Fausto Borgonovi	pag. 3 pag. 23 pag. 49
Volume V - n. 1 15/3/1990	MULTI-BODIED PHASE SPACE - A NEW APPROACH - Martin M. Bloch SCATTERING BRILLOUIN RISONANTE - Cristina Bosio METODO DI RINORMALIZZAZIONE PER LO STUDIO DELLA STRUTTURA ELET- TRONICA DI SUPPERRETTICOLI - Saverio Moroni MECCANISMI DI CONDUCIBILITA' IONICA MEDIATI DA DIFETTI ESTRINSECI - IL CASO DEL QUARZO - Alberto Paleari STATISTICHE QUANTISTICHE ED INDISTINGUIBILITA' - Gianluca Introzzi	pag. 1 pag. 20 pag. 40 pag. 57 pag. 69
Volume V - n. 2 15/6/1990	FISICA DELLE ALTE ENERGIE ALLE KOAN FACTORIES - Renato Diaferia NEUTRONI FREDDI E NEUTRONI ULTRAFREDDI - Gianluca Raselli TRANSIZIONI ORDINE-DISORDINE NELLE DISPERSIONI COLLOIDALI - Paolo Di Trapani	pag. 1 pag. 15 pag. 51

Volume VI - n. 1 p. I - 11/10/1991	LE UNITA' DI MISURA DELLA RADIOPROTEZIONE - Sergio P. Ratti L'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Giuseppe Belli NORMATIVA E PRINCIPI DI RADIOPROTEZIONE - Argeo Benco APPENDICE 1 - Pubblicazioni I.C.R.P. - Argeo Benco APPENDICE 2a) - Il regime giuridico dell'impiego pacifico dell'energia nucleare APPENDICE 2b) - Elenco di provvedimenti di interesse per le attività di impiego pacifico dell'energia nucleare e delle radiazioni ionizzanti APPENDICE 2c) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative all'utilizzazione delle sostanze radioattive e delle macchine radiogene APPENDICE 2d) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative al trasporto delle sostanze radioattive RADIOATTIVITA' AMBIENTALE E RADIOECOLOGICA - Arrigo Cigna EFFETTI BIOLOGICI DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI - Marco Caprotti	pag. 1 pag. 7 pag. 17 pag. 56 pag. 59 pag. 64 pag. 78 pag. 85 pag. 87 pag. 107
Volume VI - n. 1 p. II - 11/10/1991	MODELLO PREVISIONALE DELLA CONCENTRAZIONE DI $^{90}\text{Sr}$ , $^{134}\text{Cs}$ E $^{137}\text{Cs}$ NELLA CATENA ALIMENTARE - Arrigo Cigna L'AMBIENTE E LA RADIOPROTEZIONE IN RELAZIONE AD INCIDENTI NUCLEARI - Arrigo Cigna INCIDENTE NUCLEARE "CHERNOBYL" E SUE RIPERCUSSIONI SULLA CATENA ALIMENTARE - R. Cazzaniga, G. Dominici, A. Malvicini, E. Sangalli PRIMA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO RADIOLOGICO AMBIENTALE NELLA ZONA DI ISPRA IN RELAZIONE ALL'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Argeo Benco APPROCCIO FRATTALE ALLA DESCRIZIONE DELLA RADIOATTIVITA' IN ARIA IN ITALIA DOPO CHERNOBYL - Gianfausto Salvadori	pag. 117 pag. 131 pag. 157 pag. 177 pag. 201
Volume VII - n. 1 15/3/1992	ELECTRON ENERGY LOSS SPECTROSCOPY - Marco Amiotti LIVELLI ELETTRONICI PROFONDI IN SEMICONDUTTORI E LORO CARATTERIZZAZIONE - Adele Sassella LA RICERCA DEL BOSONE DI HIGGS AI FUTURI ACCELERATORI - G. Montagna SIMMETRIA CHIRALE E TEOREMA DI GOLDBERGER-TREIMAN - Carlo Gobbi	pag. 1 pag. 35 pag. 57 pag. 81
