

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

— o —

SCIENTIFICA ACTA

QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME XII

ANNO XII

NUMERO 1

15 GIUGNO 1997



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

— o —

CENTRO STAMPA - DIPARTIMENTI FISICI
via Bassi, 6 27100 Pavia

INDICE

- 1 - IL CONTENUTO DI STRANEZZA DEL NUCLEONE - Alessandra Filippi pag. 1
- 2 - SEZIONE D'URTO DI BREMSSTRAHLUNG - Barbara Pasquini pag. 33
- 3 - TECNICHE DI SVILUPPO IN $1/N$ PER SISTEMI
ELETTRONICI FORTEMENTE CORRELATI - Eva Pavarini pag. 55
- 4 - GREGOR WENTZEL E I CAMMINI DI FEYNMAN - Ernesto Lunati pag. 91
- 5 - LA MICROSCOPIA A SCANSIONE A EFFETTO
TUNNEL - Paolo Tognini pag. 105

Alessandra Filippi

Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
Università di Pavia
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Torino

IL CONTENUTO DI STRANEZZA DEL NUCLEONE

Seminario tenuto il 6/12/1995

1. Introduzione

Secondo il Modello a Quark Naive (NQM) [1] la funzione d'onda del nucleone dovrebbe essere costituita soltanto dai quark di valenza u e d ; questo modello fornisce una rappresentazione corretta degli adroni a grandi distanze (piccoli impulsi trasferiti). Tuttavia a distanze piccole (grandi Q^2) è possibile rivelare la presenza di più costituenti, rappresentati da coppie $q\bar{q}$ del mare e da gluoni: la loro esistenza è giustificata nell'ambito della QCD perturbativa.

La presenza di questi costituenti può peraltro essere messa in luce già a piccoli Q^2 , cioè nel regime non perturbativo, da diverse osservazioni sperimentali. Questo effetto non sorprende più di tanto dal punto di vista teorico: da un lato, infatti, tecniche di QCD non perturbativa indicano la presenza nel vuoto di un condensato $s\bar{s}$ [2], dall'altro esistono modelli che consentono di spiegare il problema (come i modelli a solitoni [3]).

Le indicazioni sperimentali ci sono fornite sia da esperimenti ad alte che a basse energie: nel primo caso gli effetti più eclatanti sono quelli osservati in esperimenti di scattering profondamente anelastico, ed hanno condotto alla cosiddetta *spin crisis* del protone; nel secondo caso esistono due osservazioni fondamentali a favore della presenza di stranezza nel protone: la discrepanza del valore del σ -term per lo scattering anelastico π -Nucleone ottenuto dall'ampiezza di scattering πN e da estrapolazioni sullo splitting di massa barionico, e la forte violazione della regola OZI riscontrata nell'annichilazione $N\bar{N}$ in stati finali contententi mesoni ϕ . Esistono inoltre altri effetti secondari che permettono di pervenire alle stesse conclusioni e a risultati significativamente compatibili con i precedenti.

Questo lavoro è organizzato nel seguente modo: una prima sezione è dedicata alle osservazioni sperimentali e alle problematiche connesse a fenomeni ad alte energie, ovvero a grandi impulsi trasferiti; nel cap. 2.1 si farà riferimento all'andamento delle funzioni di distribuzione dei quark nel nucleone, con particolare attenzione a quelle per i quark strani; nel capitolo 2.2 verrà data una descrizione delle misure utilizzate per giungere al risultato che ha comportato la cosiddetta *spin crisis* del protone, e nel capitolo 2.3 si darà qualche accenno agli approcci teorici adottati per ren-

derne ragione. In questi paragrafi si farà continuo riferimento alle notazioni introdotte nell'ambito del modello a partoni, di cui viene data una trattazione schematica ed essenziale (ai fini di questo discorso) nell'appendice.

Una seconda sezione è invece dedicata allo studio di fenomeni *soft* (a basso impulso trasferito): nel par. 3.1 e in 3.2 si darà una descrizione delle problematiche connesse con il σ -term: mettendo in luce una possibile correlazione dei risultati ottenuti con quanto trovato in esperimenti ad alte energie; nel par. 3.3 si descriveranno brevemente le osservazioni sperimentali che hanno evidenziato la violazione della regola di Zweig nell'annichilazione antinucleone-nucleone. Un ultimo paragrafo è dedicato alla discussione di ulteriori effetti, sia ad alte che a basse energie, che forniscono risultati compatibili con quelli precedentemente indicati.

2. Misure ad alte energie.

2.1 Andamento delle funzioni di distribuzione dei quark nel nucleone.

Le informazioni principali sull'andamento delle funzioni di distribuzione dei quark entro il nucleone sono forniti da esperimenti di scattering profondamente anelastico *non* polarizzato leptone-nucleone. Lo scattering è rappresentato schematicamente dal diagramma di Feynman (fig. 1, ved. Appendice):

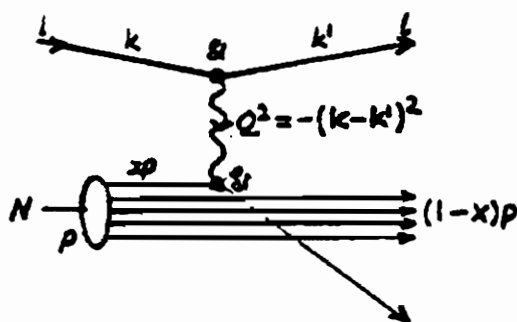


Fig. 1 Diagramma di Feynman per lo scattering profondamente anelastico di un leptone su un nucleone.

In generale, gli esperimenti di scattering profondamente anelastico misurano sezioni d'urto differenziali (funzione dell'impulso trasferito Q^2 e della variabile x di Bjorken, che esprime la frazione di impulso del protone incidente trasferita al quark colpito); per diffusione senza polarizzazione la tipica espressione per la sezione d'urto (che verrà ripresa e spiegata nell'Appendice) è:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E^2}{Q^2} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(\nu, Q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(\nu, Q^2) \right\} \quad (2.1)$$

Solitamente si esprimono i risultati delle misure in termini di andamento delle funzioni di distribuzione della variabile x di Bjorken, come rappresentato in fig. 2 [4] da cui si deduce che la distribuzione degli antiquark è concentrata a piccoli x , quella dei quark di valenza ha un picco attorno a $x \sim 0.2$ mentre la distribuzione dei quark del mare tende ad essere spostata verso x più alti.

Gli integrali di queste distribuzioni indicano le *frazioni medie* di impulso trasportate da quark e antiquark. Per impulso trasferito $Q^2 = 4 \text{ GeV}^2$ valgono i seguenti importanti risultati:

$$\int x \sum (q_i + \bar{q}_i) dx = 0.55 \quad (2.2)$$

che ci dice che quasi metà dell'impulso del nucleone è trasportato dai gluoni, costituenti invisibili al bosone virtuale scambiato (γ^* , W , Z);

$$\frac{\int x \sum \bar{q}_i dx}{\int x \sum_i (q_i + \bar{q}_i) dx} = 0.15 \quad (2.3)$$

che, combinato al risultato precedente, ci dice da un lato che gli antiquark portano l'8% dell'impulso del nucleone incidente, dall'altro che il mare, nel suo complesso, ne porta il 16% [5].

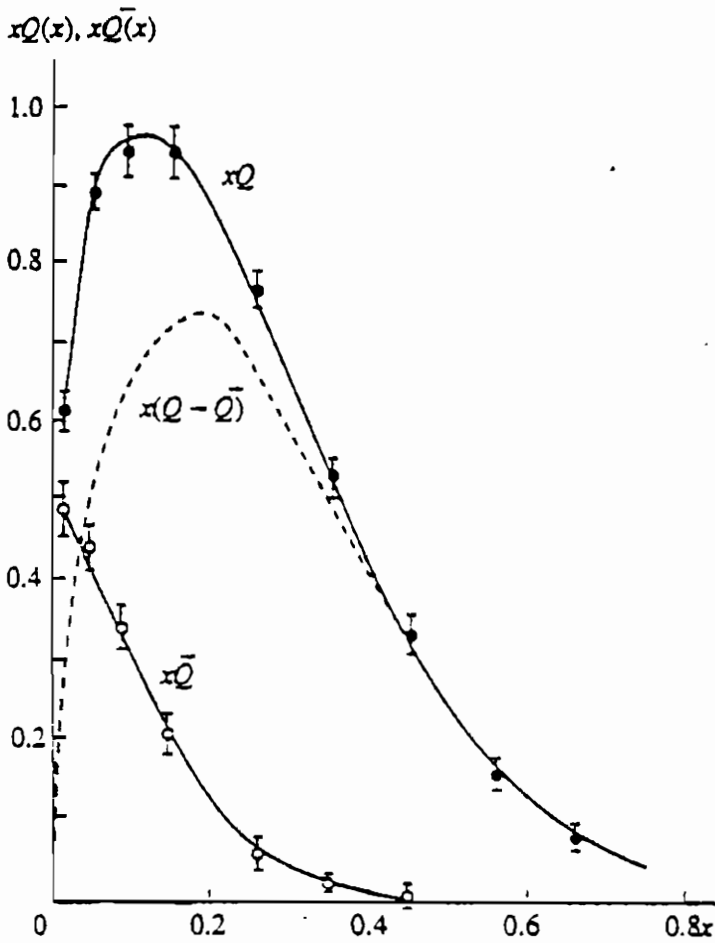


Fig. 2 Distribuzione del momento dei quark (Q) e antiquark (\bar{Q}) nel nucleone, al valore $q^2 = 10 \text{ GeV}$, ottenuti da risultati di diffusione di neutrino e antineutrino in esperimenti al CERN e a Fermilab [4].

Assumendo che le funzioni di distribuzione per i quark \bar{d} e \bar{u} nel mare siano uguali, e ad esse siano pure uguali le distribuzioni di s e \bar{s} (che nel mare sono ovviamente sopresse di un fattore $1/2$),

è possibile riassumere tutti i risultati ottenuti da esperimenti ad alte energie di vario tipo con un fit globale, rappresentato in fig. 3.

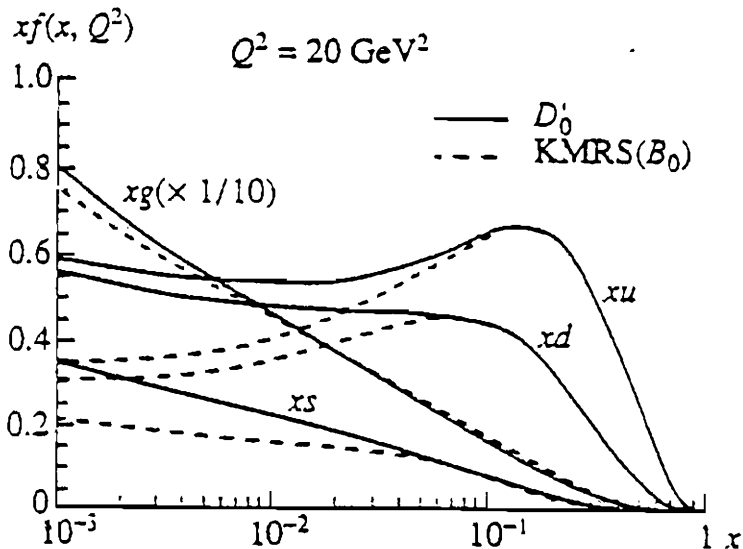


Fig. 3 Funzioni di distribuzione fittate per quark e gluoni, moltiplicate per x [5].

Nel fit globale sono contenuti risultati di esperimenti di scattering profondamente anelastico con fasci di μ (EMC, SMC, BCDMS), con fasci di neutrini (CCFR, CDHSW), esperimenti di produzione di coppie Drell-Yan (E605), fotoproduzione ad alto impulso trasverso (WA70) ed esperimenti di scattering profondamente anelastico a x molto bassi quali quelli attualmente in corso ad Hera. Ciò che si vede è che in effetti la forma della distribuzione di x_s non è molto differente dalla distribuzione generica di $x\bar{q}$ riportata in fig. 2.

L'esperimento CCFR (E770 + E544), che ha operato al Fermilab, è uno di quelli che ha fornito informazioni più dettagliate sull'andamento delle funzioni di distribuzione del quark strano [6].

L'esperimento si prefiggeva lo studio ad alta statistica di eventi a due muoni indotti da scattering profondamente anelastico $\nu(\bar{\nu})$ -nucleone: nelle reazioni elementari

$$\begin{aligned}
 \nu s &\rightarrow \mu^- c \rightarrow \mu^- \mu^+ s \nu_\mu \\
 \bar{\nu} \bar{s} &\rightarrow \mu^+ \bar{c} \rightarrow \mu^- \mu^+ \bar{s} \bar{\nu}_\mu \\
 \nu d &\rightarrow \mu^- c \rightarrow \mu^- \mu^+ s \nu_\mu \\
 \bar{\nu} \bar{d} &\rightarrow \mu^+ \bar{c} \rightarrow \mu^- \mu^+ \bar{s} \bar{\nu}_\mu
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

il primo μ proviene dal vertice leptonico carico, il secondo dal decadimento semileptonico del charm.

Sono stati condotti due studi successivi: un primo studio, basato su una statistica di 1522 eventi ν_μ e 275 $\bar{\nu}_\mu$, ha condotto ai risultati schematizzati in fig. 4. Ciò che si ricava essenzialmente è che entro l'errore le distribuzioni di $x s(x)$ e $x \bar{s}(x)$ sono uguali a quelle di $x \bar{q}(x)$, e la dipendenza da Q^2 è analoga sia per s che per quark del mare leggeri.

Uno studio successivo, realizzato su una statistica oltre tre volte superiore (5044 eventi ν_μ , 1062 $\bar{\nu}_\mu$), ha evidenziato in realtà che le distribuzioni $x s$ e $x \bar{q}$ non sono del tutto identiche: adottando la parametrizzazione di Buras-Gaemert [7] $(1-x)^\beta$ si vede che, ad impulso trasferito medio $\langle Q^2 \rangle = 22.2 \text{ GeV}^2$, il valore dell'esponente è $\beta = 9.5 \pm 0.7$ per i quark strani, e $\beta = 7.0 \pm 0.4$ per i quark del mare. Ciò indica che la distribuzione dei quark s è più *soft*. I risultati ottenuti da questo studio sono molto importanti e forniscono dei parametri molto significativi. La frazione di impulso del protone portata da s e da \bar{s} relativamente a quella portata dai quark leggeri del mare è ora calcolata come:

$$\kappa = \frac{2 \int x s(x) dx}{\int x [\bar{u}(x) + \bar{d}(x)] dx} = 0.37 \pm 0.05 \tag{2.5}$$

Se fosse valida la simmetria $SU(3)_F$ κ dovrebbe essere 1, ma comunque sappiamo che questa simmetria non è esatta, già solo per il fatto che la massa di s è molto più grande di quella di u e d .

Noto il valore di κ si può calcolare la frazione di impulso del protone trasportata da s e da \bar{s} :

$$f_s = \int x(s + \bar{s}) dx = 2.6\% \tag{2.6}$$

ed è inoltre possibile a questo punto introdurre il parametro η_s , definito come il *contenuto di stranezza del nucleone* (*strange content of the nucleon*):

$$\eta_s = \frac{\int x(s + \bar{s})dx}{\int x(u + d)dx} = 0.064 \pm 0.008. \quad (2.7)$$

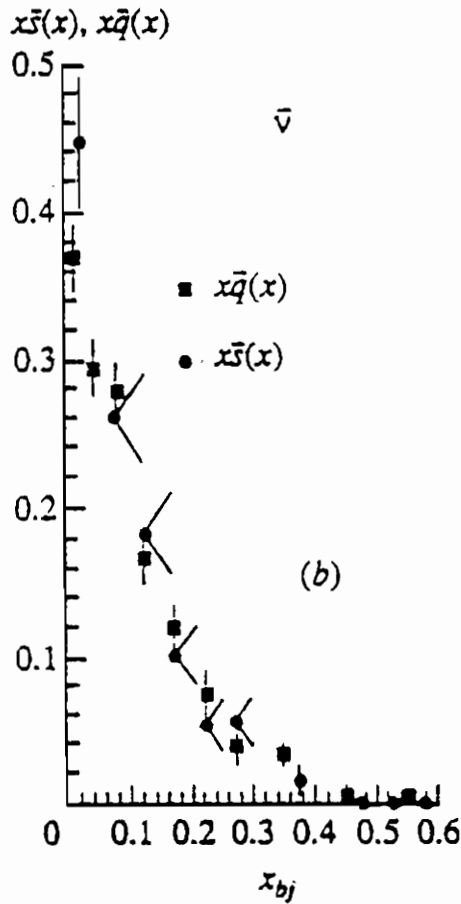


Fig. 4 Distribuzione del momento frazionario moltiplicato per la x degli antiquark strani confrontato a quella del mare [6].

2.2 La “spin crisis” del protone.

Con *spin crisis* si intende un effetto, misurato da esperimenti di scattering profondamente anelastico, che conduce ad un notevole contrasto con il modello a quark naive: secondo quest'ultimo, infatti, ci si aspetta che lo spin del protone venga determinato dai soli quark di valenza u e d ; si vede invece sperimentalmente che il quark s dà un contributo non nullo e negativo.

In questo paragrafo si darà una descrizione dei passi seguiti per determinare questo contributo.

Come nel caso non polarizzato, anche in caso di scattering profondamente anelastico polarizzato (con bersagli nonché proiettili polarizzati) i dati sperimentali forniscono misure di sezioni d'urto: mediante esse si può definire l'*asimmetria*, che consiste nella differenza tra le sezioni d'urto differenziali per spin paralleli/antiparalleli dei leptoni/nucleoni, divisa per la loro somma:

$$A^N(x, Q^2) = \frac{d\sigma^{\uparrow\downarrow} - d\sigma^{\uparrow\uparrow}}{d\sigma^{\uparrow\downarrow} + d\sigma^{\uparrow\uparrow}}. \quad (2.8)$$

Un metodo alternativo consiste nell'esprimere A in termini di *asimmetria del fotone virtuale longitudinale scambiato* :

$$A_1^N(x, Q^2) = \frac{d\sigma^{1/2} - d\sigma^{3/2}}{d\sigma^{1/2} + d\sigma^{3/2}}. \quad (2.9)$$

dove gli indici $1/2, 3/2$ si riferiscono alle proiezioni di spin totale ($S = S_{\gamma^*} + S_q$) sulla direzione del γ^* . Nota A_1^N , la funzione di struttura non polarizzata F_2 (vd. App.) ed il rapporto R tra le sezioni d'urto per fotoni virtuali longitudinali e trasversi, è possibile calcolare la funzione di struttura di spin $g_1(x, Q^2)$ (vd. App. per la definizione)

$$g_1(x, Q^2) = \frac{A_1^N(x, Q^2)F_2(x, Q^2)}{2x[1 + R(x, Q^2)]} \quad (2.10)$$

In fig. 5 è riportato a titolo esemplificativo il risultato di una serie di misure di $xg_1^d(x)$ realizzate dall'esperimento SMC, che studia

fenomeni di scattering profondamente anelastico di μ polarizzati su deuterio polarizzato:

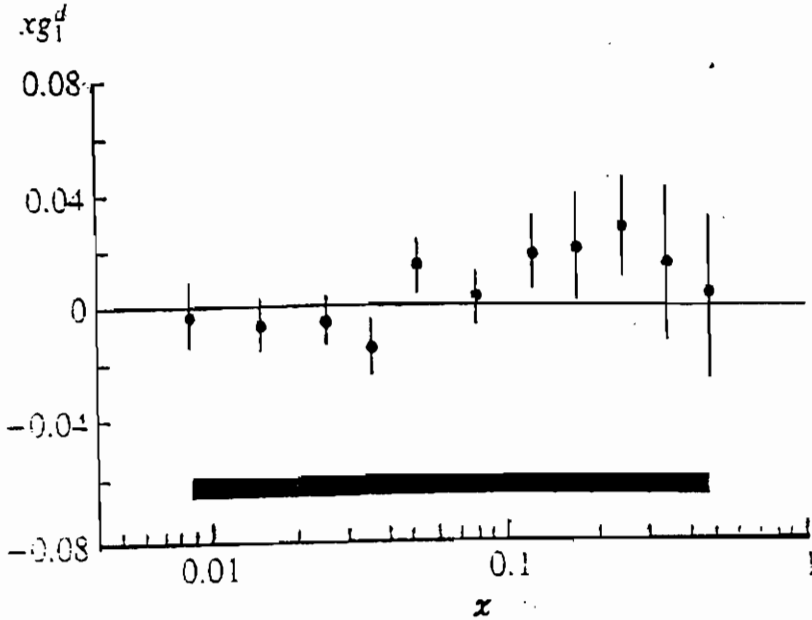


Fig. 5 Funzione di struttura di spin moltiplicata per x [9]

I valori di xg_1^d sono molto piccoli a causa del fatto che l'asimmetria è a sua volta molto piccola ed è visibile solo nella regione dei quark di valenza. Ai fini di questo discorso ha grande interesse il valore dell'integrale di g_1 a fisso Q^2 , Γ_1^N :

$$\Gamma_1^N(Q^2) = \int g_1^N(x, Q^2) dx \quad (2.11)$$

Il valore di Γ_1^N ottenuto dai dati sperimentali (dopo un'opportuna serie di "ripuliture" teoriche, come correzioni radiative di QCD perturbativa, correzioni di *higher twist* e correzioni di massa) è correlabile alle elicità nette dei quark. Indicando le elicità dei

quark con

$$\Delta q_i = \int (q_i^\uparrow - q_i^\downarrow + \bar{q}_i^\uparrow - \bar{q}_i^\downarrow) dx \quad (2.12)$$

(dove \uparrow indica parallelismo allo spin totale del protone, \downarrow anti-parallelismo), si dimostra che il valore di $\tilde{\Gamma}_1^N$ (cioè Γ_1^N dopo le correzioni) è uguale alla semisomma delle elicità, ognuna pesata con il quadrato della rispettiva carica:

$$\tilde{\Gamma}_1^N = \frac{1}{2} \sum_i e_i^2 \Delta q_i. \quad (2.13)$$

Sperimentalmente si sono ottenuti i seguenti risultati:

- Esperimento EMC (esperimento CERN di scattering profondamente anelastico polarizzato : μ polarizzati su p polarizzati) [8]:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_1^p)_{Q^2=10.7 GeV^2} &= 0.140 \pm 0.023 = \\ &= \frac{4}{18} \Delta u + \frac{1}{18} \Delta d + \frac{1}{18} \Delta s \end{aligned} \quad (2.14)$$

- Esperimento SMC (esperimento CERN di scattering profondamente anelastico di μ polarizzati su deuterio polarizzato) [9]:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_1^n)_{Q^2=2 GeV^2} &= -0.056 \pm 0.015 = \\ &= \frac{1}{18} \Delta u + \frac{4}{18} \Delta d + \frac{1}{18} \Delta s \end{aligned} \quad (2.15)$$

- Esperimento E142 (esperimento a SLAC di scattering profondamente anelastico di e^- polarizzati su ^3He polarizzato, basato su due esperimenti precedenti, E80 ed E130) [10]:

$$\begin{aligned} (\tilde{\Gamma}_1^n + \tilde{\Gamma}_1^p)_{Q^2=4.6 GeV^2} &= 0.048 \pm 0.055 = \\ &= \frac{5}{18} \Delta u + \frac{5}{18} \Delta d + \frac{1}{9} \Delta s \end{aligned} \quad (2.16)$$

Le tre misure forniscono tre equazioni nelle tre variabili $\Delta u, \Delta d, \Delta s$, di cui però solo due sono linearmente indipendenti. Il terzo input può essere ottenuto dal decadimento semileptonico dei barioni: infatti, gli accoppiamenti D ed F che compaiono nelle decomposizioni $8 \otimes 8$ di $SU(3)$ sono funzioni lineari delle elicità dei quark [1], [11]. Si ha cioè:

$$\frac{g_a}{g_v} = D + F = \Delta u - \Delta d \quad (2.17)$$

$$\hookrightarrow 1.273 \pm 0.028$$

L'andamento dell'elicità Δs in funzione di $\Delta\Sigma = \Delta u + \Delta d + \Delta s$ può essere schematizzato nella fig. 6 [12]:

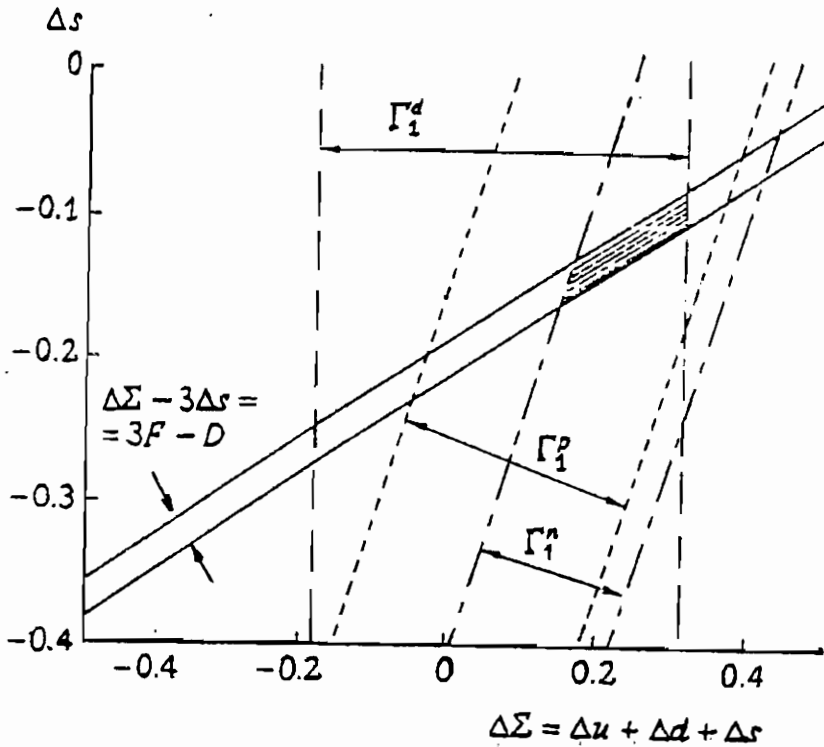


Fig. 6 Regioni permesse nel piano $\Delta\Sigma$ vs Δs [12].

L'intersezione delle bande ottenute dalle tre misure indicate, più la quarta osservazione, è indicata qui dall'area scura, i cui punti rappresentano le possibili soluzioni del problema. I contributi individuali allo spin del protone sono stati recentemente ricalcolati da Ellis, Gabathuler, Karliner [13] ed ammontano a:

$$\begin{cases} \Delta u = 0.80 \pm 0.04 \\ \Delta d = -0.46 \pm 0.04 \\ \Delta s = -0.13 \pm 0.04 \end{cases} \quad (2.18)$$

Questi risultati rappresentano la cosiddetta *spin crisis*: il quark contribuisce allo spin totale del protone in modo significativo e negativo; la somma dei vari contributi è ben lontana dal valore $1/2$ aspettato dal NQM: questo risultato ci dice che tutti i quark messi assieme contribuiscono solo al $(22 \pm 10)\%$ dello spin totale del nucleone.

Le'elicità totale trasportata da quark e antiquark nel protone è compatibile con zero.

2.3 Approcci teorici al problema

Il problema emerso dalle misure citate è stato affrontato dal punto di vista teorico adottando diversi approcci, ed è stato possibile fornire nel corso degli ultimi anni delle giustificazioni in grado di spiegare l'effetto misurato. Tuttavia, il problema resta tuttora aperto in quanto le spiegazioni addotte sono ancora oggetto di dibattito da parte dei diversi gruppi di ricerca.

Risultati compatibili con le misure effettuate sono per esempio state ottenute nell'ambito di teorie chirali a solitoni [3] basate sul modello di Skyrme; in queste teorie la maggior parte dello spin del protone si intende trasportata dal momento angolare orbitale. I calcoli effettuati, basati sull'assunzione che $\Delta\Sigma$ sia soppresso di un fattore $1/N_C$, mentre Δu , Δd e Δs siano dell'ordine di 1, forniscono i valori $\Delta u = 0.71$, $\Delta d = -0.54$, $\Delta s = -0.18$, che sono in buon accordo con l'esperimento. Tuttavia non c'è accordo sulla

validità di questo approccio, in primo luogo perché le ipotesi sopra riportate non sembrano a tutti giustificate, in secondo luogo perché non è ben chiara la possibile relazione esistente tra il modello di Skyrme e la QCD.

Un secondo metodo per affrontare il problema è stato sviluppato da G. Altarelli e collaboratori [14]: esso si basa essenzialmente su dirette conseguenze dei principi primi della QCD, senza far ricorso a modelli particolari, e conduce all'osservazione che in realtà, qualora il problema della spin crisis venga correttamente riformulato nell'ambito del modello a partoni, superando la visione evidentemente insufficiente del modello a quark naive, esso può essere interpretato in maniera piuttosto naturale e non comporta contrasti sostanziali con il modello a quark costituenti.

In punto fondamentale è che i risultati sperimentali non si riferiscono ai quark costituenti, che descrivono il nucleone a riposo, ma ai quark intesi come partoni (visto che le misure, soprattutto quelle di EMC, sono state realizzate ad alti valori di Q^2). In quest'ottica è allora plausibile che i tre quark costituenti trasportino effettivamente lo spin del protone; ognuno di essi sarà però dotato di struttura partonica dipendente da Q^2 . La necessità di tener conto della struttura partonica può essere evidenziata facendo per esempio riferimento al modello a quark costituenti più semplice (anche se non necessariamente corretto), SU(6). Supponendo che il protone sia costituito da tre quark costituenti, due di tipo U e uno di tipo D, che ΔQ sia lo spin portato al protone dal quark costituente Q , Δq_U sia lo spin portato dal partone q dentro il quark costituente U , e Δq siano le elicità dei partoni nel protone, in generale si potrà scrivere:

$$\begin{aligned}\Delta u - \Delta d &= (\Delta U - \Delta D)(\Delta u - \Delta d)_U \\ \Delta u + \Delta d - 2\Delta s &= (\Delta U + \Delta D)(\Delta u + \Delta d - 2\Delta s)_U \\ \Delta u + \Delta d + \Delta s &= (\Delta U + \Delta D)(\Delta u + \Delta d + \Delta s)_U\end{aligned}\quad (2.19)$$

(dove Δq_D non compare esplicitamente per reazioni di simmetria di isospin). Nell'ambito di SU(6) i valori per ΔU e ΔD (rispettivamente, $4/3$ e $-1/3$) non consentono di riprodurre il valore sperimentale corretto del rapporto g_A/g_V ; includendo invece il contributo partonico dei quark costituenti $(\Delta u - \Delta d)_U$ si ottiene $g_A/g_V = 1.25$, in discreto accordo con il valore sperimentale.

Il problema quindi, adottando questo approccio, non sta tanto nel dover giustificare per quale il motivo il contributo di Δs sia così grande (per quanto, anche la regola di somma di Ellis-Jaffe, citata in appendice, richiederebbe $\Delta s = 0$), ma piuttosto nel cercare di capire il motivo della discrepanza tra i contributi dei quark costituenti e dei partoni.

Una spiegazione viene fornita dal calcolo del contributo all'elicità del protone fornito dal suo contenuto gluonico:

$$\Delta g = \int_0^1 dx \left[g_+(x, Q^2) - g_-(x, Q^2) \right] \quad (2.20)$$

con g_{\pm} le densità gluoniche a elicità ± 1 in un protone di elicità $1/2$. Applicando le tecniche standard di QCD perturbativa è possibile dimostrare che per tutti i valori di Q^2 si ha un contributo gluonico all'integrale della funzione di spin g_1 (in particolare, alla sua parte di singoletto) che può essere anche piuttosto rilevante, e sarebbe in grado di spiegare l'effetto misurato da EMC e dagli altri esperimenti di diffusione polarizzata.

3. Misure a basse energie.

Nel regime di bassi Q^2 la percentuale del condensato $\bar{s}s$ viene dedotta da proprietà statiche del nucleone, come il σ -term π -Nucleone ed il momento magnetico dei barioni (vd. par. 4): al momento questa percentuale sembra sorprendentemente grande.

3.1 Il “ σ -term” Pione - Nucleone.

Il σ -term è una quantità che definisce essenzialmente una misura della rottura di simmetria chirale [15],[16]. In generale, un σ -term è definito come un qualsiasi elemento di matrice di un

numero pari (di solito, due) di commutatori della carica assiale con l'hamiltoniana

$$\sigma^{ij} = [Q^{5i}, [Q^{5j}, H]] = [Q^{5i}, \dot{Q}^{5j}]; \quad (3.1)$$

dal momento che le cariche assiali sono i generatori della simmetria chirale, nel limite di simmetria chirale è $\sigma^{ij} = 0$: pertanto, elementi non nulli danno appunto indicazioni sull'entità della rottura di questa simmetria. Il σ -term a basse energie può essere dedotto in due modi, che vedremo essere non compatibili tra loro.

Il primo modo si basa sull'associazione del σ -term al condensato di $u\bar{u}$ e $d\bar{d}$ presenti nel nucleone previsto dalla QCD perturbativa con rottura di simmetria chirale:

$$\sigma_N^{\pi^0} = \frac{m_u + m_d}{2m_N} \langle N | u\bar{u} + d\bar{d} | N \rangle \quad (3.2)$$

Il valore di $\sigma_N^{\pi^0}$ si può calcolare basandosi sulle formule di splitting di massa dei barioni [11]. Applicando la regola di Zweig [17] si ricava il valore $\sigma_N^{\pi^0} \simeq 25$ MeV, che può essere incrementato di $\sim 20 - 30$ % applicando correzioni di ordine superiore:

$$\sigma_N^{\pi^0} = 35 \pm 5 \text{ MeV}. \quad (3.3)$$

Un secondo metodo si basa invece sull'applicazione di un teorema dell'algebra delle correnti estrapolato a basse energie [15]: esso prevede che l'ampiezza per lo scattering elastico π -Nucleone a isospin pari, estrapolata al punto (non fisico, detto di Cheng-Dashen [18]) $t = 0, \nu = \frac{s-u}{4m_N} = 0$, sia uguale a $\sigma_N^{\pi^0}$. Definendo allora

$$\Sigma = F_\pi^2 \bar{D}^+(2\mu^2) \quad (3.4)$$

con $F_\pi \simeq 93$ MeV costante di accoppiamento del π , e \bar{D}^+ ampiezza per lo scattering πN da cui è stato rimosso il termine di Born, il teorema essenzialmente sostiene che

$$\frac{\Sigma}{\sigma_N^{\pi^0}} \rightarrow 1 \quad (3.5)$$

Il valore di Σ calcolato, mediante applicazione di relazioni di dispersione e complessa analisi di sfasamenti realizzata essenzialmente dal gruppo KH80 [19], fornisce un valore circa doppio rispetto a $\sigma_N^{\pi^0}$:

$$\Sigma = 64 \pm 8 \text{ MeV} \quad (3.6)$$

Il fatto che i due risultati siano vistosamente in disaccordo implica che o una delle due deduzioni è sbagliata, oppure che è opportuno ridefinire il valore di $\sigma_N^{\pi^0}$ tenendo conto della presenza di una frazione $s\bar{s}$ non trascurabile nel nucleone. A tale scopo si introduce una nuova definizione di σ -term:

$$\sigma_N^\pi = \frac{\sigma_N^{\pi^0}}{1 - y} \quad (3.7)$$

con y espresso da:

$$y = \frac{2\langle N|s\bar{s}|N\rangle}{\langle N|u\bar{u} + d\bar{d}|N\rangle} = 0.22 \pm 0.11 \quad (3.8)$$

Se fosse valido il modello a quark non relativistico e la regola di Zweig dovrebbe essere $y = 0$; il valore trovato invece ci dice che nel nucleone la quantità del condensato $s\bar{s}$ va da 1/10 a 1/3 del condensato $u\bar{u}$ o $d\bar{d}$.

3.2 Confronto con esperimenti ad alto Q^2 .

Può essere interessante confrontare il risultato trovato a basse energie, $y = 0.22 \pm 0.11$, con quello trovato ad alti Q^2 , $\kappa = 0.37 \pm 0.05$.

A prima vista i due risultati sembrano compatibili, entro l'errore. Consideriamo invece che cosa questi numeri implicino in termini del contributo del quark s alla massa del nucleone: nel par. 2.1 si è visto che la frazione d'impulso trasportata dal quark s è del 2.6%, se misurata in esperimenti ad alte energie. A basse

energie, invece, si trova – applicando l’usuale relazione di $SU(3)_F$ per le masse dei quark costituenti [11] $m_s/(m_u + m_d) = 13 -$

$$\langle N|\bar{s}s|N\rangle \geq 130 \pm 7 \text{ MeV} \quad (3.9)$$

che in realtà sembra un valore un po’ troppo grande, visto che corrisponde al $(14 \pm 8)\%$ della massa del protone. Ciò significa, effettuando una trasformazione di Lorentz nel sistema a infinito momento, che ci si aspetta una frazione d’impulso trasportata dai quark strani almeno del 14%, in netto disaccordo con i risultati da scattering profondamente anelastico .

Ciò significa che o non è possibile procedere ad un’identificazione di questo tipo, o sono sbagliati i risultati a bassa energia.

C’è però un secondo tipo di osservazione sperimentale che depone a favore della reale presenza di un condensato $s\bar{s}$ nel nucleo a basse energie in quantità non trascurabile: la misura della violazione della regola OZI nell’annichilazione $N\bar{N}$.

3.2 Annichilazione $N\bar{N}$ in stati finali contenenti mesoni ϕ

Il modello a quark naive ci dice che il mesone ϕ è una miscela “quasi ideale” di stati del nonetto, e dovrebbe poter essere descritto in termini di uno stato $s\bar{s}$ puro (o quasi) [1].

D’altro canto la regola OZI [17], che è semiempirica, ci dice che i diagrammi planari sconnessi con produzione di quark pesanti sono fortemente soppressi. Ciò significa che se valesse il NQM e la regola OZI non sarebbe possibile produrre mesoni ϕ dell’annichilazione $N\bar{N}$ (visto che secondo il modello a quark sia N che \bar{N} dovrebbero essere costituiti solo da quark u e d) [20]. In realtà un certo numero di esperimenti, in particolare quelli operanti a LEAR nell’ultimo decennio, hanno dimostrato che i mesoni ϕ vengono effettivamente prodotti durante l’annichilazione: la loro produzione, che va pertanto ascritta al *contenuto non strano* della ϕ se supponiamo valide le ipotesi di cui sopra, dovrebbe essere proporzionale

a $\sin \theta$, dove θ rappresenta una misura dell'angolo di deviazione dal mixing ideale [21].

Una misura della violazione della regola OZI è data dal rapporto tra i branching ratios per stati finali contenenti ϕ , oppure ω , e lo stesso mesone (o anche più di uno) ricolante:

$$R_X = \frac{BR(N\bar{N} \rightarrow \phi X)}{BR(N\bar{N} \rightarrow \omega X)}. \quad (3.10)$$

La validità della regola OZI implica $R_X = \tan^2 \theta = (2.5 \pm 1.5) \times 10^{-3}$. In fig. 7 è riportato l'andamento del rapporto R_X per vari tipi di mesone X ; le misure sono state effettuate tutte da esperimenti operanti presso LEAR. I risultati possono essere separati in tre fasce: un primo insieme di misure il cui valore è grossomodo compatibile con quanto previsto dalla regola OZI ($X = 2\pi$ o η), un secondo insieme il cui valore di R scarta di un ordine di grandezza rispetto a quello previsto ($X = \omega, \rho$), e un terzo il cui valore di R scarta di due ordini di grandezza o anche più ($X = \pi, \gamma$) [21].

Dalle osservazioni effettuate si ricava complessivamente che la produzione di quark $s\bar{s}$ manifesta è soppressa di un fattore 10 rispetto alla produzione di $K\bar{K}$ (s manifesto), e di un fattore 30 rispetto alla produzione di ω .

Sono state proposte numerose spiegazioni per la forte violazione misurata: dalla discussione della validità dell'espansione $1/N$ alla base della regola OZI per i barioni all'ipotesi di interazioni di stato finale \bar{K}^*K , o di formazione di uno stato intermedio criptoosotico a 4 quark (C(1480)) [22].

La spiegazione attualmente più accreditata è la presenza di un contenuto non trascurabile di quark $s\bar{s}$ nel nucleone, che ovviamente consentirebbe la produzione diretta di ϕ .

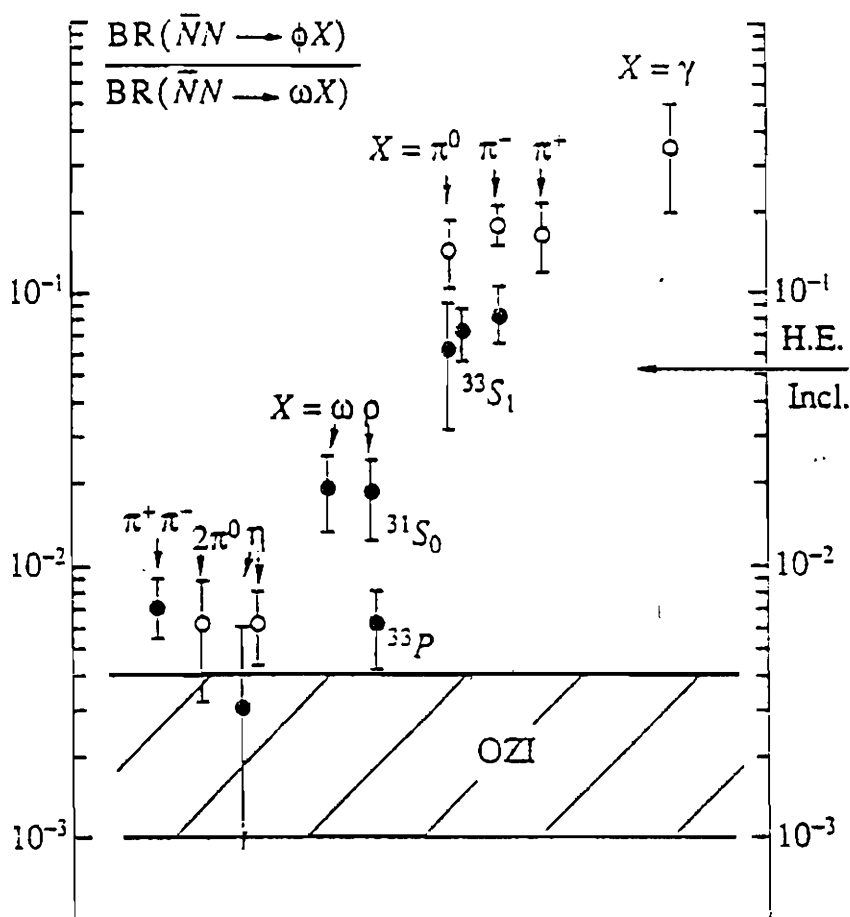


Fig. 7 Rapporto dei branching ratios per annichilazioni $p\bar{p}$ a riposo in stati finali contenenti ω e ϕ .