Volume VII - n. 2 15/10/1992	CRESCITA, CARATTERIZZAZIONE ED APPLICAZIONI DEI LANGMUIR-BLODGETT FILMS - Marco Amiotti LA CATODOLUMINESCENZA - Vittorio Bellani CORRELAZIONI ELETTRONICHE IN OSSIDI DI METALLI DI TRANSIZIONE - Luigi Sangaletti	pag. 1 pag. 35 pag. 63
Volume VIII - n. 1 15/1/1993	TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA - Alberto Vancheri ROTTURA ESPlicita E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi APPLICAZIONI DELLA $\mu^+$ SR NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto	pag. 1 pag. 25 pag. 39 pag. 75
Volume VIII - n. 2 15/4/1993	L'UNITA' DELLA SCIENZA. IL CASO DELLA FISICA, OGGI - G. Salvini APPLICAZIONI DELLA $\mu^+$ SR NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta MODELLO A TETRAEDRI PER LA FUNZIONE DIELETTICA DI SOLIDI AMORFI - A. Sassella INTRODUZIONE ALLE RETI NEURALI - C Macchiavello	pag. 1 pag. 37 pag. 73 pag. 93
Volume VIII - n. 3 15/6/93	RPC: STATUS AND PERSPECTIVES - R. Santonico PERFORMANCE OF E771 RPC MUON DETECTOR - E. Gorini (E771 Coll.) THE MUON TRIGGER HODOSCOPE OF THE BEAUTY HADRO-PRODUCTION EXPERIMENT WA92; PERFORMANCES AND PRELIMINARY RESULTS ON BEUTY MUONIC DECAYS - G. Martellotti, D. Orestano (Beatrice Coll.) THE RPC TRIGGER SYSTEM FOR THE L3 FORWARD BACKWARD MUON DETECTOR - S. Patricelli RESULTS FROM THE RD5 EXPERIMENT AT CERN - A. Di Ciaccio (RD5 Coll.) LEVEL 1 MUON TRIGGER IN THE ATLAS EXPERIMENT AT THE LARGE HADRON COLLIDER - A. Nisati (ATLAS Coll.) RPC BASED MUON TRIGGER FOR THE CMS DETECTOR AT LHC - G. Wrochna (CMS Coll.) AN RPC MUON SYSTEM FOR SDC AT SSCL - G. Introzzi (Pavia SDC Group) A MUON TRIGGER FOR LHB - R. Santacesaria MINI: A HORIZONTAL MUON TELESCOPE IMPLEMENTED WITH RESISTIVE PLATE CHAMBERS - G. Iaselli T&T: A NEW DESIGN FOR A FRONT-END TIME DIGITIZER ELECTRONICS M. Ambrosio, G.C. Barbarino, A. Lauro, G. Osteria, G. Agnetta, O. Catalano, L. Scarsi, A. Lanza, G. Liguori, P. Torre ATMOSPHERIC AND ACCELERATOR NEUTRINO PHYSICS WITH RPCS IN THE SOUDAN 2 CAVERN - D.J.A. Cockerill	pag. 1 pag. 13 pag. 29 pag. 37 pag. 45 pag. 61 pag. 73 pag. 83 pag. 103 pag. 115 pag. 123 pag. 133



	STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS IN THE RD5 EXPERIMENT - L. Pontecorvo (RD5 Coll.)	pag. 145
	OPERATION OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS WITH PURE CF <sub>3</sub> BR - R. Cardarelli	pag. 159
	WLDC: A DRIFT CHAMBER WITH A PAD RPC FOR MUON DETECTION AT LHC H. Faissner, Th. Moers, R. Priem, B. Razen, D. Rein, H. Reithler, D. Samm, R. Schleichert, H. Schwarthoff, H. Tuchscherer, H. Wagner	pag. 167