4. Altri effetti

Indicazioni aggiuntive su quanto i differenti flavours contribuiscono allo spin del protone vengono fornite da diversi altri esperimenti, sia a basse che ad alte energie: i risultati ottenuti sono

tutti in ottimo accordo con quanto ricavato, ad esempio, nel caso dello scattering profondamente anelastico polarizzato.

4.1. Misure a basse energie:

- **Momento magnetico dei barioni**

Le elicità dei quark possono essere correlate (come visto in 3.1 e nell'appendice) agli accoppiamenti F e D ; essi compaiono a loro volta nelle espressioni per il momento magnetico dei barioni, per il quale è possibile dedurre delle relazioni formalmente simili alle formule di massa. Dal fit simultaneo a sette momenti magnetici (di $p, n, \Sigma^+, \Sigma^-, \Xi^0, \Xi^-, \Lambda$), si ricavano i valori $\Delta u = 0.86 \pm 0.12$, $\Delta d = -0.40 \pm 0.12$, $\Delta s = -0.2 \pm 0.05$, che sono in ottimo accordo con i risultati ottenuti da scattering profondamente anelastico [15].

- **Scattering νp e $\bar{\nu} p$ a basse energie.**

Un esperimento di BNL [23] ha misurato l'elicità del quark strano attraverso misure simultanee di sezioni d'urto $d\sigma^{\bar{\nu}}/dQ^2$ e $d\sigma/dQ^2$, mediante cui è stato misurato il fattore di forma assiale. Il risultato trovato è $\Delta s = -0.15 \pm 0.08$, nuovamente in ottimo accordo con i risultati già trovati.

4.2. Misure ad alte energie.

- **Interazioni forti pp ad alte energie.**

Le interazioni pp forniscono indicazioni analoghe a quelle ot-

tenute da esperimenti di scattering profondamente anelastico, ma sono assai più complesse da studiare. Possiamo distinguere le interazioni forti pp in due categorie: quelle ad alto impulso trasverso e quelle *soffici*.

In entrambi i casi i processi possono essere suddivisi in tre stadi, che sono in realtà del tutto analoghi fatta eccezione per lo stato intermedio. Nel caso di interazioni ad alto impulso trasverso i tre stadi possono essere schematizzati nel seguente modo:

1. Evoluzione dell'adrone incidente in uno stato a partoni;
2. Scattering duro ad alto Q^2 tra due partoni e scattering soffice tra i partoni rimanenti;
3. Ricombinazione dei partoni colorati in singoletti di colore adronici.

Il processo è rappresentato schematicamente in fig. 8:

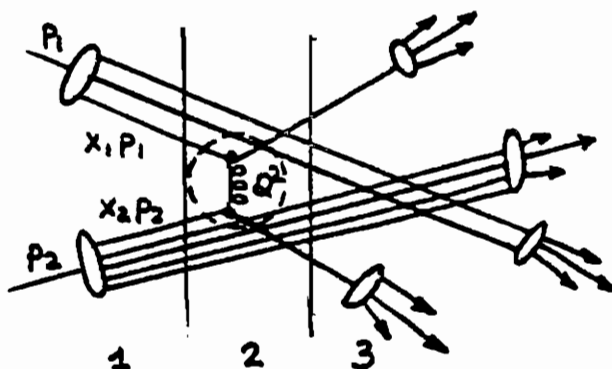


Fig. 8 Interazione adronica ad alto p_T .

I quark strani possono comparire in ciascuna di queste tre fasi: dalla prima, per formazione di coppie virtuali $s\bar{s}$; dalla seconda in seguito a processi duri come la fusione gg ; dalla terza in seguito alla rottura di stringhe di colore.

Nel caso di interazioni soffici come già detto le fasi 1) e 3) sono analoghe a quelle già descritte; la fase 2) invece è più complicata perché hanno luogo sottoprocessi multipli, come scambio di gluoni soffici e annichilazioni e creazioni successive e continue di quark del mare. Nonostante la complessità di questi fenomeni, essi possono essere ben descritti in modo statistico da modelli fenomenologici basati sulla QCD perturbativa o sulla teoria di Regge [24].

In questo caso i quark strani possono essere prodotti durante la fase 1), per dissociazione virtuale del protone in ΛK^+ , $p\eta$, $p\phi$, ma soprattutto durante la fase 3), a seguito della rottura di stringhe di colore che qui è il processo fondamentale.

La rottura di stringhe di colore avviene allorché due quark, separandosi, la allungano fino al raggiungimento di una tensione critica, oltre la quale la stringa si spezza. La probabilità che si verifichi un fenomeno del genere, cioè la probabilità di creazione di una coppia, è data da [25]

$$P \sim \exp(-\pi m^2/A) \quad (4.1)$$

dove m è la massa costituente del quark ed A la tensione di stringa; questa espressione è in accordo con quanto ottenuto da deduzioni di tipo termodinamico.

Scegliendo opportunamente i valori per le masse costituenti dei quark ($m_{u,d} \simeq 350$ MeV, $m_s \simeq 500$ MeV) e per la tensione di stringa (p.es. $a = 1$ GeV/fm) si può ricavare un parametro noto come *fattore di soppressione di stranezza*, definito come

$$\lambda_s = \frac{2s}{\bar{u} + \bar{d}} = 0.3 \quad (4.2)$$

In fig. 9 sono riportati vari risultati, ottenuti in particolar modo mediante le camere a bolle dell'ultima generazione, per il parametro λ_s [26].

Per il calcolo di λ_s è necessario prestare particolare attenzione alle modalità di conteggio dei quark s nel rapporto, perché la loro produzione, relativamente a quella dei quark leggeri, dipende dall'istante in cui il numero di quark è contato. Infatti, è necessario effettuare questo conteggio prima del loro decadimento

semileptonico, ma anche prima del decadimento forte delle eventuali risonanze mesoniche: esse infatti decadono principalmente in π , che sono i mesoni più leggeri, e ciò ovviamente può alterare il valore del rapporto λ_s , falsando la produzione effettiva di quark leggeri da rottura di stringa.

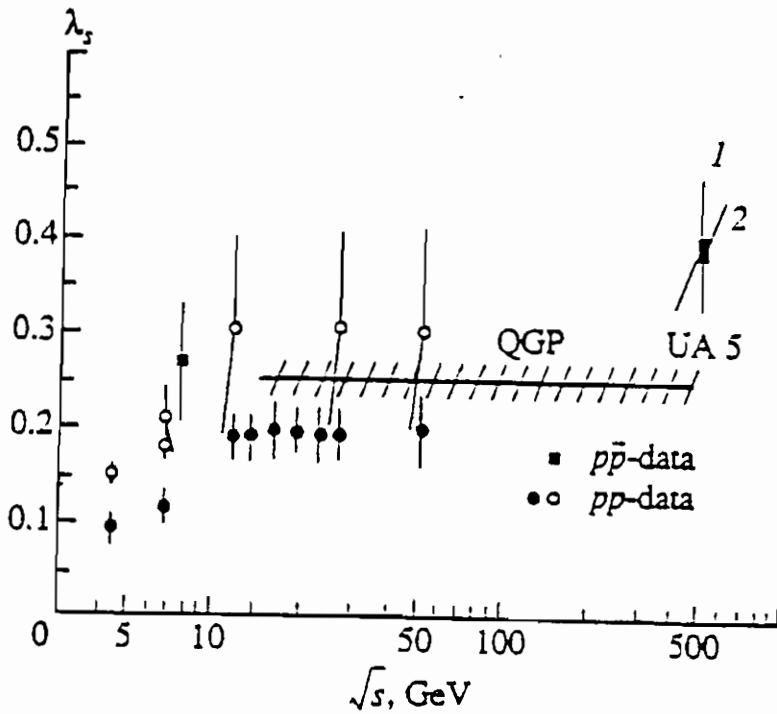


Fig. 9 Fattore di soppressione di stranezza λ_s in funzione dell'energia nel centro di massa \sqrt{s} .

Appendice: cenni al modello a partoni e regole di somma.

In questa appendice si intende più che altro dare alcune brevi delucidazioni circa la nomenclatura e notazione adottata nei corso dei vari paragrafi.

I processi di scattering profondamente anelastico *inclusivi* (come ad esempio $\mu p \rightarrow \mu X$, fig. 1), sono descritti da un set standard di variabili cinematiche:

$$\begin{aligned}
 Q^2 &= -q^2 \simeq 4EE' \sin^2 \frac{\theta}{2} \\
 \nu &= \frac{(\mathbf{p} \cdot \mathbf{q})}{m_N} = E - E' \\
 x &= \frac{q^2}{2m_N \nu} \\
 y &= \frac{\nu}{E}
 \end{aligned}
 \tag{a.1}$$

dove e ed E' sono le energie dei leptoni incidente ed uscente nel sistema del laboratorio, θ è l'angolo di scattering nel laboratorio e x è la nota variabile di Bjorken [4], [15], [27].

Nell'approssimazione di scambio di un solo fotone virtuale, la sezione d'urto differenziale può essere scritta in modo del tutto generale mediante il prodotto tra un tensore che tiene conto del vertice d'interazione leptonic $L^{\mu\nu}$ ed uno analogo per il vertice adronico, $W^{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{Q^4} \frac{E'}{E} L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}
 \tag{a.2}$$

(se lo scattering fosse polarizzato, L dipenderebbe, oltre che ovviamente da \mathbf{p} e da \mathbf{q} , anche dal vettore di polarizzazione del leptone incidente, $\boldsymbol{\sigma}$, e \mathbf{w} da quello del protone, \mathbf{s}). Entrambi i tensori possono essere scomposti in una parte simmetrica ed in una anti-simmetrica:

$$\begin{aligned}
 L_{\mu\nu} &= L_{\mu\nu}^{(S)} + L_{\mu\nu}^{(A)} \\
 W_{\mu\nu} &= W_{\mu\nu}^{(S)} + W_{\mu\nu}^{(A)}
 \end{aligned}
 \tag{a.3}$$

Il tensore leptónico $L_{\mu\nu}$ può essere calcolato mediante le tecniche standard, mentre la parte adronica, che deve inoltre essere soggetta a vincoli quali la richiesta di conservazione delle correnti nel vertice d'interazione, e di invarianza per trasformazioni di P e CP, viene parametrizzata per mezzo di fattori di forma Lorentz-invarianti. A seguito della contrazione tra i tensori indicata in (a.2), le funzioni di struttura necessarie per descrivere l'accoppiamento elettromagnetico anelastico del nucleone sono essenzialmente quattro: due, W_1 e W_2 , nel caso in cui lo spin del nucleone non venga osservato, più altre due, G_1 e G_2 , nel caso in cui avvenga uno scattering polarizzato.

Tutto ciò premesso, la sezione d'urto differenziale per scattering anelastico non polarizzato è espressa da:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{4\alpha^2 E^2}{Q^2} \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(\nu, Q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(\nu, Q^2) \right\} \quad (a.4)$$

È noto che nel limite di Bjorken (che significa, ad x fissato, $Q^2 \rightarrow \infty$ e $\nu = E - E' \rightarrow \infty$) valgono le proprietà (di *scaling*) per le funzioni di struttura non polarizzate F_1 ed F_2 :

$$\begin{aligned} m_N W_1(\nu, Q^2) &= \frac{1}{2} \sum_j e_j^2 f_j(x) = F_1(x) \\ \nu W_2(\nu, Q^2) &= x \sum_j e_j^2 f_j(x) = F_2(x) \end{aligned} \quad (a.5)$$

dove le f rappresentano le funzioni di distribuzione del partone j (di carica e_j).

In maniera formalmente analoga la sezione d'urto differenziale per scattering anelastico polarizzato dipende da funzioni di struttura polarizzate G_1 e G_2 :

$$\begin{aligned} \frac{d^2\sigma^{\uparrow, \uparrow(\downarrow)}}{d\Omega dE'} &= \frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} \Big|_{np} \mp \\ &\frac{2\alpha^2}{Q^2} \left\{ \frac{E'}{E} (E + E' \cos \theta) m_N G_1(\nu, Q^2) + Q^2 G_2(\nu, Q^2) \right\} \end{aligned} \quad (a.6)$$

Nel caso polarizzato, se ci si pone nel sistema di riferimento di Breit [28], si distingue tra funzioni di distribuzione per partoni polarizzati longitudinalmente (q) e trasversalmente (k), per le quali si scrive:

$$\begin{aligned}\Delta\tilde{q}_j(x) &= q_j^+(x) - q_j^-(x) \\ \Delta\tilde{k}_j(x) &= k_j^+(x) - k_j^-(x)\end{aligned}\tag{a.7}$$

(con il segno + si intende parallelismo tra direzione di polarizzazione e spin del nucleone, con -, ovviamente, antiparallelismo). In modo analogo a quanto si ha nel caso non polarizzato, nel limite di Bjorken si ottengono le seguenti relazioni di *scaling*:

$$\begin{aligned}\sum_j e_j^2 \Delta\tilde{q}_j(x) &= 2m_N^2 \nu \left\{ G_1(\nu, Q^2) - 2x G_2(\nu, Q^2) \right\} \\ &= 2 \left(g_1(x) - \frac{2x}{\nu} g_2(x) \right)\end{aligned}\tag{a.8}$$

$$\begin{aligned}\sum_j e_j^2 \Delta\tilde{k}_j(x) &= 2m_N^2 \nu \left\{ m_N G_1(\nu, Q^2) + \nu G_2(\nu, Q^2) \right\} \\ &= 2(g_1(x) + g_2(x))\end{aligned}\tag{a.9}$$

done g_1 e g_2 sono dette funzioni di struttura di spin e presentano anch'esse l'usuale comportamento di scala:

$$\begin{aligned}m_N^2 \nu G_1(\nu, Q^2) &= g_1(x) \\ m_N^2 \nu G_2(\nu, Q^2) &= g_2(x);\end{aligned}\tag{a.10}$$

ci si aspetta che g_1 e g_2 siano dello stesso ordine di grandezza.

Le funzioni di struttura di spin g_1 e g_2 obbediscono ad alcune *regole di somma*, mediante le quali è possibile correlare misure effettuate a basse energie ad osservabili correlate a fenomeni di diffusione profondamente anelastica; la loro verifica è uno degli scopi principali degli esperimenti attualmente operanti ad Hera [29].

Senza entrare nel merito di come esse vengano ricavate, si vuole qui semplicemente accennare ad alcune di esse, che si ritengono tra le più attinenti all'argomento trattato:

- *Bjorken sum rule* [30]

Correla la densità partonica integrata $\Delta q = \int_0^1 dx \Delta \bar{q}(x)$ alle costanti di accoppiamento definite a *basse energia* (in particolare, nel modello a quark, SU(3)):

$$2 \int_0^1 [g_1^p(x) - g_1^n(x)] dx = \frac{1}{3}(\Delta u - \Delta d) = \frac{1}{3}g_A^{(3)} \quad (a.11)$$

e, per nucleoni polarizzati trasversalmente:

$$2 \int_0^1 [g_1^p(x) + g_2^p(x) - g_1^n(x) - g_2^n(x)] dx = \frac{1}{3}g_A^{(3)} \quad (a.11')$$

Le (a.11) e (a.11') prese assieme sono equivalenti a dire

$$\int_0^1 [g_2^p(x) - g_2^n(x)] dx = 0$$

che, a sua volta, è equivalente alla *Burkhardt-Cottingham sum rule*:

$$\int_0^1 g_2^p(x) dx = \int_0^1 g_2^n(x) dx = 0 \quad (a.12)$$

- *Ellis-Jaffe sum rule* [31]

Si ottiene partendo dal presupposto che lo spin del protone sia trasportato solo dai quark *u* e *d* (cioè $\Delta s = 0$):

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_1^p(x) dx &= \frac{1}{2} \left(F - \frac{1}{9} D \right) \simeq 0.186 \pm 0.07 \\ \int_0^1 g_1^n(x) dx &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3} F - \frac{4}{9} D \right) \simeq -0.024 \pm 0.05 \end{aligned} \quad (a.13)$$

dove *F* e *D* sono gli accoppiamenti (misurati) dei membri dell'ottetto di SU(3) nel modello a quark [11]. Da queste regole di somma si ottiene, per le elicità nette dei quark entro il protone:

$$\begin{aligned} \Delta u &\simeq 0.92 \\ \Delta d &\simeq -0.34 \\ \Delta s &\simeq 0. \end{aligned} \quad (a.14)$$

da cui si deduce che il 60% dello spin del protone dovrebbe essere portato dai quark u e d . Se dagli esperimenti si ottengono risultati significativamente differenti, è possibile affermare la non validità dell'ipotesi iniziale $\Delta s = 0$.

Desidero ringraziare la dott. Raffaella Mozzetti ed il dott. Davide Vitè per la loro collaborazione nella ricerca di materiale bibliografico a DESY e al CERN.

Bibliografia.

1. G. Morpurgo, in *Common Problems and Trends of Modern Physics*, World Scientific, Singapore (1992), p. 3
J.J. De Swart, *Rev. of Mod. Phys.* **85** (1963), 916
N.P. Samios, M. Goldberg, B.T. Meadows, *Rev. of Mod. Phys.* **46** (1974), 49
2. Y. Frishman, M. Karliner, *Nucl. Phys. B* **344**, (1990), 393
S.J. Brodsky, J. Ellis, M. Karliner, *Phys. Lett. B* **206** (1988), 309
3. J. Ellis, Y. Frishman, A. Hanany, M. Karliner, *Nucl. Phys. B* **382** (1992), 189
4. D. Perkins, *Introduction to High Energy Physics*, Benjamin-Cummings, Menlo Park, 1982
5. A. Martin, W. Stirling, R. Roberts, *Phys. Rev. D* **47** (1993), 867
6. S. Rabinowitz et al., *Phys. Rev. Lett.* **70**, n. 2, (1993), 134
C. Foudas et al., *Phys. Rev. Lett.* **64** (1990), 1207
7. A.J. Buras, K.J.F. Gaemers, *Nucl. Phys B* **132** (1978), 249
8. J. Ashman et al., *Phys. Lett. B* **206** (1998), 364
J. Ashman et al., *Nucl. Phys. B* **328** (1990), 1 World Scientific, Singapore (1992), p. 57
9. B. Adeva et al., *Phys. Lett. B* **302** (1993), 533
10. T.O. Niinikoski, *Nucl. Instr. and Meth.* **192** (1982), 151
O.C. Allkofer et al., *Nucl. Instr. and Meth.* **179** (1981), 445
P.L. Anthony, *Phys. Rev. Lett.* **71** (1993), 959
11. D. B. Lichtenberg, *Unitary symmetry and Particle Physics*, Academic Press inc., London (1978)
A. De Rujula et al., *Phys. Rev. D* **12** (1975), 147
12. J. Ellis, M. Karliner, *Phys. Lett. B* **313** (1993), 131
13. J. Ellis, E. Gabathuler, M. Karliner, *Phys. Lett. B* **217** (1989), 173
14. G. Altarelli and G.G. Ross, *Phys. Lett. B* **212** (1988) 391;
G. Altarelli and B. Lampe, *Z. Phys. C* **47** (1990) 315;
G. Altarelli, preprint CERN-TH-5675-90;
G. Altarelli and G. Ridolfi, preprint CERN-TH.7415/94;
R.D. Ball, S. Forte and G. Ridolfi, *Nucl. Phys. B* **444** (1995)287