	GLASS ELECTRODE SPARK COUNTER - G. Bencivenni, G. Felici, E. Iacuessa, C. Gustavino, M. D'Incecco	pag. 181
	RPC READOUT FOR PARTICLE ASTROPHYSICS - M. Bonori, U. Contino, F. Massa	pag. 193
	RESULTS OF TESTS OF PROTOTYPE RESISTIVE PLATE CHAMBERS - I. Crotty, J. Lamas Valverde, G. Laurenti, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 199
	GLASS ELECTRODES RPC: PERFORMANCE AND WORKING MODEL - M. Bonori, U. Contino, F. Massa	pag. 207
	FAST PARALLEL RPC READOUT SYSTEM - A. Lanza, G. Liguori, P. Torre, M. Ambrosio, G.C. Barbarino, M. Iacovacci, A. Lauro, G. Osteria, G. Agnetti, O. Catalano, L. Scarsi	pag. 219
	DATA ACQUISITION SYSTEMS DEVELOPED AT CAEN - F. Catarsi, C. Landi, G. Franchi, M. Lippi	pag. 225
Volume IX - n. 1 15/4/1994	RETICOLI DISORDINATI: IL MODELLO DI ANDERSON - R. Farchioni	pag. 1
	BREVE INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUANTISTICA DELLA STIMA - M. Paris	pag. 23
	SUSY - M. Cacciari	pag. 36
	MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS NEL MODELLO STANDARD - F. Piccinini	pag. 79
	DIELETTROFORESI: LIEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO - L. Laboranti	pag. 97
Volume IX - n. 2 15/11/94	PROPRIETÀ FISICHE DI CLUSTER METALLICI - V. Bellani	pag. 1
	APPLICAZIONI DI RETI NEURALI ALLA FISICA DELLE ALTE ENERGIE - P. Vitulo	pag. 18
	CRITTOGRAFIA QUANTISTICA - C. Macchiavello	pag. 47
	IL "PARADOSSO" DEI GEMELLI - M. Cacciari	pag. 64
	TRANSIZIONI DI FASE NEL PRIMO UNIVERSO - S. Rolli	pag. 77
	SULLA STABILITÀ DINAMICA DELLA BICICLETTA - M. Paris	pag. 102
Volume X - n. 1 15/3/95	FISICA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI CON NEUTRONI FREDDI A. Guglielmi	pag. 1
	EFFETTO DELLA DISPERSIONE SPAZIALE SULL'ASSORBIMENTO ECCITONICO DEI CRISTALLI - G. Panzarini	pag. 79
	IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME IN MOVIMENTO IN UN MEZZO ISOTROPO - U. Bellotti	pag. 105
Volume X - n. 2 15/6/95	SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE A RISOLUZIONE TEMPORALE - P. Calvi	pag. 1
	IL CONTROLLO DEI SISTEMI CAOTICI - M. Maris	pag. 25
	ASPETTI SPERIMENTALI DELLA FISICA DEI MESONI B A LEP - L. Viola	pag. 59
	AN INTRODUCTION TO THE PERTURBATIVE QCD POMERON AND TO JET PHYSICS AT LARGE RAPIDITIES - V. Del Duca	pag. 91
Volume X - n. 3 15/12/95	DIFFUSIONE DI LUCE DA SUPERFICI RUGOSE - M. Patrini	pag. 1
	PRINCIPI E APPLICAZIONI DELLE SPETTROSCOPIE A DIFFRAZIONE DI ELETTRONI - L. Rossi	pag. 25
	IONI DI TERRE RARE IN SEMICONDUKTORI - E. Pavarini	pag. 49
	PERDITA DI ENERGIA PER IONIZZAZIONE - P. Montagna	pag. 85