15. R. Decker, M. Nowakowski, U. Wiedner, *Fort. Phys.* **41** (1993), 87
16. J. Gasser, H. Leutwyler, M. Sainio, *Phys. Lett. B* **253** (1991), 252
 C. Dominguez, P. Langacker, *Phys. Rev. D* **24** (1981), 1905
 J. Gasser, H. Leutwyler, M. Sainio, *Phys. Lett. B* **253** (1991), 260
 M. Shifman, A. Vainshtein, V. Zacharov, *Phys. Lett. B* **75** (1978), 443
 T. Cheng, *Phys. Rev. D* **38** (1988), 2869
17. G. Zweig, *CERN Report TH-412* (1964)
 S. Okubo, *Phys. Lett.* **5** (1963), 165
 I. Iizuka, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **37-38** (1966), 21
18. T. Cheng, *Phys. Rev. D* **13** (1976), 2161
19. R. Koch, E. Pietraninen, *Nucl. Phys. A* **336** (1980), 331
20. J. Ellis, M. Karliner, D. Kharzeev, M. Sapozhnikov, *Phys. Lett. B* **353** (1995), 319
 M.G. Sapozhnikov, *Proc. LEAP94 Conference*, Bled (1994), World Scientific, Singapore (1994), p. 335
21. M.A. Faessler, comunicazione privata
 M.A. Faessler, *Nuovo Cimento* **107 A**, n. 10 (1994), 2211
 K. Peters, *Proc. LEAP94 Conference*, Bled (1994), World Scientific, Singapore (1994), p. 3
 U. Wiedner, *Proc. LEAP94 Conference*, Bled (1994), World Scientific, Singapore (1994), p. 319
22. S.I. Bityukov et al., *Phys. Lett. B* **188**, 133
23. L.A. Ahrens et al., *Phys. Rev. D* **35** (1987), 785
24. S. Frautschi, *Regge Poles and S-Matrix Theory*, W. A. Benjamin Inc., New York (1963)
25. C.B. Dover et al., *Prog. Part. Nucl. Phys.* **29** (1992), 87
26. M. Aguilar-Benitez et al., *Z. Phys. C* **50** (1991), 405
 M.A. Faessler, *Proc. XVII Int. Symp. on Multiparticle Dynamics*, Seewinkel (1986)
27. E. Leader, E. Predazzi, *An Introduction to Gauge Theories and the New Physics*, Cambridge University Press (1982)
 J.D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148** (1969), 1547
 M. Anselmino, *Phys. Rev. D* **19** (1978), 2803
 P.G. Ratcliffe, *Nuovo Cimento* **107A**, n. 10 (1994), 2211

28. R. Hagedorn, *Relativistic Kinematics*, W.A. Benjamin Inc., New York (1963)
29. K. Zapfe, HERMES Collaboration, *Proc. VI Recontres de Blois*, (1994)
30. J.D. Bjorken, *Phys. Rev.* **148** (1966), 1467
31. J. Ellis, R.L. Jaffe, *Phys. Rev. D* **9** (1974), 1444

Barbara Pasquini

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Pavia**

Sezione d'urto di Bremsstrahlung nelle reazioni nucleari

Seminario tenuto il 6 Dicembre 1995

1 Introduzione

La radiazione di Bremsstrahlung (lett.: radiazione frenante) fu osservata per la prima volta nel passaggio e successivo arrestarsi di elettroni altamente energetici in spessi materiali metallici. Nella collisione con gli atomi del bersaglio una particella carica come l'elettrone, in seguito all'accelerazione subita, emette radiazione elettromagnetica con conseguente perdita di energia. Per particelle non relativistiche, l'energia persa per emissione di radiazione è trascurabile rispetto all'energia persa nell'urto con gli atomi del bersaglio, ma diventa preponderante per particelle ultrarelativistiche. A dispetto della difficoltà di ottenere accurate misure dello spettro di radiazione di Bremsstrahlung, l'elettrodinamica quantistica e, nel limite classico, le equazioni di Maxwell ci forniscono gli strumenti teorici necessari per studiare ed inquadrare esattamente il processo di emissione di radiazione al variare dell'energia della particella carica incidente e per i diversi tipi di radiatori. D'altra parte, il vasto interesse dedicato allo studio della radiazione di Bremsstrahlung è giustificato se si pensa ai diversi processi ed applicazioni a cui è connessa: come abbiamo detto, per elettroni altamente energetici è il principale meccanismo di perdita di energia nel passaggio attraverso la materia; inoltre intensi fasci di fotoni altamente collimati sono prodotti da Bremsstrahlung di elettroni ultrarelativistici e sono utilizzati in esperimenti di fotoproduzione, mentre l'interpretazione di molti esperimenti di reazioni fotonucleari, come l'elettroproduzione di fotoni da sistemi nucleari, è possibile solo dopo aver individuato e separato completamente il contributo per Bremsstrahlung dagli elettroni.

In questo lavoro si focalizzerà l'attenzione sullo studio delle proprietà dello spettro di radiazione di Bremsstrahlung emessa da elettroni nel campo dei nuclei atomici di bersagli di spessore trascurabile. In particolare, nel capitolo 2 ricaveremo la formula di Bethe-Heitler per la sezione d'urto di Bremsstrahlung nel campo coulombiano di un nucleo, discutendo il risultato nel limite ultrarelativistico e non relativistico. Le correzioni di screening degli elettroni atomici sono valutate nel capitolo 3, assumendo il modello atomico di Thomas-Fermi. Nel capitolo 4 infine stimeremo il contributo che deriva dallo scattering diretto con gli elettroni atomici, seguendo

un approccio semiclassico dovuto a Weizsäcker e Williams.

2 Sezione d'urto

Consideriamo un elettrone di energia iniziale E_0 in interazione con il campo coulombiano di un nucleo atomico di carica $Z\epsilon$. In seguito all'accelerazione subita, ci sarà una certa probabilità che l'elettrone emetta un fotone di quadrimomento $k^\mu = (\omega = k, \mathbf{k})$, portandosi nello stato finale con energia $E = E_0 - k$ e lasciando il nucleo nello stato fondamentale. La hamiltoniana di interazione che descrive la dinamica del processo può essere convenientemente trattata con l'approssimazione di campo esterno: gli operatori del campo di radiazione totale sono separati in due parti

$$H_{\text{INT}} = V_{\text{B}} + V_{\text{N}}. \quad (1)$$

dove V_{B} descrive gli effetti quantistici e corrisponde all'operatore del campo di radiazione dell'elettrone, e V_{N} rappresenta il potenziale coulombiano del nucleo che viene trattato classicamente come un campo esterno assegnato, essendo trascurabili le fluttuazioni quantistiche del campo e l'azione sul campo stesso dei processi radiativi in discussione. La sezione d'urto di Bremsstrahlung nello scattering dell'elettrone nel campo coulombiano del nucleo è data da ¹

$$d\sigma = \frac{m^2}{(2\pi)^5} \frac{1}{2k} \left| \frac{\mathbf{p}}{p_0} \right| \frac{1}{2} |M|^2 d^3\mathbf{k} d\Omega_e. \quad (2)$$

dove m è la massa dell'elettrone, \mathbf{p}_0 è il momento dell'elettrone incidente e $d\Omega_e$ è l'elemento di angolo solido nella direzione del momento \mathbf{p} dell'elettrone diffuso. L'ampiezza di transizione è calcolata dall'elemento di matrice

$$M = \int d^4x \psi_f^*(x) V_{\text{B}}(x) \psi_i(x). \quad (3)$$

¹Nei capitoli 2 e 3, in cui ricaviamo le formule dall'elettrodinamica quantistica, ci riferiamo al sistema di unità naturale ($\hbar = c = 1$). mentre nell'ultimo capitolo, dove seguiamo un metodo semiclassico, utilizzeremo il sistema c.g.s. .

dove ψ_i e ψ_f sono le autofunzioni dell'elettrone iniziale e finale che si muove sotto l'azione del campo nucleare V_N . Poiché non è possibile risolvere in forma chiusa l'equazione di Dirac per un elettrone relativistico in un campo coulombiano, varie procedure e autofunzioni approssimate vengono generalmente utilizzate.

Innanzitutto, il calcolo della sezione d'urto può essere classificato come relativistico o non relativistico a seconda che l'interazione dell'elettrone con il campo nucleare venga descritto con la hamiltoniana di Dirac o di Schrödinger rispettivamente. Nel caso non relativistico, la sezione d'urto calcolata da Sommerfeld [1, 2] in approssimazione di dipolo elettrico ci fornisce un risultato valido solo nel limite di basse energie dell'elettrone e per bersagli a basso numero atomico, essendo completamente trascurato l'effetto di screening degli elettroni atomici. Autofunzioni coulombiane relativistiche approssimate all'ordine $(Z/137)^2/l$, dove l è il numero quantico di momento angolare che rappresenta l'indice di somma nello sviluppo in serie della autofunzione, sono state utilizzate [3, 4] per calcolare la sezione d'urto nel regime ultrarelativistico, includendo anche le correzioni di screening. Espressioni analitiche per diversi range di energia dell'elettrone possono inoltre essere ottenute calcolando la sezione d'urto in approssimazione di Born, con autofunzioni di particella libera perturbate al primo ordine in Ze dal potenziale coulombiano. Troncando lo sviluppo perturbativo al primo ordine impone però come limite di validità le condizioni

$$2\pi\xi_0 = \frac{2\pi Ze^2}{v_0} \ll 1, \quad 2\pi\xi = \frac{2\pi Ze^2}{v} \ll 1, \quad (4)$$

dove v_0 e v sono rispettivamente la velocità iniziale e finale dell'elettrone. Le 4 vengono meno all'aumentare del numero atomico del bersaglio, per energie basse dell'elettrone incidente e nel limite di alte frequenze del fotone emesso. Nonostante queste limitazioni, le formule in approssimazione di Born permettono di valutare con una certa accuratezza le proprietà della radiazione di Bremsstrahlung e danno comunque una stima ragionevole per la sezione d'urto che, nei diversi casi limite, può essere convenientemente corretta con considerazioni di carattere empirico o teorico.

2.1 Formula di Bethe- Heitler

In approssimazione di Born e considerando il campo coulombiano del nucleo generato da una sorgente statica esterna di carica Ze , l'ampiezza di transizione è data dalla somma dei contributi relativi ai diagrammi a e b in fig. 1

$$M = M_a + M_b. \quad (5)$$

$$M_a = -ie^2 \bar{u}(p) \not{\epsilon}(k) \frac{\not{p} + \not{k} + m}{2pk} \not{X}_N(q) u(p_0). \quad (6)$$

$$M_b = -ie^2 \bar{u}(p) \not{X}_N(q) \frac{\not{p}_0 - \not{k} + m}{-2p_0k} \not{\epsilon}(k) u(p_0). \quad (7)$$

dove $u(p_0)$ e $u(p)$ sono rispettivamente gli spinori dell'elettrone entrante e uscente, mentre ϵ^μ è il vettore di polarizzazione del fotone.

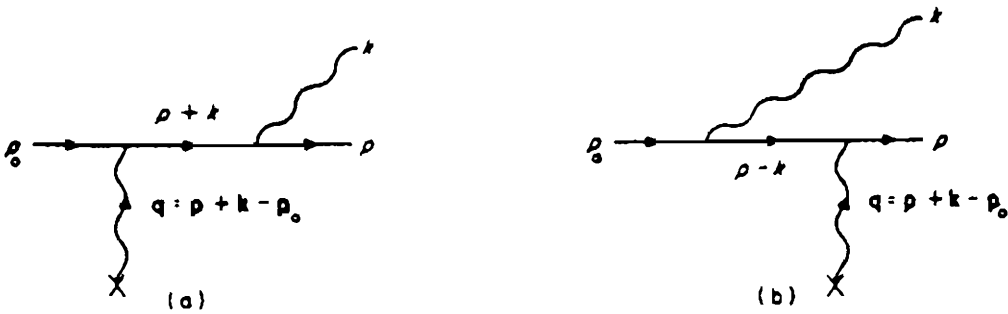


Fig. 1: grafici di Feynman per Bremsstrahlung di un elettrone nel campo coulombiano di un nucleo, considerato come una sorgente statica esterna di carica Ze .

Nel gauge di Coulomb e prendendo l'asse di quantizzazione lungo la direzione di \mathbf{k} , $V_N^\mu(\mathbf{q}) = (Ze/q^2, 0, 0, 0)$, dove $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \mathbf{k} - \mathbf{p}_0$ è il momento trasferito dal nucleo all'elettrone. Per scattering con fasci di elettroni non polarizzati e nel caso in cui non siamo interessati a rivelare lo stato di polarizzazione delle particelle emesse, dobbiamo mediare la sezione d'urto σ sugli stati di spin dell'elettrone incidente e sommare sugli stati di spin e di polarizzazione

dell'elettrone e del fotone uscenti. L'espressione finale per la sezione d'urto, nota come formula di Bethe-Heitler [5], risulta allora

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\Omega_k dk} = \frac{e^4 (Ze)^2}{8k (2\pi)^5} \left| \frac{\mathbf{p}}{p_0} \right| \frac{1}{q^4} \left[2k^2 \frac{p_0 \sin^2 \theta_0 + p^2 \sin^2 \theta}{(E - p \cos \theta)(E_0 - p_0 \cos \theta_0)} + \frac{p_0^2 \sin^2 \theta_0}{(E_0 - p_0 \cos \theta_0)^2} (4E^2 + q^2) + \frac{p^2 \sin^2 \theta}{(E - p \cos \theta)^2} (4E_0^2 + q^2) - \frac{2pp_0 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \phi (4EE_0 + q^2 + 2k^2)}{(E - p \cos \theta)(E_0 - p_0 \cos \theta_0)} \right], \quad (8)$$

dove θ e θ_0 sono gli angoli tra \mathbf{k} e \mathbf{p} , \mathbf{p}_0 rispettivamente e ϕ è l'angolo tra i piani \mathbf{pk} e $\mathbf{p}_0\mathbf{k}$, come indicato in fig. 2.

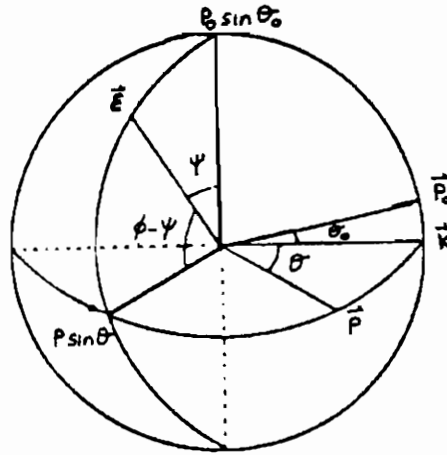


Fig. 2: relazioni tra le direzioni di moto delle particelle incidenti ed emesse nel processo di Bremsstrahlung.

2.2 Limite non relativistico

Nel limite non relativistico, in cui l'elettrone incidente ha un momento trascurabile rispetto alla sua massa a riposo ($p_0 \ll m$), si avrà uno spettro di radiazione che cade nella regione continua dei

raggi X ($k = p_0^2/2m - p^2/2m \ll p_0$) e l'equazione 8 per la sezione d'urto differenziale si riduce a

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_e d\Omega_k dk} = \left(\frac{\alpha Z}{\pi}\right)^2 \frac{\alpha}{k} \frac{1}{q^4} \times \left[p_0^2 \sin^2 \theta_0 + p^2 \sin^2 \theta - 2pp_0 \sin \theta_0 \sin \theta \cos \phi \right], \quad (9)$$

dove $\alpha = e^2/4\pi = 1/137$. Poiché q non dipende dalla direzione di k

$$\begin{aligned} q^2 &\approx p^2 + p_0^2 - 2pp_0(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0 \cos \phi) \\ &= (p - p_0)^2, \end{aligned} \quad (10)$$

si ha che per una data direzione di deflessione (angolo tra p_0 e p), la massima intensità di radiazione è emessa perpendicolarmente al piano di moto dell'elettrone. Lo stesso risultato si ottiene dalla teoria classica dell'elettromagnetismo, che prevede massimo irraggiamento perpendicolarmente all'accelerazione.

La distribuzione spettrale si ottiene integrando sugli angoli l'equazione 9 [6]

$$\sigma(k) \frac{dk}{T_0} = \bar{\phi} \frac{8m}{3k} \log \frac{\{\sqrt{T_0} + \sqrt{(T_0 - k)}\}^2 dk}{k T_0}, \quad (11)$$

dove $T_0 = E_0 - m = p_0^2/2m$ è l'energia cinetica dell'elettrone incidente. $\bar{\phi}$ viene spesso assunta come unità per esprimere la sezione d'urto di Bremsstrahlung ed è data da $\bar{\phi} = Z^2 r_0^2/137$, dove r_0 è il raggio classico dell'elettrone. Dall'equazione 11 ricaviamo che la probabilità di emissione di un fotone con energia k decresce approssimativamente come $1/k$. Nel limite di corte lunghezze d'onda ($k = p_0^2/2m$), $\sigma(k)$ si annulla, mentre per $k \rightarrow 0$, $k\sigma(k)$ diverge logicamente. Come vedremo la divergenza infrarossa scompare considerando il contributo di screening degli elettroni atomici, mentre il comportamento per corte lunghezze d'onda deve essere corretto ricordando che l'approssimazione di Born in cui stiamo lavorando non è più rigorosamente valida nel limite di elettroni a

bassa energia. La soluzione esatta ottenuta nel caso non relativistico da Sommerfeld [1, 2] è comunque ben approssimata moltiplicando l'equazione 11 per il fattore di Elwert [7]

$$f(\xi, \xi_0) = \frac{\xi}{\xi_0} \frac{1 - e^{-2\pi\xi_0}}{1 - e^{-2\pi\xi}}. \quad (12)$$

Per piccoli valori di ξ_0 la distribuzione spettrale viene corretta principalmente nel limite di corte lunghezze d'onda. In particolare per $p \rightarrow 0$, vale a dire nel limite $k = p_0^2/2m$, il fattore di Elwert diverge e moltiplicato per l'espressione 11 dà un valore finito per la distribuzione spettrale.

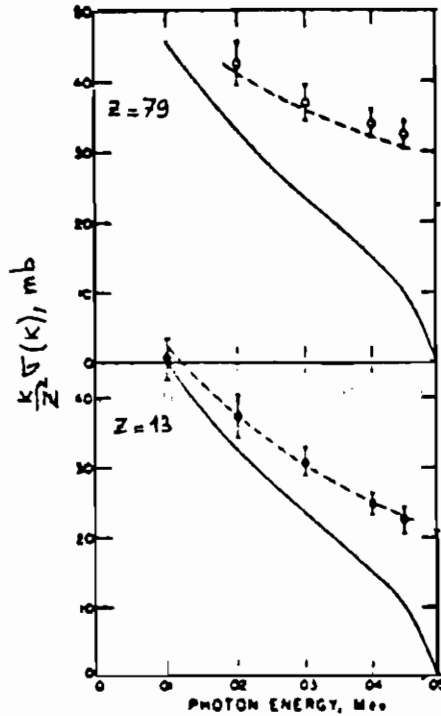


Fig. 3: distribuzione spettrale della radiazione di Bremsstrahlung per un elettrone con energia cinetica iniziale $T_0 = 0.05$ MeV. La linea continua è ottenuta dalla formula di Bethe-Heitler in approssimazione di Born, mentre la linea tratteggiata contiene le correzioni del fattore di Elwert [12]. I punti sperimentali [8] si riferiscono allo scattering dell'elettrone su bersagli di oro ($Z = 79$) e di alluminio ($Z = 13$).

In fig. 3 [9] i punti sperimentali per lo spettro di Bremsstrahlung nello scattering su oro ($Z = 79$) e su alluminio ($Z = 13$) di

elettroni con energia cinetica iniziale $T_0 = 0.05$ MeV sono confrontati con le curve teoriche ottenute dalla formula 11 (linea continua) e dalla stessa formula moltiplicata per il fattore di Elwert (linea tratteggiata).

2.3 Limite ultrarelativistico

Passando a considerare elettroni ad alta energia, il massimo della distribuzione angolare della radiazione emessa nella direzione in avanti diventa più pronunciato. In particolare, nel caso ultrarelativistico ($E, E_0 \gg m$), si avrà $p_0 \sim E_0$ e il denominatore $E_0 - p_0 \cos \theta_0$ nella formula di Bethe-Heitler 8 diventa molto piccolo per piccoli angoli θ_0 . Anche q ha un minimo per piccoli angoli θ_0 e θ . L'elettrone e il fotone sono entrambi proiettati nella direzione in avanti e si avrà massima emissione di radiazione in uno stretto cono di apertura $\theta_0 \sim m/E_0$ lungo la direzione di moto dell'elettrone [10]. La distribuzione angolare ha infatti un andamento del tipo [6]

$$\sigma(\theta_0)d\theta_0 = A \frac{\theta_0 d\theta_0}{[\theta_0^2 + (m/E_0)^2]^2} \left[\log \left(1 + \frac{\theta_0^2 m^2}{E_0^2} \right) + B \right]. \quad (13)$$

Per angoli $\theta_0 \sim m/E_0$ la radiazione emessa è anche parzialmente polarizzata [11, 12, 13], con una direzione privilegiata di polarizzazione perpendicolare al piano di emissione $\mathbf{p}_0 \mathbf{k}$. Infatti il rapporto dell'intensità di radiazione polarizzata perpendicolarmente e parallelamente a questo piano è data da

$$\frac{d\sigma_{\perp}}{d\sigma_{\parallel}} = \frac{E_0^2 + E^2}{k^2}, \quad (14)$$

da cui notiamo che l'effetto di polarizzazione diventa maggiore per $k \ll E_0$. Per angoli di emissione al di fuori del cono $\theta_0 \sim m/E_0$ il rapporto tra $d\sigma_{\perp}$ e $d\sigma_{\parallel}$ diventa prossimo a uno.

La distribuzione spettrale nel limite ultrarelativistico prende la forma

$$\sigma(k) \frac{dk}{E_0} = 2\bar{\phi} \frac{dk}{E_0} \frac{E}{k} \left[\frac{E_0^2 + E^2}{E_0 E} - \frac{2}{3} \right] \left[2 \log \frac{2E_0 E}{mk} - 1 \right]. \quad (15)$$

Per un dato valore del rapporto k/E_0 , la probabilità di emissione maggior cresce come il $\log(E_0/m)$, mentre nel limite infrarosso l'intensità $k\sigma(k)$ diverge logaritmicamente. Come nel caso non relativistico, la divergenza infrarossa sarà eliminata una volta introdotto l'effetto di screening degli elettroni atomici.

3 Effetto di screening degli elettroni atomici

Fino ad ora abbiamo considerato l'emissione di radiazione assumendo che l'elettrone interagisca soltanto con il campo coulombiano generato dalla carica nucleare. Questa approssimazione rimane valida solo se l'elettrone vede il nucleo ad una distanza in cui l'azione di screening della carica nucleare da parte degli elettroni atomici è trascurabile. Anche se una descrizione del processo di scattering in termini di parametro d'urto non è strettamente rigorosa, possiamo ricavare da principi generali della meccanica quantistica che la distanza effettiva alla quale avviene la diffusione dell'elettrone dal bersaglio è dell'ordine di $b \sim 1/q$. Se il parametro d'urto b è piccolo confrontato con il raggio atomico, il campo elettrico in cui l'elettrone irraggia sarà essenzialmente il campo coulombiano del nucleo V_N , mentre se b è maggiore del raggio atomico, l'azione di screening degli elettroni atomici giocherà un ruolo importante e al potenziale V_N dovremo aggiungere un contributo V_e generato dalla carica degli elettroni. Definendo il fattore di forma degli elettroni atomici

$$F_e(q) = \frac{4\pi}{Ze} \int \rho(r) \left(\frac{\sin qr}{qr} \right) r^2 dr, \quad (16)$$

dove $\rho(r)$ è la distribuzione di carica degli elettroni, gli effetti di screening sono introdotti semplicemente moltiplicando le formule ottenute per la sezione d'urto differenziale per il fattore $[1 - F_e(q)]^2$. L'accuratezza con la quale gli effetti di screening sono valutati dipenderà quindi sensibilmente dall'adeguatezza del modello atomico utilizzato per calcolare il fattore di forma $F_e(q)$. La maggior parte dei calcoli [6, 14] si basano sul modello atomico di Thomas-Fermi. Per un dato valore dell'energia dell'elettrone incidente e finale, gli

effetti di screening sono valutati in funzione del parametro

$$\gamma_S = \frac{100mk}{EE_0Z^{1/3}} \quad (17)$$

che è approssimativamente uguale al rapporto del raggio atomico calcolato dal modello di Thomas-Fermi. $r_{TF} \sim 137Z^{-1/3}\lambda_0$ (dove λ_0 è la lunghezza d'onda di Compton), con il valore massimo del parametro d'urto permesso dalla conservazione dell'energia e del momento in un dato processo radiativo, $b_{\max} = \lambda_0 EE_0/mk$. Valori di $\gamma_S \gg 1$ corrispondono alla situazione di screening trascurabile, in cui vale l'espressione 15 per la distribuzione spettrale, mentre nel caso di screening completo, $\gamma_S \approx 0$, si ha [14]

$$\sigma(k) \frac{dk}{E_0} = 2\bar{\phi} \frac{dk}{E_0} \frac{E}{k} \left[\left(\frac{E_0^2 + E^2}{E_0 E} - \frac{2}{3} \right) 2 \log(183Z^{-1/3}) + \frac{2}{9} \right]. \quad (18)$$

Per le situazioni intermedie si ha una transizione continua dalla formula 15 alla 18.

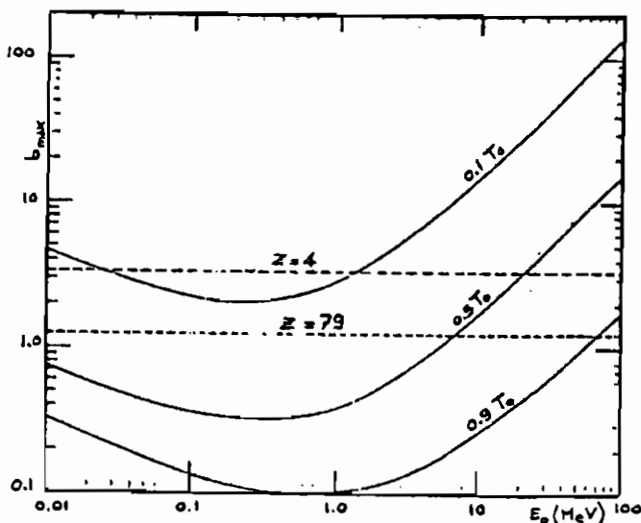


Fig. 4: dipendenza di b_{\max} , in unità di lunghezza d'onda Compton λ_0 , dall'energia cinetica dell'elettrone incidente per valori di $k = 0.1 T_0$, $0.5 T_0$, e $0.9 T_0$. Le linee tratteggiate danno i valori del raggio di Thomas-Fermi per il berillio $Z = 4$ e per l'oro $Z = 79$.

In fig. 4 è rappresentata la dipendenza di b_{\max} dall'energia cinetica dell'elettrone incidente, per valori assegnati di $k = 0.1 T_0$, $0.5 T_0$ e $0.9 T_0$. Le curve tratteggiate danno il valore di r_{TF} per il berillio e per l'oro. Notiamo come $b_{\max} > r_{TF}$ a basse e ad alte energie T_0 . In particolare ci possiamo aspettare che gli effetti di screening diventino importanti su una larga parte dello spettro per valori di T_0 sopra 5 MeV e al di sotto di 10 keV.

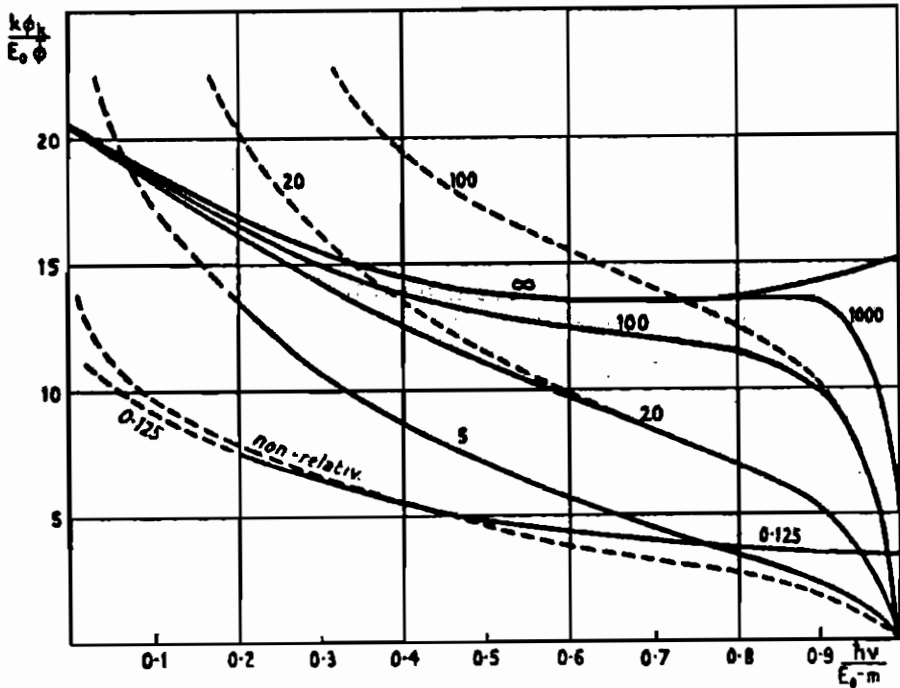


Fig. 5: intensità della radiazione di Bremsstrahlung in unità $E_0\bar{\phi}$, in funzione della frazione di energia del fotone emesso rispetto all'energia cinetica dell'elettrone incidente. I numeri che compaiono sulle diverse curve si riferiscono all'energia cinetica dell'elettrone incidente, in unità di m . Le curve tratteggiate sono calcolate in approssimazione di Born, trascurando gli effetti di screening e sono valide per ogni elemento. Le deviazioni indicate dalle linee continue danno, ad alte energie T_0 e per fotoni a basse frequenze, le correzioni degli effetti di screening calcolate per il piombo, mentre per energie T_0 non relativistiche rappresentano gli effetti del fattore di Elwert valutato per l'alluminio.

L'effetto delle correzioni di screening sono valutate quantitativamente in fig. 5 [14]. Essendo lo spettro di radiazione approssi-

mativamente proporzionale a E_0/k , riportiamo l'intensità $k d\sigma(k)$ in unità $E_0 \bar{\phi}$, in funzione di $k/(E_0 - m)$. Le curve si riferiscono a diversi valori dell'energia cinetica T_0 . In particolare, le linee tratteggiate sono ottenute in approssimazione di Born e sono valide per ogni elemento (il numero atomico Z è infatti contenuto solo in $\bar{\phi}$), mentre nelle curve continue sono incluse le correzioni di screening calcolate per il piombo ($Z = 82$), per elettroni ad alta energia, e per l'alluminio ($Z = 13$), nel caso non relativistico. Notiamo come l'effetto di screening elimina il comportamento divergente dello spettro nella regione a bassa energia, mentre ha poca influenza per emissione di fotoni ad alta energia. D'altra parte nel limite di $k = E_0 - m$, se il calcolo fosse eseguito abbandonando l'approssimazione di Born e utilizzando le corrette autofunzioni coulombiane, le curve continue tenderebbero ad un valore finito, come nel caso della curva ad energie non relativistiche ricavata dal calcolo esatto di Sommerfeld.

4 Bremsstrahlung nella collisione elettrone-elettrone

Oltre al contributo coerente degli elettroni atomici che agiscono come schermo al campo nucleare, dobbiamo considerare anche il contributo incoerente che proviene da Bremsstrahlung per scattering diretto tra l'elettrone incidente e gli elettroni atomici. Se E_0 è sufficientemente alta, possiamo trascurare l'energia di legame degli elettroni nell'atomo e considerare il contributo di Bremsstrahlung per scattering elettrone-elettrone liberi. In prima approssimazione ci aspettiamo che tale contributo sia descritto dalla formula di Bethe-Heitler specializzata ad un nucleo di carica unitaria. In realtà nel caso di Bremsstrahlung nel campo di un elettrone emergono alcune differenze importanti: mentre il rinculo del nucleo può essere trascurato, il rinculo dell'elettrone cambia la cinematica del problema e dà luogo ad effetti di ritardo. Inoltre, il principio di esclusione di Pauli gioca un ruolo importante, introducendo il contributo dei cosiddetti diagrammi di scambio, ottenuti dai diagrammi in fig. 6 con i due elettroni scambiati nello stato finale. Le espressioni per la sezione d'urto di Bremsstrahlung per scattering elettrone-elettrone diventano quindi più complicate rispetto

alla formula di Bethe-Heitler e solo i loro limiti a bassa e ad alta energia sono noti [15, 16], mentre per regioni di energia intermedia ci dobbiamo accontentare di formule interpolatrici.

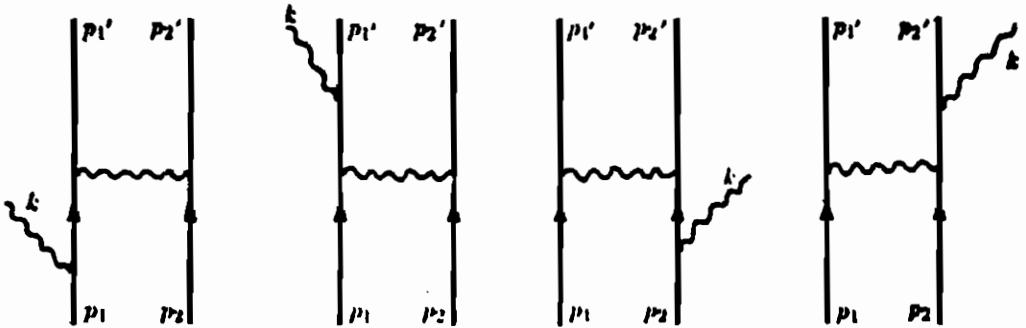


Fig. 6: grafici di Feynman per Bremsstrahlung nello scattering elettrone-elettrone.

Seguendo un approccio semiclassico e nei limiti di una scarsa accuratezza, la procedura di calcolo può essere notevolmente semplificata con il metodo dei quanti virtuali, sviluppato indipendentemente da Weizsäcker [17] e Williams [18]. L'idea alla base di questo metodo consiste nello sfruttare l'equivalenza tra i campi di una particella carica in moto relativistico e i campi di un impulso di radiazione. I campi perturbatrici dell'elettrone incidente sono infatti sostituiti da un impulso equivalente di radiazione analizzato in frequenze spettrali di quanti virtuali. Gli effetti della collisione dell'elettrone con gli elettroni atomici vengono quindi correlati con i corrispondenti effetti prodotti dai quanti virtuali e l'interazione elettrone-elettrone è studiata in termini dell'interazione fotone-elettrone.

4.1 Metodo dei quanti virtuali

Consideriamo un elettrone che si muove di moto rettilineo uniforme lungo l'asse z e che all'istante $t = 0$ passa per $z = 0$. Il campo di

radiazione della particella in moto visto da un secondo elettrone a riposo ad una distanza $b = \sqrt{x^2 + y^2}$ dalla linea di moto, sarà dato da [19]

$$\begin{aligned} E_x(t) &= e \frac{\gamma b}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ E_z(t) &= -e \frac{\gamma v t}{(b^2 + \gamma^2 v^2 t^2)^{3/2}} \\ B_y(t) &= \beta E_x, \end{aligned} \quad (19)$$

dove $\beta = v/c$ e $\gamma = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$. Quando la velocità della particella approssima la velocità della luce ($\gamma \gg 1$), il picco del campo elettrico trasversale $E_x(t = 0)$ diventa γ volte il suo valore non relativistico. L'intervallo di tempo in cui i campi sono apprezzabili dalla particella a riposo è $\Delta t \sim b/\gamma v$. Al crescere di γ quindi cresce l'altezza del picco, ma proporzionalmente diminuisce Δt e la particella a riposo vede un campo elettrico e un campo magnetico mutuamente ortogonali e approssimativamente della stessa intensità. I campi E_x e B_y diventano indistinguibili da un impulso di radiazione polarizzata che si propaga nella direzione dell'asse z . Il campo elettrico longitudinale varia rapidamente da un valore positivo a un valore negativo, con un integrale nel tempo uguale a zero. L'impulso medio della radiazione longitudinale potrà quindi essere completamente trascurato. In fig. 7 è rappresentato l'andamento del campo elettrico e magnetico trasversali e del campo elettrico longitudinale in funzione del tempo per valori di $\beta \approx 0$ e nel caso relativistico $\beta \approx 1$. Per ottenere il numero di fotoni equivalenti $p(\nu)d\nu$ con frequenza ν che passano per unità di area alla distanza b , costruiamo il vettore di Poynting \mathbf{S}

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_z dt = \frac{c}{4} \int_0^{+\infty} d\nu [E_x(\nu) \times B_y(\nu)]_z = \int_0^{+\infty} d\nu \hbar \nu p(\nu). \quad (20)$$

Inserendo nell'equazione 20 le trasformate di Fourier del campo elettrico e magnetico trasversali $E_x(\nu)$ e $B_y(\nu)$ troviamo

$$p(\nu)d\nu = \frac{e^2 \nu d\nu}{4c^3 \hbar \gamma^2} \{H_1^{(1)}(iz)\}^2, \quad z = \frac{b\nu}{c\gamma}, \quad (21)$$

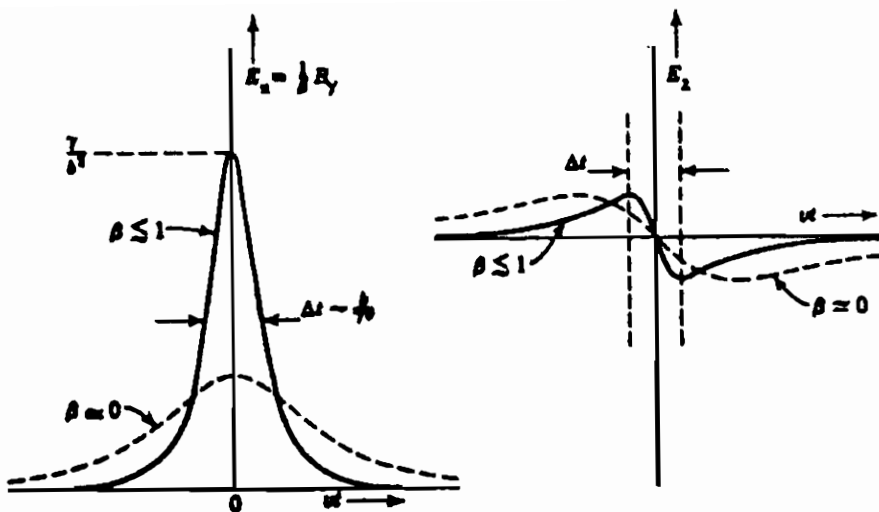


Fig. 7: campi di radiazione di una particella carica in moto rettilineo uniforme in funzione del tempo.

dove $H_1^{(1)}$ sono le funzioni di Hankel di prima specie. Non essendo interessati ad un particolare valore del parametro d'urto b , dobbiamo integrare l'equazione 21 sull'area perpendicolare all'asse z . L'integrazione non può comunque essere estesa per $b \rightarrow 0$. La limitazione è imposta dalla meccanica quantistica, che richiede di interpretare come pacchetti d'onda gli elettroni interagenti. Per poter descrivere il processo di scattering in termini di un parametro d'urto b , dobbiamo imporre che l'estensione Δx dei pacchetti d'onda sia minore di b . D'altra parte, dobbiamo anche richiedere che nell'intervallo di tempo in cui avviene la collisione tra le particelle, $\Delta t \sim b/c$, la distanza b non cambi apprezzabilmente, dobbiamo cioè imporre $bv_x/c \ll b$, che equivale a $v_x \ll c$. Con questa condizione, il principio di indeterminazione si traduce nella relazione $\Delta x > \hbar/mc$, che, insieme alla richiesta $b > \Delta x$, porta ad ammettere come valore minimo per il parametro d'urto

$$b_{\min} = \chi \frac{\hbar}{mc}, \quad (22)$$

dove χ è una costante che come vedremo è dell'ordine dell'unità. Integrando l'equazione 21 sull'area con $b > b_{\min}$, otteniamo per il

numero totale di fotoni equivalenti che investono l'elettrone a riposo

$$\begin{aligned} q(k) dk &= 2\pi \int_{b_{\min}}^{\infty} p(\nu) d\nu b db. \\ &= \frac{1}{2} \pi \frac{e^2}{\hbar c} \frac{dk}{k} P(z_m). \end{aligned} \quad (23)$$

$$P(z_m) = -\frac{1}{2} z_m^2 (H_1^{(1)2} + H_0^{(1)2}) - i z_m H_0^{(1)} H_1^{(1)}. \quad z_m = \frac{b_{\min} k}{\hbar c \gamma}, \quad (24)$$

dove l'argomento delle funzioni di Hankel è iz_m . Per $k/\gamma mc^2 = k/E_0 \ll 1$, $z_m \ll 1$ e l'espressione 23 si riduce a

$$q(k) dk = \frac{2}{\pi} \frac{e^2}{\hbar c} \frac{dk}{k} \left[\log \frac{E_0}{\lambda k} - 0.38 \right]. \quad (25)$$

Supponiamo che un fotone virtuale \mathbf{k} venga diffuso dall'elettrone a riposo in un fotone con momento \mathbf{k}' , con \mathbf{k} rimosso dallo spettro dei fotoni virtuali della particella incidente e con la particella a riposo che subisce un rinculo $\mathbf{k} - \mathbf{k}'$. Tale processo di scattering Compton del fotone virtuale corrisponde alla Bremsstrahlung di un fotone \mathbf{k}' emesso durante la collisione dall'elettrone incidente, che perde un'energia pari a k . La sezione d'urto di Bremsstrahlung può essere quindi calcolata moltiplicando la sezione d'urto di scattering Compton $\sigma_c(k, k') dk'$ del fotone virtuale \mathbf{k} per il numero di fotoni equivalenti al campo di radiazione dell'elettrone incidente

$$d\sigma_I(k') dk' = dk' \int_{k'} q(k) \sigma_c(k, k') dk. \quad (26)$$

Il limite superiore di integrazione è $mc^2 k' / (mc^2 - 2k')$ per $k' < mc^2/2$ ed E_0 per $k' > mc^2/2$. Limitandoci al caso più interessante con $k' \gg mc^2$, troviamo

$$\sigma(k') dk' = \frac{8r_0^2 mc^2}{3 \cdot 137} \frac{dk'}{k'^2} \left\{ \log \frac{E_0}{\lambda k'} - 1.2 - O\left(\frac{k'}{E_0}\right) \right\}. \quad (27)$$

Notiamo come la sezione d'urto decresce rapidamente con k' , dando un contributo allo spettro di radiazione di Bremsstrahlung che è dell'ordine di mc^2/k' rispetto al contributo 15 della carica nucleare. Nel calcolare la sezione d'urto abbiamo implicitamente assunto che i contributi delle varie componenti in frequenza della radiazione equivalente si sommino incoerentemente. Questa approssimazione è valida solo se gli effetti della perturbazione del campo di radiazione sulla particella a riposo sono piccoli. Un'altra richiesta che limita l'applicabilità del metodo dei quanti virtuali è che il moto dell'elettrone incidente possa essere trattato classicamente come un moto rettilineo uniforme. Queste condizioni si traducono nelle richieste

$$\frac{E_0}{mc^2} \equiv \gamma \gg 1, \quad k \ll E_0. \quad (28)$$

La seconda relazione in particolare appare piuttosto restrittiva, considerando che le situazioni più interessanti si hanno proprio per perdite di energia $k \approx E_0$.