Volume XI - n. 1 15/6/96	TOPICS IN RESISTIVE PLATE CHAMBERS - R. Santonico	pag. 1
	THE AVALANCHE TO STREAMER TRANSITION IN RPC'S - R. Cardarelli, R. Santonico, V. Makeev	pag. 11
	A MODEL OF AVALANCHE TO STREAMER TRANSITION IN PPC/RPC DETECTORS - P. Fonte	pag. 25
	NEW DEVELOPMENTS OF RPC: SECONDARY ELECTRON EMISSION AND MICROSTRIP READOUT - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, P. Fonte, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, V. Peskov, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 45
	THE RPC SYSTEM FOR THE CMS EXPERIMENT AT LHC - G. Wrochna	pag. 63
	RPC TRIGGER DESIGN FOR THE FUTURE EXPERIMENT CMS - G. De Robertis, M. Gorski, M. Konecki, J. Krolikowski, I.M. Kudla, M. Lewandowski, F. Loddo, K. Pozniak, A. Ranieri, G. Wrochna	pag. 79
	THE LEVEL-1 MUON TRIGGER ALGORITHM OF THE ATLAS EXPERIMENT - A. Nisati	pag. 91
	RESISTIVE PLATE COUNTERS FOR THE BELLE DETECTOR AT KEKB - N. Morgan	pag. 101
	PRELIMINARY DESIGN OF THE BABAR DETECTOR FOR MUONS AND NEUTRAL HADRONS AT PEP II - N. Cavallo	pag. 115
	THE RPC FORWARD-BACKWARD TRIGGER SYSTEM OF THE L3 EXPERIMENT - P. Paolucci	pag. 129
	PERFORMANCES OF THE RPC TRIGGER SYSTEM IN THE L3	

	EXPERIMENT - R. De Asmundis	pag. 139
	USE OF RPC IN THE COVER PLASTEX EXPERIMENT - C. Agnetta, M. Ambrosio, C. Aramo, G.C. Barbarino, B. Biondo, O. Catalano, L. Colesanti, A. Erlykin, A. Lauro, A. Mangano	pag. 157
	A TEST OF THE ATLAS FIRST LEVEL MUON TRIGGER LOGIC - S. Veneziano	pag. 177
	CAEN ELECTRONICS FOR RESISTIVE PLATE CHAMBERS - A. Bigongiari, G. Franchi, G. Grieco, C. Landi, M. Lippi, F. Vivaldi	pag. 187
	TESTS OF RPC PROTOTYPES IN RD5 DURING 1994 RUNS - H. Czyrkowski, W. Dominik, J. Krolkowski, M. Lewandowski, Z. Mazur, M. Gorski, M. Szeptycka	pag. 197
	A TEST ON RESISTIVE PLATE CHAMBERS WITH NON OZONE DEPLETING FREON - M. Abbrescia, A. Colaleo, G. Iaselli, M. Maggi, B. Marangelli, S. Natali, S. Nuzzo, A. Ranieri, F. Romano, G. Gianini, G. Liguori, S.P. Ratti, P. Vitulo, M. Gorski	pag. 217
	STUDY OF ELECTRODE SURFACE TREATMENT EFFECTS ON BAKELITE RPC'S PERFORMANCES - M. Abbrescia, A. Colaleo, G. Iaselli, M. Maggi, B. Marangelli, S. Natali, S. Nuzzo, A. Ranieri, F. Romano, V. Arena, G. Boca, G. Bonomi, G. Gianini, G. Liguori, M. Marchesotti, M. Merlo, C. Riccardi, L. Viola, P. Vitulo	pag. 229
	RESISTIVE PLATE CHAMBER PERFORMANCES AT GREAT ALTITUDES - M. Abbrescia, E. Bisceglie, G. Iaselli, S. Natali, F. Romano	pag. 245
	EFFECTS INDUCED BY DIFFERENT KINDS OF FREON ON THE RPC CHARGE ACCUMULATION - V. Arena, G. Boca, G. Bonomi, G. Gianini, G. Liguori, C. Riccardi, L. Viola, P. Vitulo	pag. 255
	TEST OF LOW GAS GAIN RPCs WITH OZONE AND NON OZONE DEPLETING GAS MIXTURES - A. Di Ciaccio	pag. 263
	POSITION MEASUREMENT IN RPCs BY TOF - G.H. Grayer	pag. 273
	POSSIBLE USE OF RPCs IN THE MINOS EXPERIMENT - G.H. Grayer	pag. 279
	RESISTIVITY MEASUREMENTS ON RPC MATERIALS - G.H. Grayer	pag. 285
	WHAT HAVE WE LEARNED FROM A COMPARISON BETWEEN THE WIDE GAP AND NARROW GAP RESISTIVE PLATE CHAMBER - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, S. Neupane, V. Peskov, S. Singh, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 295
	LATEST RESULTS ON THE PERFORMANCE OF THE WIDE GAP RPC - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, S. Neupane, V. Peskov, S. Singh, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 317
	DEVELOPMENT OF RESISTIVE PLATE COUNTERS FOR THE PIERRE AUGER COSMIC RAY OBSERVATORY - P.O. Mazur	pag. 331
	THIN GAP CHAMBER: PERFORMANCE AS A TIME AND POSITION MEASURING DEVICE - Y. Ari, E. Barberio, T. Emura, J. Goldberg, K. Homma, M. Ikeno, M. Imori, K. Ishii, H. Ishiwaki, T. Kawamoto, T. Kobayashi, D. Lelloch, L. Levinson, N. Lupu, G. Mikenberg, M. Miyake, K. Nagai, T. Nagano, I. Nakamura, M. Nomachi, M. Nozaki, S. Odaka, T.K. Ohsaka, O. Sasaki, H. Shirasu, H. Takeda, T. Takeshida, S. Tanaka, C. Yokoyama	pag. 349
	RECENT STUDIES OF PARALLEL PLATE CHAMBERS FOR LHC EXPERIMENTS - A. Arefiev, G.L. Bencze, A. Bizzeti, E. Choumilov, C. Civinini, G. Dajkó, R. D'Alessandro, M.I. Josa, A. Malinin, M. Meschini, J. Molnár, V. Pojidaev, J.M. Salicio, F. Siklér, G. Vesztergombi	pag. 359
	ABS PLASTIC RPCs - E. Ables, R. Bionta, H. Olson, L. Ott, E. Parker, D. Wright, C. Wuest	pag. 373
	PERFORMANCES AND SIMULATION OF GLASS SPARK CHAMBERS - M. De Deo, M. D'Incecco, C. Gustavino, G. Bencivenni, G. Felici	pag. 387
	R&D OF GLASS RPCs FOR THE BELLE DETECTOR - Y. Teramoto, A. Yamaguchi and Y. Hoshi	pag. 401
	SOME RESULTS OF RESISTIVE PLATE COUNTER AND THE PROPOSAL TO TAU-CHARM FACTORY OF BEIJING - J.G. Bian, Y.B. Chen, H.G. Han, K.L. He, Y.Y. Jiang, X.L. Wang, Y.G. Xie, Y. Xu, C.S. Yang, G.A. Yang, Y. Yang, Z.T. Yu, J.Q. Zhang, Q.J. Zhang	pag. 419
	THE FOCUS EXPERIMENT RPC MUON IDENTIFICATION ARRAY - P.D. Sheldon	pag. 437
Volume XI - n. 2 15/7/96	ANTIGRAVITÀ E VIOLAZIONE DI CP - A. Filippi	pag. 1
	MICROCAVITÀ A SEMICONDUTTORE - R. Seno	pag. 19
	BANDE FOTONICHE E LA LOCALIZZAZIONE DELLA LUCE - R. Farchioni	pag. 59
	CORRELAZIONE DIPOLARE IN CATENE POLIMERICHE DI TIPO VINILICO - P. Montagna	pag. 83
	IL LASER AD ELETTRONI LIBERI E LE SUE APPLICAZIONI NELLA FISICA DELLO STATO SOLIDO - S. Bocelli	pag. 99
Volume XII - n. 1 15/6/97	IL CONTENUTO DI STRANEZZA DEL NUCLEONE - A. Filippi	pag. 1
	SEZIONE D'URTO DI BREMSSTRAHLUNG - B. Pasquini	pag. 33