Lo spettro di Bremsstrahlung nella collisione elettrone-elettrone riceve un secondo contributo che deriva dalla situazione simmetrica in cui l'elettrone a riposo e l'elettrone incidente si scambiano di ruolo. Supponiamo che la particella a riposo riceva una energia di rinculo $(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2/2mc^2 \ll mc^2$ e consideriamo il processo nell'opposto sistema di riferimento di Lorentz, in cui la particella a riposo si muove di moto relativistico e la particella incidente è ferma. Poiché la particella a riposo subisce un rinculo trascurabile, il suo moto nel sistema di riferimento solidale con la particella incidente può essere considerato rettilineo uniforme. Seguendo lo stesso procedimento del caso precedente, possiamo calcolare lo spettro di fotoni equivalenti \mathbf{k}^* che investono l'elettrone incidente nel sistema di riferimento ad esso solidale e calcolare la sezione d'urto di scattering Compton del fotone \mathbf{k}^* in \mathbf{k}'^* . Sommando il contributo delle diverse componenti spettrali del campo di fotoni virtuali, troviamo un secondo contributo allo spettro di Bremsstrahlung

$$d\sigma_{II}(k'^*)dk'^* = dk'^* \int_{k'^*} q(k^*) \sigma_c(k^*, k'^*) dk^*. \quad (29)$$

Tornando al sistema di riferimento originale con le trasformazioni

di Lorentz che collegano k^* e k'^* a k e k' rispettivamente, troviamo

$$\sigma_{II}(k')dk' = \frac{4r_0^2 dk' E}{137 k' E_0} \times \left\{ \left[\log \frac{2EE_0}{\chi mc^2 k'} - 1.4 \right] \left[\frac{E_0^2 + E^2}{EE_0} - \frac{2}{3} \right] - \frac{1}{9} \right\}. \quad (30)$$

Anche se l'energia k^* del fotone diffuso deve ancora soddisfare le condizioni 28, nel tornare al sistema di riferimento originale troviamo che il fotone diffuso k' non è vincolato dalla richiesta $k' \ll E_0$.

Per $k' \gg mc^2$ il contributo σ_{II} è maggiore per un fattore k'/mc^2 del contributo σ_I . Nel caso in cui una delle due particelle interagenti viene sostituito con un nucleo di massa $M \gg m$, il contributo σ_I sarà sicuramente trascurabile, mentre notiamo come $\sigma_{II}(k')$, moltiplicata per Z^2 , viene praticamente a coincidere con l'espressione 15 per la Bremsstrahlung di un elettrone nel campo di un nucleo. Per avere corrispondenza tra le due formule è sufficiente porre $\log 1/\chi = 0.9$, vale a dire $\chi = 0.4$. Anche se abbiamo ricavato le stesse formule per la Bremsstrahlung nella collisione elettrone-elettrone e nella collisione elettrone-nucleo, ci saranno alcune differenze numeriche non trascurabili. La più importante riguarda la scelta della costante χ , che abbiamo introdotto nel considerare le limitazioni 22 imposte sul parametro d'urto dall'estensione Δx del pacchetto d'onde associato alle particelle interagenti. Per una particella pesante come il nucleo Δx sarà trascurabile e solo l'elettrone dà luogo alla limitazione sul parametro d'urto, mentre nel caso della collisione tra due elettroni, dobbiamo aspettarci un valore maggiore per χ . Con buona approssimazione potremo considerare $\chi \sim 2 \cdot 0.4$.

In fig. 8a è rappresentato con la curva continua lo spettro di Bremsstrahlung nella collisione dell'elettrone con il berillio ($Z = 4$), distinguendo con la linea tratteggiata il contributo di Bremsstrahlung elettrone-nucleo. La linea punteggiata è ottenuta moltiplicando la linea continua per $(Z + 1)/Z$, vale a dire valutando il contributo di Bremsstrahlung degli elettroni atomici con la formula di Bethe-Heitler presa per $Z = 1$. Per radiatori a basso numero atomico come il berillio, vediamo che tale approssimazione non è sufficientemente valida. In fig. 8b sono riportati rispettivamente con la

linea continua e con la linea tratteggiata lo spettro di Bremsstrahlung totale e il contributo dalla sola interazione elettrone-nucleo, calcolati per $Z = 47$. Notiamo come all'aumentare del numero atomico gli effetti del contributo dallo scattering elettrone-elettrone diminuiscono sensibilmente, diventando praticamente indistinguibili dallo spettro totale per nuclei a $Z > 47$.

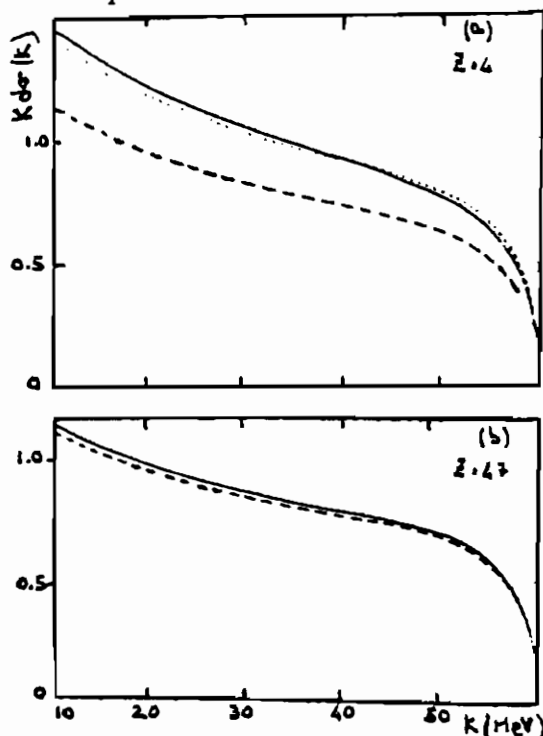


Fig. 8: (a) la linea continua rappresenta lo spettro di Bremsstrahlung per scattering di un elettrone con energia cinetica $T_0 = 60$ MeV su un bersaglio di berillio ($Z = 4$). La curva tratteggiata dà il contributo che proviene dallo scattering elettrone-nucleo, mentre la linea punteggiata è ottenuta moltiplicando il contributo elettrone-nucleo per il fattore $(Z + 1)/Z$. (b) la curva continua mostra lo spettro di Bremsstrahlung per $T_0 = 60$ MeV e $Z = 47$, mentre la curva tratteggiata corrisponde al contributo dello scattering elettrone-nucleo. La figura è tratta da [20].

5 Conclusioni

La formula di Bethe-Heitler rappresenta un punto di riferimento fondamentale per comprendere le principali caratteristiche dello

spettro di Bremsstrahlung nelle reazioni nucleari. Abbiamo visto che i limiti di validità della formula di Bethe-Heitler sono principalmente imposti dall'approssimazione di Born, che non è rigorosa per nuclei pesanti e a basse energie. Nel limite di basse energie, nella sezione 2.2 abbiamo dato indicazioni di quali correzioni dobbiamo introdurre. D'altra parte, per alti Z possiamo aspettarci che le condizioni 4 imposte dall'approssimazione di Born non siano soddisfatte anche ad alte energie. In realtà, abbandonando l'approssimazione al primo ordine, si hanno delle correzioni importanti solo a grandi angoli di emissione, mentre per $\theta_0 \sim m/E_0$, dove si ha la massima intensità di radiazione, le correzioni sono trascurabili. Infatti, nel regime ultrarelativistico, il calcolo con autofunzioni coulombiane [21, 22] introduce nella formula di Bethe-Heitler un termine additivo importante solo per alti valori del momento trasferito q . Il fatto di aver trascurato il rinculo del nucleo, assunzione implicita nell'approssimazione di campo esterno, non è importante [23]: la correzione è data infatti da un termine additivo che è dell'ordine di v_R/c , dove v_R indica la velocità di rinculo del nucleo. Infine abbiamo introdotto nella formula di Bethe-Heitler il contributo degli elettroni atomici, che, oltre a creare un'azione di screening sulla carica nucleare, possono intervenire direttamente nella collisione con l'elettrone incidente. L'effetto di screening è facilmente valutabile con un modello atomico adeguato per descrivere il fattore di forma di carica degli elettroni, mentre si è visto come lo scattering elettrone-elettrone dà approssimativamente un contributo dell'ordine di $1/Z$ rispetto al contributo nucleare, del tutto trascurabile per alti numeri atomici.

Bibliografia

- [1] A. Sommerfeld, *Atombau und Spectrallinien*, Vol. II, Braunschweig (1939).
- [2] A. Sommerfeld, *Ann. Physik* **11** (1931) 257
- [3] H. Olsen, L. C. Maximon, Wergeland. *Phys Rev.* **106** (1957) 27.

- [4] H. Olsen, L. C. Maximon, Phys Rev. **114** (1959) 887.
- [5] H. A. Bethe, W. Heitler, Proc. Roy. Soc. **A146** (1934) 83.
- [6] W. Heitler, *The Quantum Theory of Radiation* (Oxford University Press, London, 1954).
- [7] G. Elwert, Ann. Physik **34** (1939) 178.
- [8] J. W. Motz, R. C. Placious, Phys. Rev. **109** (1958) 235.
- [9] H. W. Koch, J. W. Motz, Revs. Mod. Phys. **31** (1959) 920.
- [10] P. V. C. Hough, Phys. Rev. **74** (1948) 80.
- [11] M. May, G. C. Wick, Phys. Rev. **81** (1951) 628.
- [12] M. May, Phys. Rev. **84** (1951) 265.
- [13] R. L. Gluckstern, M. H. Hull, G. Breit, Phys. Rev, **90** (1953) 1026.
- [14] H. A. Bethe, J. Ashkin, in E. Segrè *Experimental Nuclear Physics*, Vol.I, (John Wiley and Sons, Inc., New York, 1953.)
- [15] J. Joseph, F. Rohrlich, Revs. Mod. Phys. **30** (1958) 354.
- [16] Yung-Su Tsai, Revs. Modern Phys. **46** (1974) 815.
- [17] C. F. v. Weizsäcker, Z. Phys. **88** (1934) 612.
- [18] E. J. Williams, Kgl. Dansk. Vid. Selsk. **13** (1935), No.4
- [19] J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*. (Wiley, New York, 1975).
- [20] J. L. Matthews, R. O. Owens, Nucl. Instr. and Methods **111** (1973) 157.
- [21] H. A. Bethe, L. C. Maximon, Phys. Rev. **93** (1954) 768.
- [22] H. Davies, H. A. Bethe, Phys. Rev. **87** (1952) 156.
- [23] S. D. Drell, Phys. Rev. **87** (1952) 753.

E. Pavarini

**Dipartimento di Fisica "Alessandro Volta"
Università di Pavia
e
Istituto Nazionale per la Fisica della Materia**

**Tecniche di sviluppo in $\frac{1}{N}$ per sistemi
elettronici fortemente correlati**

Seminario tenuto il 22 Dicembre 1995

1 Introduzione

In questo articolo descriverò un metodo che consente di studiare, (dal punto di vista teorico) le proprietà statiche e dinamiche a temperatura finita delle leghe magnetiche diluite e, in parte, dei corrispondenti sistemi concentrati.

Le leghe magnetiche diluite sono sistemi che si ottengono dissolvendo piccole (0.1-0.5%) concentrazioni di ioni paramagnetici (come metalli di transizione o terre rare) in metalli non magnetici. L'interesse per questi sistemi risale alla prima era della fisica dei metalli, gli anni '30, quando alcune misure di resistività realizzate su un campione di oro contenente impurezze magnetiche di metalli di transizione misero in evidenza, per la prima volta, che le leghe magnetiche diluite sono metalli piuttosto particolari. La resistività di quel campione, invece di diminuire monotonicamente con la temperatura per soppressione dello *scattering* fononico (e quindi saturare al valore residuo), come ci si aspettava per un metallo, presentava un minimo (Fig.1) ad una temperatura dell'ordine di $10 K$, debolmente dipendente dalla concentrazione di impurezze magnetiche[1]. Un tale comportamento è stato in seguito osservato in altre leghe magnetiche diluite, come ad esempio $CuFe$, $LaCe$, $CuMn$ e $AuYb$.

Negli anni '60 le cause microscopiche di questo fenomeno furono in parte chiarite, grazie ai risultati ottenuti dal teorico giapponese J. Kondo[2]. Egli mostrò che una interazione di scambio antiferromagnetica (AFM) tra gli elettroni di conduzione e le impurezze magnetiche può giustificare il comportamento anomalo della resistività. La forma più semplice di questa interazione è data nel modello $s-d$ [3] o modello di Kondo[2]

$$H_K = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}\sigma} - J \vec{S} \cdot \vec{s}(\vec{r} = 0), \quad (1)$$

dove $\epsilon_{\mathbf{k}}$ è l'energia degli elettroni di conduzione con vettore d'onda \mathbf{k} , $J < 0$ è la costante di scambio AFM, \vec{S} è lo spin localizzato sul sito dell'impurezza magnetica ($S = 1/2$) e $\vec{s}(\vec{r} = 0)$ è la densità di spin degli elettroni di conduzione sul sito dell'impurezza stessa.

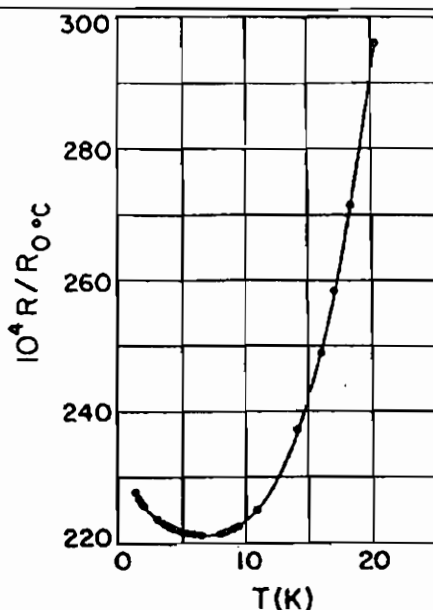


Fig. 1: Minimo della resistività di un filo d'oro contenente impurezze di metalli di transizione, normalizzata al valore della stessa a $T = 0^\circ\text{C}$ [1].

Kondo studiò la resistività $\rho(T)$ in teoria delle perturbazioni al terzo ordine in J , e mostrò che l'interazione di scambio AFM porta un contributo a $\rho(T)$, $\rho_J(T) \sim \log(k_B T/D)$, dove D è la semilarghezza della banda, k_B è la costante di Boltzmann e T la temperatura in gradi Kelvin. Questo termine cresce riducendo la temperatura e, quando lo si aggiunge al contributo fononico e alla resistività residua, è sufficiente per giustificare l'esistenza di un minimo nella resistività [2]. In onore di Kondo, è stato quindi attribuito al fenomeno il nome di *effetto Kondo*. Per estensione, questo nome viene oggi usato per indicare, in generale, tutte le proprietà anomale (magnetiche e di trasporto) che si osservano in quelle leghe magnetiche diluite che presentano un minimo nella resistività. Tra queste proprietà, che vedremo più in dettaglio in seguito, di particolare rilievo è l'inattesa scomparsa (a basse temperature) del momento magnetico localizzato (e la conseguente formazione di uno stato fondamentale non magnetico a molti corpi).

La teoria di Kondo entra in crisi quando $T \rightarrow 0$, quando cioè $\log(k_B T/D)$ diverge e la teoria delle perturbazioni non è più applicabile. I tentativi (fatti tra la fine degli anni '60 e gli inizi degli anni '70) di estendere la teoria di Kondo per mezzo delle tecniche perturbative tipiche dei problemi a molti corpi (risommazioni di serie parziali di diagrammi) non hanno cambiato qualitativamente questo risultato¹: la teoria delle perturbazioni, sufficiente per spiegare il comportamento dei sistemi Kondo diluiti ad alte temperature, non permette però di descriverne lo stato fondamentale. Per spiegare il comportamento dei sistemi Kondo diluiti a basse temperature occorre dunque andare oltre la teoria delle perturbazioni.

Un contributo fondamentale alla comprensione del problema Kondo fu portato da due tecniche "esatte"², introdotte tra la fine degli anni '70 e l'inizio degli anni '80: il gruppo di rinormalizzazione[4] e il Bethe-Yang ansatz[5]. Queste tecniche consentono di calcolare tutte le proprietà di equilibrio del modello di Kondo. Il gruppo di rinormalizzazione ha permesso di dimostrare inequivocabilmente che, in presenza di una costante di scambio AFM J arbitrariamente piccola, lo stato fondamentale del modello di Kondo è un singoletto non magnetico. A temperatura ed energia qualsiasi il sistema può essere descritto da una costante di scambio effettiva, J_{eff} . Per $T \sim 0 K$, J_{eff} diverge e il sistema si comporta come se lo spin dell'impurezza fosse legato rigidamente in un singoletto agli spin degli elettroni di conduzione. Ad alte temperature invece, J_{eff} tende al valore nudo, J , e il sistema può essere trattato bene anche in teoria delle perturbazioni. Il calcolo della magnetizzazione, della suscettività e del calore specifico in funzione della temperatura hanno dato inoltre risultati in buon accordo con gli esperimenti. Questi risultati sono stati confermati con il Bethe ansatz: per quelle proprietà che sono state studiate sia attraverso il

¹Le risommazioni di serie parziali inoltre portano spesso a risultati incerti e poco controllabili.

²Queste tecniche sono chiamate esatte in quanto forniscono la soluzione esatta del modello di Kondo o di altri modelli che si ritiene debbano descrivere questi sistemi, almeno qualitativamente.

Bethe ansatz che il gruppo di rinormalizzazione (come la suscettività statica e il calore specifico elettronico), è stato visto, infatti, che l'accordo tra i due metodi è eccellente.

Pur riconoscendo la potenza di questi metodi esatti, occorre notare la loro inabilità a descrivere le proprietà dinamiche (come la suscettività magnetica dinamica) e di trasporto (come il potere termoelettrico). Paradossalmente, le tecniche esatte non permettono di calcolare nemmeno la resistività³, prima proprietà per la quale è stata osservata una anomalia Kondo. A ciò si aggiunge il fatto che queste tecniche sono applicabili solo nell'ipotesi che le bande di energia abbiano una dispersione lineare attorno al livello di Fermi: questo presupposto non è rilevante per una descrizione qualitativa, ma impedisce ogni descrizione quantitativa.

In assenza di metodi esatti, per trattare questi ultimi aspetti del problema si è andati alla ricerca di metodi approssimati. Tra questi ultimi riveste senz'altro una posizione di rilievo il metodo delle espansioni in $1/N$. L'idea fu suggerita nei primi anni '80 da Anderson[7] e Ramakrishnan[8]. Essi notarono che numerosi modelli interessanti in meccanica quantistica, teoria dei campi e meccanica statistica coinvolgono un numero (intero) N gradi di libertà (N =colori, componenti di spin, ecc.) e che, per alcuni di questi problemi, erano stati sviluppati negli anni '70 approcci perturbativi in ordini di $1/N$ [9]. Nel problema Kondo, analogamente, sono coinvolti N gradi di libertà: quelli associati alla degenerazione N dei livelli localizzati ($4f$ o $3d$) delle impurezze che può, come vedremo, essere anche piuttosto elevata (ex. $N = 6$ o $N = 8$). Anche in questo caso quindi $1/N$ rappresentava un parametro ragionevole di espansione.

Oggi esiste più di un metodo che può essere indicato con il nome di "sviluppo in $1/N$ " per le leghe magnetiche diluite: una rassegna completa si può trovare in Ref.[10]. In questo articolo discuterò soltanto le espansioni autoconsistenti, quelle applicabili nel più vasto intervallo di temperatura[10, 11]. Vedremo che, per le proprietà

³La resistività a $T = 0$ è stata in realtà calcolata anche per mezzo del Bethe ansatz: l'approccio utilizzato non può però essere esteso a temperatura finita[6].

statiche, le espansioni autoconsistenti, danno risultati in ottimo accordo con quelli ottenuti con le tecniche esatte. In aggiunta, per mezzo delle espansioni autoconsistenti si possono calcolare le proprietà dinamiche, che ai metodi esatti sono precluse. Infine, l'applicabilità delle tecniche di sviluppo in $1/N$ non dipende dalla scelta di forme particolari per la legge di dispersione delle bande: queste tecniche possono dunque essere combinate con calcoli da principi primi[12, 13]. Le tecniche di sviluppo in $1/N$ forniscono quindi la più completa descrizione del problema Kondo nelle leghe magnetiche diluite oggi disponibile.

Tra le speranze dei pionieri delle tecniche di sviluppo in $1/N$ applicate al problema dei sistemi Kondo diluiti, c'erano, infine, quelle di poterle estendere allo studio dei sistemi Kondo concentrati: per questi ultimi, infatti, non si conoscevano negli anni '80, e non si conoscono tuttora, metodi esatti. Oggi esistono parziali estensioni dei metodi di espansione in $1/N$ ai sistemi densi, e consentono, ad esempio, il calcolo delle proprietà di trasporto[14]. È importante osservare però che le proprietà poco influenzate dalla formazione di bande f (come le proprietà termodinamiche) si possono riprodurre bene con il metodo di sviluppo in $1/N$ per le leghe diluite, nonostante il sistema sia denso. Inoltre, in numerosi composti di Ce ed Yb gli elettroni f non formano affatto bande e si possono quindi descrivere con sufficiente accuratezza nell'approssimazione di singola impurezza. Gli sviluppi in $1/N$ descritti in questo articolo, quindi, sono utili per studiare una classe di composti ben più vasta delle leghe magnetiche diluite.

2 Il problema Kondo

I sistemi Kondo diluiti sono un numeroso gruppo di leghe magnetiche diluite che include, ad esempio, tutte le leghe contenenti impurezze di Yb o di Ce . Questi sistemi, che ad alta temperatura presentano momenti magnetici localizzati, hanno invece uno stato fondamentale non magnetico, l'instaurarsi del quale è accompagnato da una serie di anomalie nei fenomeni magnetici, ottici, e di tra-

sporto: tra queste anomalie il minimo della resistività non è che la prima ad essere stata scoperta e, forse, la più nota. Una rassegna completa della fenomenologia dei sistemi Kondo diluiti si può trovare in Ref.[15]. In questa sezione delinearò gli aspetti principali del problema Kondo.

Gli ioni paramagnetici isolati hanno un momento magnetico finito a causa del parziale riempimento delle *shells* elettroniche esterne (le $4f$ per i lantanidi e le $3d$ per i metalli di transizione). Le proprietà delle leghe magnetiche diluite sono legate al comportamento del momento magnetico degli ioni, una volta che questi ultimi sono disciolti nel metallo ospite. In linea di principio, infatti, questo momento può scomparire, essere parzialmente ridotto, o permanere indisturbato. La più chiara prova sperimentale dell'esistenza di un momento magnetico localizzato sul sito occupato dall'impurezza paramagnetica viene dalla suscettività magnetica dello ione, χ_{ione} . Per uno ione magnetico isolato, χ_{ione} deve seguire la legge di Curie. Nel caso di uno ione con spin effettivo S quindi:

$$\chi_{ione} = \frac{C}{T}, \quad C = \frac{g_{eff}^2 \mu_B^2 S(S+1)}{3k_B}, \quad (2)$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr. Nelle leghe magnetiche diluite, analogamente, una $\chi \propto 1/T$ testimonia l'esistenza di momenti magnetici localizzati sui siti delle impurezze. La suscettività magnetica di un metallo non magnetico puro infatti è indipendente dalla temperatura: è quella degli elettroni di conduzione, χ_c , e segue la legge di Pauli $\chi_c = \mu_B g(\epsilon_F)$, dove $g(\epsilon_F)$ è la densità degli stati elettronici al livello di Fermi, qui indicato con ϵ_F .

La suscettività ionica dei sistemi Kondo diluiti segue la legge di Curie in un vasto intervallo di temperatura, per poi scostarsi da tale legge quando la temperatura si abbassa al di sotto di una soglia caratteristica, T_0 , e diventare indipendente da T quando $T \ll T_0$. Lo stato fondamentale di tali sistemi è non magnetico. T_0 è in genere dell'ordine di $1 - 10 K$ e dipende dal campione.

T_0 definisce un confine tra due regimi distinti. Per $T \gg T_0$ si hanno momenti magnetici localizzati sui siti delle impurezze para-

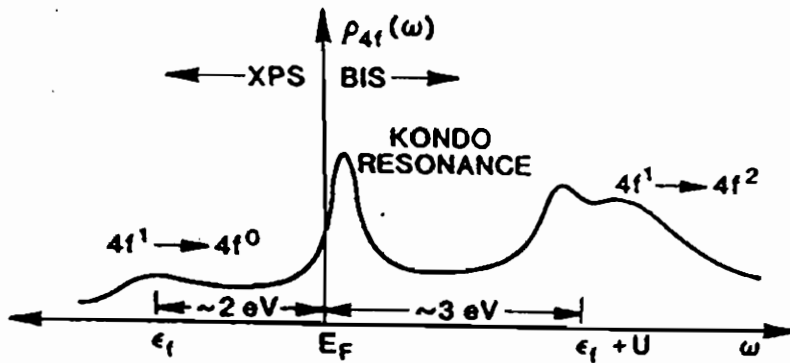


Fig. 2: La densità degli stati f , $\rho_f(\omega)$ per una impurezza di Ce in un metallo[16] a bassa temperatura. Per $\omega < E_F$ $\rho_f(\omega)$ si ottiene da spettri XPS (X-ray Photoemission Spectrum) mentre per $\omega > E_F$ da spettri BIS (Bremsstrahlung Isochromat Spectrum).

magnetiche e si possono calcolare le proprietà di trasporto in teoria delle perturbazioni, come fece Kondo per la resistività[2]. Per $T \ll T_0$ i momenti magnetici localizzati scompaiono e le proprietà del sistema sono quelle di un liquido di Fermi. Questo significa, in particolare, che la suscettività è indipendente dalla temperatura ($\chi(T) = \chi_0$) e che il calore specifico elettronico è lineare con la temperatura ($C_v = \gamma T$). Osserviamo che le proprietà appena descritte sono anche quelle di un gas di fermioni liberi e non interagenti, o quelle degli elettroni di conduzione in un metallo non magnetico: tuttavia i valori di γ e χ_0 misurati in sistemi Kondo diluiti sono molto superiori sia ai valori previsti per un gas di Fermi che ai valori misurati in metalli non magnetici. Dato che, in un gas di Fermi, γ e la suscettività sono proporzionali alla densità degli stati al livello di Fermi ($\gamma = \pi^2 k_B^2 g(\epsilon_F)/3$, $\chi/\gamma = 3\mu_B/(\pi^2 k_B^2)$) e questa, a sua volta, è proporzionale alla massa degli elettroni, va-

lori di γ e χ molto maggiori alla norma vengono interpretati come l'effetto di una rinormalizzazione della massa elettronica: il sistema è un gas di Fermi formato da elettroni "pesanti". Anche il potere termoelettrico, la resistività e la conduttività termica seguono il comportamento atteso per un tale liquido di Fermi.

Fino a questo punto ho indicato con T_0 la scala caratteristica senza specificarne la definizione. Nei calcoli di gruppo di rinormalizzazione la scala caratteristica T_0 è indicata come T_K (temperatura di Kondo) ed è definita dall'espansione perturbativa di μ_{eff}^2 (μ_{eff} è il momento magnetico effettivo sul sito dell'impurezza) ad alte temperature in potenze di $\ln^{-1}(T/T_K)$: T_K è scelta in modo che il coefficiente del termine proporzionale a $\ln^{-2}(T/T_K)$ sia nullo. È possibile introdurre una scala caratteristica di un sistema Kondo anche da altre proprietà, come ad esempio dalla suscettività ionica a temperatura $T = 0 K$: $T_i \equiv \chi_{ione}^{-1}(T = 0)^4$. Un metodo ancora diverso per caratterizzare un sistema Kondo viene dagli spettri di fotoemissione o di fotoemissione inversa. Nei sistemi diluiti del Ce infatti, la densità degli stati f , $\rho_f(\omega)$ (Fig.2), che si calcola dagli spettri BIS (*Bremmstrahlung Isochromat spectrum*), mostra, a bassa temperatura, una stretta risonanza vicino al livello di Fermi, detta risonanza Kondo o di Abrikosov-Suhl, del tutto assente in sistemi che non presentano effetto Kondo. La posizione e la larghezza della risonanza (che scompare ad alte temperature) dipende in modo non perturbativo dalla costante di accoppiamento J . Nei calcoli NCA, T_0 viene appunto definita come la posizione di tale risonanza a $T = 0$.

3 Modello per le espansioni in $1/N$

Gli studi sulle leghe magnetiche diluite sono legati a due modelli, il modello di Kondo[2, 3] già visto e il modello di Anderson[17].

Il modello di Anderson (1961) è più generale del modello di Kon-

⁴Wilson ha mostrato che $T_K = \mathcal{W} T_i$, dove \mathcal{W} è un numero universale che per il modello di Kondo vale 0.4128 ± 0.002 [4].

do. Nel caso più semplice da considerare, quello in cui l'impurezza magnetica è uno ione senza gradi di libertà orbitali, il modello di Anderson, per uno ione di terra rara, è dato da:

$$H_A = \sum_{\mathbf{k}\sigma} \epsilon_{\mathbf{k}} \hat{n}_{\mathbf{k}\sigma} + \sum_{\sigma} \epsilon_f \hat{n}_{f\sigma} + U \hat{n}_{f\uparrow} \hat{n}_{f\downarrow} + \sum_{\mathbf{k}\sigma} V_{\mathbf{k}} [\hat{c}_{\mathbf{k}\sigma}^{\dagger} f_{\sigma} + h.c.]. \quad (3)$$

Qui ϵ_f è l'energia corrispondente all'eccitazione dalla configurazione $4f^1$ alla configurazione $4f^0$, ed è circa $2 eV$ sotto al livello di Fermi. U è la repulsione Coulombiana *on-site* alla quale sono sottoposti gli elettroni $4f$, assai localizzati sul sito dell'impurezza magnetica. U è forte ($U \sim 5 - 6 eV$ per *Ce*) e a causa di ciò spesso ci si riferisce a questi sistemi con il nome di *sistemi elettronici fortemente correlati*. $V_{\mathbf{k}}$ è l'ibridazione elettronica tra i livelli di conduzione e i livelli appartenenti alle shells esterne degli ioni paramagnetici. Una misura dell'intensità di ibridazione è data da $\Gamma(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \pi g(\epsilon_{\mathbf{k}}) V_{\mathbf{k}}^2$, la larghezza di ibridazione ad energia $\epsilon_{\mathbf{k}}$. Se la banda è piatta e l'ibridazione è costante, $\Gamma(\epsilon_{\mathbf{k}}) = \Gamma$. Nei composti del *Ce* $\Gamma \sim 0.1 eV$. Nel regime Kondo ($U \gg \Gamma$, $-\epsilon_f \gg \Gamma$) il modello di Anderson è equivalente al modello di Kondo con $J = U|V_{\mathbf{k}}|^2/(U + \epsilon_f)(\epsilon_f) < 0$ [18].

Il modello di Anderson (3) descrive meglio il caso delle leghe con impurezze magnetiche di metalli di transizione piuttosto che non quello delle leghe con impurezze di terre rare. Le shell $3d$ dei metalli di transizione infatti sono fortemente modificate dal circondario cristallino. Il campo cristallino (CF), ossia il campo elettrostatico dovuto agli ioni circostanti nel cristallo, è molto più intenso dell'effetto spin-orbita e si ha il *quenching* del momento angolare orbitale: allo ione restano i soli gradi di libertà di spin ($N = 2$). In questo articolo tuttavia intendo presentare il metodo degli sviluppi in $1/N$ applicato al caso in cui $N > 2$, come ad esempio quando le impurezze sono ioni di terre rare (*Ce* o *Yb*). Per questi ioni l'accoppiamento spin-orbita è molto più forte del campo cristallino. In prima approssimazione, gli effetti di campo cristallino sono trascurabili e il momento magnetico angolare totale J è un buon numero quantico. Lo stato fondamentale dello ione è stabilito dalle regole di Hund.

Per lo ione Ce^{3+} ad esempio, la configurazione elettronica stabile è $[La]4f^1$ ($l = 3$, $N = 2(2l + 1) = 14$). In base alle regole di Hund il livello $4f^1$ si apre nello stato $J = 5/2$ ($N = 6$), il multipletto spin-orbita fondamentale, e nello stato $J = 7/2$ ($N = 8$), il multipletto spin-orbita eccitato. Considerando solo il multipletto spin-orbita fondamentale, il modello corretto per descrivere leghe con impurezze di Cerio o Ytterbio è quindi il modello di Anderson degenerare

$$H = H_b + H_f + H_{mix}, \quad (4)$$

$$H_b = \sum_{km} \epsilon_k \hat{n}_{km}, \quad (5)$$

$$H_f = \epsilon_f \sum_m \hat{n}_{fm} + U \sum_{m \neq m'} \hat{n}_{fm} \hat{n}_{fm'}, \quad (6)$$

$$H_{mix} = \sum_{km} V_k [c_{km}^\dagger f_m + h.c.]. \quad (7)$$

L'ibridazione accoppia gli stati localizzati di momento angolare totale J con le onde parziali di conduzione aventi la stessa simmetria attorno al sito dell'impurezza ($l = 3$). Il numero quantico $m = -J, \dots, +J$ assume $N = 2J + 1$ valori (degenerazione del livello fondamentale di impurezza). Per $N = 6$ questa Hamiltoniana descrive appunto lo stato fondamentale di Ce^{3+} ($J = 5/2$). Con una trasformazione particella-buca essa descrive invece lo stato fondamentale di Yb^{3+} .

Nei composti del Ce , come visto prima, la repulsione Coulombiana U è $\sim 5 - 6 eV$ mentre $\Gamma = 0.1 eV$: è quindi lecito assumere che la doppia occupazione del sito f sia molto difficile, se non proibita, per lo meno quando si scende a bassa temperatura. Assumiamo quindi che $U \rightarrow \infty$. Per misure a bassa energia e/o temperatura il valore esatto di U sarà di fatto ininfluenza. Quando $U \rightarrow \infty$, l'Hamiltoniana (4) diventa:

$$H = H_b + H_f + H_{mix}, \quad (8)$$

dove H_b è la stessa di Eq.(5) mentre

$$H_f = \epsilon_f \sum_m \hat{N}_{f m}, \quad (9)$$

$$H_{mix} = \sum_{km} V_k [c_{km}^\dagger F_m + h.c.]. \quad (10)$$

Notiamo che gli operatori \hat{N}_{f_0} , \hat{N}_{f_m} , F_m , non hanno qui lo stesso significato che gli operatori \hat{n}_{f_0} , \hat{n}_{f_m} , f_m , avevano nell'Hamiltoniana di Anderson degenerare, infatti $\hat{N}_{f_0} = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{N}_{f_m} = |m\rangle\langle m|$ e $F_m = |0\rangle\langle m|$. Le configurazioni di impurezza possibili sono quindi solo la $4f^0$ (stato di impurezza vuota, $|0\rangle$) e la $4f^1$ (stato di impurezza occupata, $|m\rangle$), degenerare N volte. In totale le configurazioni possibili sono $N + 1$.

Il modello di Anderson degenerare ignora la struttura fine del livello di impurezza dovuta all'interazione spin orbita (lo stato $J = 7/2$ per Ce^{3+}) e agli effetti di campo cristallino (sui livelli $J = 5/2$ e $J = 7/2$). In simmetria cubica ad esempio il $J = 5/2$ si apre a causa del campo cristallino in $\Gamma_7 \oplus \Gamma_8$, dove Γ_7 (Γ_8) è un doppietto (quartetto). Lo studio di un modello che tiene conto della struttura non crea particolari problemi nell'applicazione del metodo degli sviluppi in $1/N$ nel limite $U \rightarrow \infty$. Per ragioni di maggior semplicità, introdurrò qui il metodo per il modello di Anderson degenerare.

L'Hamiltoniana (8) è il punto di partenza per introdurre le espansioni in $1/N$: in essa però non compare in maniera esplicita nessun fattore N . È necessario tuttavia definire il comportamento dei parametri dell'Hamiltoniana nel limite $N \rightarrow \infty$, in modo che le quantità fisiche non divergano per $N \rightarrow \infty$. Questa procedura è quella che si segue normalmente in tutte le teorie che coinvolgono sviluppi in $1/N$. Nel caso specifico si assume che:

$$N|V_k|^2 \rightarrow O(1), N \rightarrow \infty. \quad (11)$$

La base formale delle espansioni in $1/N$ è ora chiara: $O(1)$ comprende tutti i termini $\propto (N|V_k|^2)^n$, $O(1/N)$ i termini $\propto |V_k|^2(N|V_k|^2)^n$, e così via. Quando N è grande ($N \geq 6$) i processi che compaiono all'ordine $O(1)$ sono più importanti di quelli che compaiono all'ordine $O(1/N)$. Quando N è piccolo ($N = 2, 4$) invece non è necessariamente vero che tra i processi di ordine $|V_k|^{2n}$, alcuni siano

più importanti di altri. È più corretto pensare che abbiamo trovato un artificio tecnico per studiare il problema delle leghe magnetiche diluite da un nuovo punto di vista. La validità di questo artificio va stabilita confrontando i risultati ottenuti con questo metodo con i risultati esatti (quando ci sono) e con gli esperimenti.

4 Le espansioni in $1/N$

Le proprietà statiche e dinamiche delle leghe magnetiche diluite possono essere espresse in funzione di due funzioni di correlazione dinamiche e dipendenti dalla temperatura: la densità spettrale $\rho_f(\omega)$ per aggiunta o rimozione di un elettrone f di energia $\hbar\omega$, e lo spettro per le fluttuazioni (di energia ω) del momento magnetico, $\sigma_f(\omega)$. Queste due quantità sono entrambe misurabili sperimentalmente: ρ_f si può ottenere da esperimenti di fotoemissione e fotoemissione inversa, mentre σ_f da esperimenti di scattering di neutroni. Formalmente ρ_f e σ_f sono le trasformate di Fourier delle funzioni di correlazione dipendenti dal tempo:

$$\rho_f(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega+i0^+)t} G_f(t), \quad (12)$$

$$\sigma_f(\omega) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(\omega+i0^+)t} M_f(t), \quad (13)$$

con

$$G_f(t) = -i\Theta(t)\langle\{f_m(t), f_m^\dagger(0)\}\rangle, \quad (14)$$

$$M_f(t) = -i\Theta(t)\langle[M(t), M(0)]\rangle, \quad (15)$$

$$\hat{M} = g\mu_B \sum_m m \hat{n}_{f_m}. \quad (16)$$

$G_f(t)$ ha un carattere fermionico mentre $M_f(t)$, la funzione di autocorrelazione del momento localizzato al tempo t , è di tipo bosonico. In Tab.1 le proprietà fisiche di maggiore interesse sono espresse in funzione di σ_f o di ρ_f . Il merito dei metodi di sviluppo in $1/N$ è quello di fornire una espressione per ρ_f e σ_f .

$\text{Im } \chi(\epsilon + i0^+) = \pi \sigma_f(\epsilon) \quad \text{Susceptività dinamica}$
$\chi = P \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \sigma_f(\epsilon) / \epsilon \quad \text{Susceptività statica}$
$n_f = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \rho_f(\epsilon) f(\epsilon) \quad \text{Valenza}$
$g(\epsilon_F) \tau^{-1}(\epsilon) / C = N \Gamma \rho_f(\epsilon) \quad \text{Probabilità di scattering degli elettroni di conduzione per unità di concentrazione}$
<p><u>Proprietà di trasporto</u></p>
$\rho = 1 / (e^2 L_0) \quad \text{Resistività}$
$S = -L_1 / (e T L_0) \quad \text{Potere Termoelettrico}$
$k = (L_2 - L_1^2 / L_0) / T \quad \text{Conduktività termica}$
<p>dove</p>
$L_n = - \left[2 \left(g(\epsilon_F) k_F \right)^2 / (3m^2 C) \right] \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon \epsilon^n \times \left[g(\epsilon_F) \tau^{-1}(\epsilon) / C \right]^{-1} \partial f(\epsilon) / \partial \epsilon$

Tab. 1: Alcune proprietà fisiche espresse in funzione di ρ_f o di σ_f . ρ_f e σ_f offrono una visione unificante delle proprietà statiche e dinamiche delle leghe magnetiche diluite[11]. Qui $f(\epsilon)$ è la funzione di distribuzione di Fermi e $g(\epsilon)$ la densità degli stati di conduzione.