	TECNICHE DI SVILUPPO IN 1/N PER SISTEMI ELETTRONICI FORTEMENTE CORRELATI - E. Pavarini	pag. 55
	GREGOR WENTZEL E I CAMMINI DI FEYNMAN - E. Lunati	pag. 1
	LA MICROSCOPIA A SCANSIONE A EFFETTO TUNNEL - P. Tognini	pag. 105

Volume XIII - n. 1 15/4/98	I BUCHI NERI: OSSERVAZIONE NEI SISTEMI STELLARI BINARI - G. Bonomi SPETTROMETRIA DI MASSA A IONI SECONDARI - R. Rolli FUNZIONI DI STRUTTURA IN ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - E. Poli CALORIMETRIA CON FIBRE AL QUARZO - N. Moggi LA FRIZIONE DINAMICA IN SCENARI DI INTERESSE ASTROFISICO - A. Pallavicini	pag. 1 pag. 17 pag. 45 pag. 71 pag. 93
Volume XIII - n. 2 15/5/98	IV International Workshop on : RESISTIVE PLATE CHAMBERS AND RELATED DETECTORS - Sergio P. Ratti, Riccardo De Asmundis	pag. 1 pag. 393
Volume XIV - n. 1 15/5/99	CORRELAZIONI NELLA PRODUZIONE MULTIPLA DI PARTICELLE A $\sqrt{s} = 630$ E 1800 GeV - Niccolò Moggi FUNZIONI DI STRUTTURA IN QCD PERTURBATIVA - Fabrizio Gangemi I BUCHI NERI: OSSERVAZIONE NEI SISTEMI STELLARI BINARI - G. Bonomi QUANTIZZAZIONE BRS DELLE TEORIE DI GAUGE - Andrea Pallavicini CP VIOLATION IN THE $B_0$ SECTOR - Amedeo Perazzo	pag. 1 pag. 23 pag. 51 pag. 85 pag. 101
Volume XV - n. 1 15/10/00	PROVE SPERIMENTALI DELLA QUANTIZZAZIONE DELLA CARICA ELETTRICA - D. Iannuzzi SURVIVAL PROBABILITY OF LARGE RAPIDITY GAPS IN $\bar{p}p$ COLLISION - M.M. Block, F. Halzen SPIN SUSCEPTIBILITY AND DIAMAGNETIC SUSCEPTIBILITY AT THE SUPERCONDUCTING TRANSITION. EFFECTS OF MAGNETIC FIELD AND DOPING-DEPENDENCE IN YBCO COMPOUNDS - A. Rigamonti, P. Tedesco RECENTI SVILUPPI SULLA REGOLA DI SOMMA DI COULOMB NEI NUCLEI - A. Meucci	pag. 1 pag. 35 pag. 49 pag. 87
Volume XVI - n. 1 15/03/01	MAGNETIC CORRELATIONS AND SPIN DYNAMICS IN PURE AND DOPED HALDANE CHAINS: $^{89}\text{Y}$ NMR IN $\text{Y}_{2-y}\text{Ca}_y\text{BaNi}_{1-x}\text{Mg}_x\text{O}_5$ - F. Tedoldi A FACILITY FOR THE STUDY OF PARTICLE-INDUCED INFRARED EMISSION IN NOBLE GASES - D. Iannuzzi	pag. 1 pag. 93
Volume XVI - n. 2 25/07/01	PARTICLE INDUCED INFRARED EMISSION IN GASES, LIQUIDS, AND CRYSTALS - D. Iannuzzi	pag. 1
Volume XVII - n. 1 15/12/02	NONADIABATIC SUPERCONDUCTIVITY: FROM THEORY TO MATERIALS - P. Paci	pag. 1
Volume XVIII - n. 1 15/03/03	FLUCTUATING DIAMAGNETISM AND $^{89}\text{Y}$ NMR QUANTITIES FROM THE UNDERDOPED REGIME IN YBCO SUPERCONDUCTORS - P. Tedesco RELATIVISTIC MEAN FIELD THEORY OF NUCLEAR STRUCTURE - A. Meucci	pag. 1 pag. 131
Volume XVIII - n. 2 15/03/03	INTRODUZIONE PROPEDEUTICA AI FRATTALI IN FISICA (ed altro) - S.P. Ratti	pag. 1
Volume XIX - n. 1 15/12/04	A FEASIBILITY STUDY FOR A MEASUREMENT OF THE DYNAMICAL CASIMIR EFFECT - C. Braggio	pag. 1