Usualmente, lo studio perturbativo di sistemi a molti corpi si basa sulla possibilità di espandere la funzione di partizione esatta attorno ad uno stato fondamentale non interagente con eccitazioni di tipo fermionico e/o bosonico. In presenza di forti correlazioni locali il metodo è molto complesso da applicare: l'esistenza degli operatori di proiezione F_m (che non soddisfano le regole di commutazione canoniche) nell'Hamiltoniana (8) impedisce infatti l'uso del teorema di Wick e delle tradizionali tecniche di Feynman. In effetti queste tecniche si possono usare, ma occorre introdurre pseudo-Hamiltoniane o studiare il problema con il formalismo dei bosoni ausiliari[19]. Qui presenterò in sintesi un approccio più semplice sviluppato in Refs.[20, 21] e applicato all'Hamiltoniana (8) in Refs. [11, 10]. La funzione di partizione esatta del problema è data da:

$$Z = Tr_f Tr_b e^{-\beta H}, \quad (17)$$

dove Tr_f (Tr_b) è la traccia fatta sugli orbitali f (stati di banda) non interagenti, $\beta = 1/k_B T$ e H l'Hamiltoniana (8). Z può essere espressa anche come un integrale di cammino

$$Z = \int_C \frac{dz}{2\pi i} e^{-\beta z} Tr_f Tr_b R(z) \quad (18)$$

dove C è un contorno del piano complesso, orientato in senso antiorario, e che include tutte le singolarità del risolvete, l'operatore

$$R(z) \equiv (z - H)^{-1} = (z - H_0)^{-1} \sum_n^{\infty} [H_{mix}(z - H_0)^{-1}]^n, \quad (19)$$

dove $H_0 = H_b + H_f$ e $H = H_0 + H_{mix}$. La traccia dell'operatore risolvete è data da

$$Tr_f Tr_b R(z) = Tr_f \sum_{N_b} \langle N_b | \frac{1}{z - H} | N_b \rangle, \quad (20)$$

dove $|N_b\rangle$ gli autostati di H_0 con energia E_{N_b} . Dopo avere cambiato variabile $z = z' + E_{N_b}$, e richiamato $z' = z$ per ogni termine nella traccia, è possibile scrivere che

$$Z_f \equiv \frac{Z}{Z_b} = \int_C \frac{dz}{2\pi i} Tr_f R_f(z) e^{-\beta z} \quad (21)$$

dove Z_b è la funzione di partizione della banda non intergente, e

$$R_f(z) = \sum_{N_b} \frac{e^{-\beta E_{N_b}}}{Z_b} \langle N_b | \frac{1}{z + E_{N_b} - H} | N_b \rangle. \quad (22)$$

Introduciamo ora i propagatori di stato occupato ($G_m(z)$) e di stato vuoto ($G_0(z)$)

$$\begin{aligned} G_\alpha(z) &= \langle \alpha | R_f(z) | \alpha \rangle = (z - E_\alpha)^{-1} \\ &\times \sum_{N_b} \frac{e^{-\beta E_{N_b}}}{Z_b} \langle \alpha | \langle N_b | \sum_n [H_{mix}(z + E_{N_b} - H_0)^{-1}]^n | N_b \rangle | \alpha \rangle, \end{aligned} \quad (23)$$

essendo $|\alpha\rangle$ gli stati di impurezza vuota ($|0\rangle$) e di impurezza occupata ($|m\rangle$). L'operatore $R_f(z)$ può essere scritto in forma diagonale in funzione di $G_m(z)$ e $G_0(z)$, o delle corrispondenti autoenergie ($\Sigma_m(z)$, $\Sigma_0(z)$):

$$R_f(z) = G_0(z)|0\rangle\langle 0| + \sum_m G_m(z)|m\rangle\langle m|, \quad (24)$$

$$G_{0,m}(z) = \frac{1}{z - \Sigma_{0,m}(z)}. \quad (25)$$

Le osservabili fisiche sono quindi dapprima mediate sugli stati di conduzione e poi espresse in funzione di quantità non misurabili: Σ_0 , Σ_m , G_0 e G_m , o anche ρ_0 e ρ_m , le funzioni spettrali, definite come

$$\rho_{0,m}(z) = -\frac{1}{\pi} \text{Im} G_{0,m}(z). \quad (26)$$

Σ_0 e Σ_m vengono poi calcolate in ordini di $1/N$. Notiamo che, seguendo questa procedura, le configurazioni di stato vuoto ($4f^0$) e di stato occupato ($4f^1$) sono trattate separatamente.

Ad $O(1)$ le espressioni per Σ_0 , Σ_m sono quelle rappresentate diagrammaticamente in Fig.3. Ad esempio, l'autoenergia di stato vuoto $\Sigma_0^{(1)}(z) = N \sum_k |V_k|^2 f_k / (z - \epsilon_f + \epsilon_k)$. La funzione di partizione invece si può scrivere come

$$Z_f^{(1)} = N e^{-\beta \epsilon_f} + \int_C \frac{dz}{2\pi i} e^{-\beta z} \left[\frac{1 - \partial \Sigma_0^{(1)}(z) / \partial z}{z - \Sigma_0^{(1)}(z)} \right]. \quad (27)$$

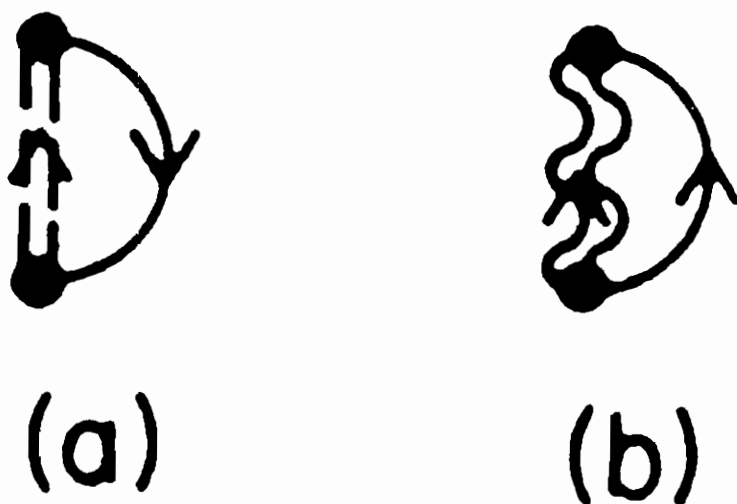


Fig. 3: Rappresentazione diagrammatica di $\Sigma_0^{(1)}(z)$ (a) e di $\Sigma_m^{(1)}(z)$ (b). I pallini rappresentano i vertici. Le linee continue (spezzate (a) o ondulate (b)) sono linee di conduzione (f) alle quali sono assegnati i numeri quantici km (m). La quantità di moto si conserva ad ogni vertice. Alle curve continue ascendenti (discendenti) si assegna il fattore $1 - f_{km}$ (f_{km}), dove f_{km} è la distribuzione di Fermi. Tracciata una perpendicolare ad ogni linea di configurazione locale, le si assegna il fattore $(z - E_\alpha)^{-1}$. E_α è la somma delle energie delle linee ascendenti incontrate dalla perpendicolare meno la somma delle energie di quelle discendenti. Il prodotto dei fattori introdotti si moltiplica per $(V_{km})^{2n}(-1)^c$, dove $2n$ è il numero dei vertici e c è quello delle linee di conduzione che si incrociano tra loro. Si somma infine su tutte le variabili interne [10, 11].

Il contributo dominante a $Z_f^{(1)}$ per $T \rightarrow 0$ viene dal polo a $\omega \sim \epsilon_f - T_0^{(1)}$, la soluzione più negativa dell'equazione:

$$\omega - \text{Re}\Sigma_0^{(1)}(\omega) = 0. \quad (28)$$

Per una densità di stati piatta, $T_0^{(1)} \sim T_A$, con $-T_A = -De^{\pi\epsilon_f/N\Gamma}$, dove D è la semilarghezza di banda. Questo polo non esiste in assenza di ibridazione ed è una diretta manifestazione dell'effetto Kondo: sotto l'energia del mare di Fermi, ad energia $\epsilon_f - T_A$, giace un nuovo stato a molti corpi. La densità spettrale $\rho_f^{(1)}$ riflette il polo della funzione di partizione

$$\rho_f^{(1)}(\omega) = [1 - n_f^{(1)}]\delta(\omega - T_A), \quad (29)$$

dove $n_f^{(1)} = \mu/(1 + \mu)$ e $\mu = N\Gamma/\pi T_A$. Questa $\delta(\omega - T_A)$ è l'approssimazione all'ordine più basso della risonanza Kondo che si misura negli spettri BIS. Essa rappresenta il processo di aggiungere un elettrone con energia T_A allo stato fondamentale. Notiamo inoltre che T_A è l'approssimazione $O(1)$ della scala caratteristica T_0 , definita (anche ad ordini più elevati) come la posizione del picco quasielastico della densità spettrale ρ_f a $T = 0$.

In Fig.4 χ_{ione}^{-1} all'ordine $O(1)$ e all'ordine $O(1/N)$ è confrontata con il risultato esatto ottenuto tramite il Bethe ansatz: come si nota l'accordo migliora aumentando l'ordine dello sviluppo ed è già molto buono all'ordine $O(1/N)$. L'approssimazione $O(1)$ descrive già le caratteristiche fondamentali dell'effetto Kondo: questa è la ragione del successo della tecnica qui descritta. L'espansione perturbativa in $1/N$ tuttavia non è uniformemente convergente nelle frequenze, e non porta a funzioni di correlazione regolari. La singolarità notata in $\rho_f(\omega)$ ad $O(1)$ rimane ordine per ordine: una completa descrizione della fotoemissione f e del trasporto elettronico è così impossibile. Per rimuovere questa singolarità è necessaria una risommazione ad ordini infiniti in $1/N$, autoconsistente dal punto di vista termodinamico⁵. Una condizione sufficiente affinché questo

⁵Con questo si intende dire che le diverse espressioni esatte della funzione di

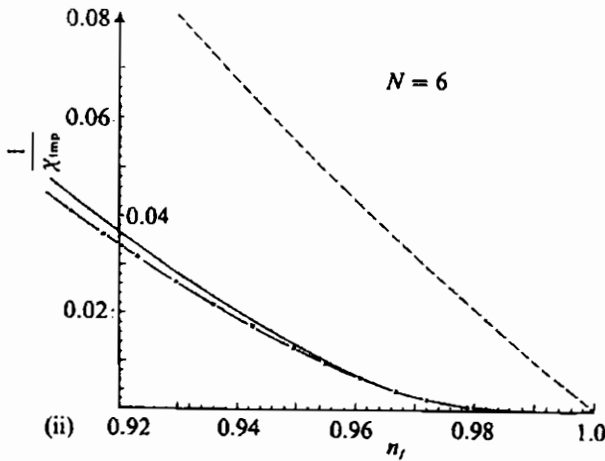


Fig. 4: Suscettività inversa calcolata in funzione di n_f per $N = 6$: $O(1)$ (linea tratteggiata), $O(1/N)$ (linea continua con croci), risultato esatto ottenuto attraverso il Bethe ansatz (linea continua)[22].

accada è che la risommazione (parziale) includa solo classi complete di diagrammi.

La più semplice delle espansioni in $1/N$ termodinamicamente autoconsistenti è nota con diversi nomi tra i quali quello di *non crossing approximation* (NCA)[21]. Il nome deriva dal fatto che, nel calcolo di Σ_0 e Σ_m , con la NCA si sommano tutti i diagrammi con linee di conduzione che non si intersecano. I diagrammi di ordine $O(1)$ e all'ordine $O(1/N)$ sono tutti di questo tipo. All'ordine $O(1/N^2)$ invece compaiono i primi diagrammi di tipo *crossing* (vedi Fig.5). L'errore che si commette nel calcolo della funzione di partizione quindi è di ordine $(1/N)^2$. La NCA è una approssimazione

partizione, che si ottengono integrando le sue derivate termodinamiche (come ad esempio la magnetizzazione), devono rimanere consistenti tra loro una volta che si è fatta la risommazione.

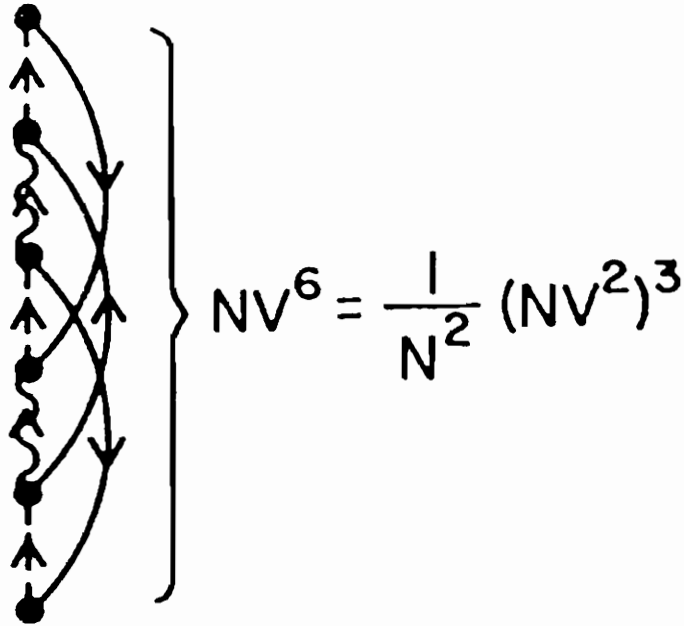


Fig. 5: *Primi diagrammi omessi dalla NCA nel calcolo di Σ_0 : i diagrammi di tipo crossing che contribuiscono ad $O(1/N^2)$ [10, 11].*

che equivale a “vestire” le linee f nude in Fig.3. Più formalmente, la NCA richiede la soluzione di un sistema di equazioni accoppiate per Σ_0 e Σ_m

$$\Sigma_0(\omega + i0^+) = N \sum_k |V_k|^2 f_k G_m(\omega + \epsilon_k + i0^+), \quad (30)$$

$$\Sigma_m(\omega + i0^+) = N \sum_k |V_k|^2 (1 - f_k) G_0(\omega - \epsilon_k + i0^+). \quad (31)$$

Dalla soluzione (numerica) di questo sistema si ottengono i propagatori di stato vuoto e di stato occupato e le associate densità spettrali. Da queste ultime si ottengono poi Z_f , $\rho_f(\omega)$ e $\sigma_f(\omega)$

$$Z_f = \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon e^{-\beta\epsilon} [\rho_0(\epsilon) + \sum_m \rho_m(\epsilon)], \quad (32)$$

$$\rho_f(\omega) = \frac{1}{Z_f} (1 + e^{-\beta\omega}) \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon e^{-\beta\epsilon} [\rho_0(\epsilon) \rho_m(\epsilon + \omega)], \quad (33)$$

$$\sigma_f(\omega) = \frac{N\mu_j^2}{3} \frac{1}{Z_f} \int_{-\infty}^{+\infty} d\epsilon e^{-\beta\epsilon} \rho_m(\epsilon) [\rho_m(\epsilon + \omega) - \rho_m(\epsilon - \omega)]. \quad (34)$$

In Fig.6 sono rappresentate ρ_f e σ_f per una scelta di parametri nel regime Kondo. La temperatura T del sistema è stata scelta in modo che $T \ll T_0$.

La funzione $\rho_f(\omega)$ è una convoluzione delle funzioni di distribuzione di stato occupato e di stato vuoto ed ha una struttura a due picchi: ha una larga risonanza ad energia negativa (attorno a ϵ_f) e una risonanza stretta ad energia positiva dell'ordine di $k_B T_0$. Il picco ad energia negativa corrisponde alla rimozione di un elettrone dal livello f ($4f^1 \rightarrow 4f^0$). La sua ampiezza finita ha origine dalla vita media finita della configurazione $4f^0$. Il picco ad energia $k_B T_0$ corrisponde invece all'aggiunta di un elettrone f ($4f^0 \rightarrow 4f^1$) ed è un puro effetto a molti corpi che non ha interpretazioni basate su un sistema non interagente: si tratta della risonanza di Kondo. Questi picchi non sono i soli ad essere osservati se U è finito. Altri picchi compaiono in $\rho_f(\omega)$ ad energia $\epsilon_f + U$, $\epsilon_f + 2U$, e così via: essi corrispondono all'aggiunta di un elettrone al sistema quando il livello f è già occupato da uno, due, ecc. elettroni: nel limite $U \rightarrow \infty$ la doppia occupazione è proibita e questi picchi vengono spostati ad energia infinita e quindi rimossi dal calcolo. Per U grande ma finito l'unico picco rilevante tra quelli trascurati nel limite di correlazione infinita, è quello ad energia $\epsilon_f + U$, che corrisponde alla transizione $4f^1 \rightarrow 4f^2$.

La funzione σ_f è dispari in ω e mostra due risonanze, collocate a $\pm T_0/4$ per $N = 6^6$. σ_f è legata alla parte immaginaria (assorbitiva) della suscettività magnetica dinamica attraverso il teorema di fluttuazione dissipazione (vedi Tab.1). Le risonanze di σ_f cadono in regioni di energia in cui il sistema ha un'alta probabilità di guadagnare o perdere energia T_0 nell'interazione con un campo magnetico dipendente dal tempo (come si ha in un esperimento di

⁶La posizione esatta delle risonanze in σ_f dipende da N .

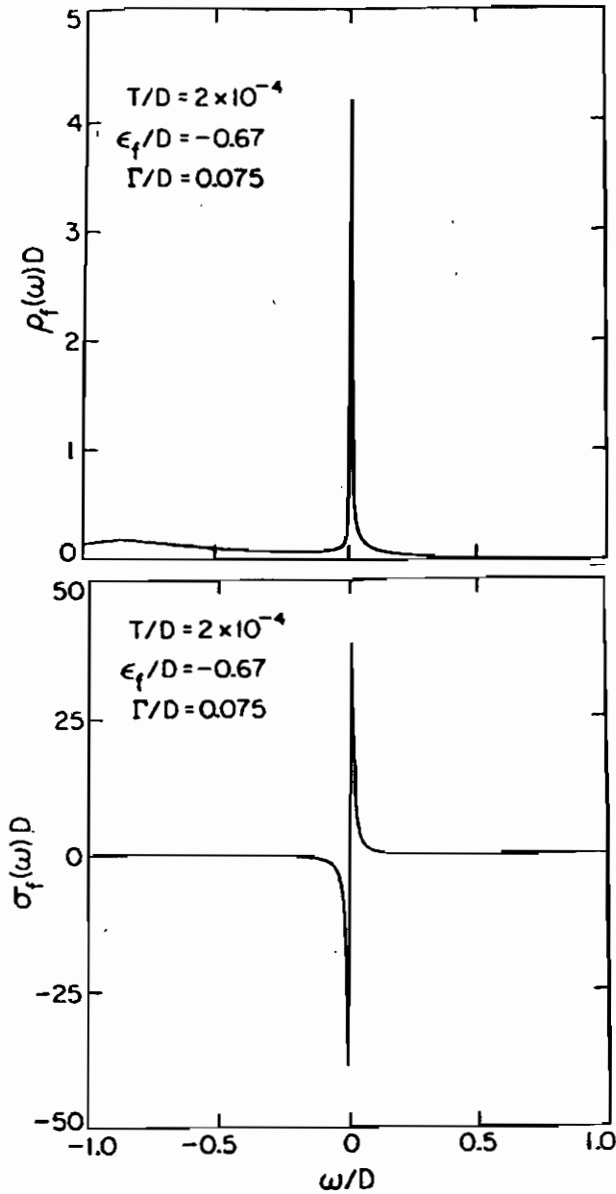


Fig. 6: $\rho_f(\omega)$ (a) e $\sigma_f(\omega)$ (b) nel regime Kondo e nel limite $T \ll T_0$. In Fig.6a, il picco ad energia negativa misura la probabilità di eccitare una transizione $f^1 \rightarrow f^0$, mentre il picco quasielastico ad energia positiva misura la probabilità di eccitare la transizione $f^0 \rightarrow f^1$. La posizione del picco quasielastico a $T = 0$ è, per definizione, la scala caratteristica T_0 [10, 11].

scattering di neutroni) e indicano l'esistenza di transizioni magnetiche tra lo stato fondamentale di singoletto e i livelli magnetici eccitati a bassa energia.

Sia ρ_f che σ_f sono fortemente dipendenti dalla temperatura. Le risonanze diminuiscono in altezza e si allargano aumentando la temperatura. In particolare, la risonanza ad energia $k_B T_0$ in $\rho_f(\omega)$ scompare del tutto per $T \sim 10T_0$. Sottolineiamo che questa risonanza non si può spiegare in nessun modo con modelli ad un solo corpo.

I risultati visti fino ad ora sono stati ottenuti con un'unica scelta della scala caratteristica. In effetti si può dimostrare che, in tutto il regime Kondo non è necessario ripetere il calcolo per scelte diverse. Sia σ_f che ρ_f obbediscono infatti a leggi di scaling che le rendono universali in questo regime:

$$\Gamma\sigma_f(\omega, T) = \tilde{\sigma}_f(\tilde{\omega}, \tilde{T}), \quad (35)$$

$$\Gamma\rho_f(\omega, T) = \tilde{\rho}_f(\tilde{\omega}, \tilde{T}), \quad (36)$$

dove $\tilde{\omega} = \omega/T_0$, $\tilde{T} = T/T_0$. Le leggi di scaling dipendono fortemente dalla degenerazione del livello f , N , ma debolmente da n_f , e sono valide per $0.7 < n_f < 1$ (regime Kondo). Ci si aspetta quindi che le quantità ottenute da ρ_f e σ_f abbiano proprietà di universalità analoghe nel regime Kondo. Questo in effetti è stato verificato per la valenza n_f , la suscettività magnetica, la resistività, il potere termoelettrico e la conduttività termica. Deviazioni dalle leggi di scaling si osservano solo per $T \geq T_0$ o al di fuori del regime Kondo ($n_f < 0.7$)[11].

L'inclusione nel modello di Anderson di degenerazione della struttura fine del livello di impurezza, fin tanto che si considera il limite $U \rightarrow \infty$, comporta soltanto la generalizzazione dell'Hamiltoniana di impurezza H_f a

$$H_f = \sum_{\alpha m} \epsilon_{f\alpha} \hat{n}_{fm\alpha}, \quad (37)$$

dove α indica i diversi multipletto spin orbita e/o di campo cristallino. Questa generalizzazione porta cambiamenti minimi nel metodo esposto: invece di un solo multipletto con degenerazione N

si hanno più multipletti distinti, ognuno con la sua degenerazione, per ognuno dei quali si definisce un propagatore e una autoenergia. Le equazioni integrali che si ottengono sono del tutto analoghe a quelle viste per l'Hamiltoniana di Anderson degenere.

5 Confronto con risultati esatti

È fondamentale confrontare i risultati dell'approssimazione NCA con quelli ottenuti (quando esistono) attraverso i metodi esatti. In Fig.7 mostro il confronto con il Bethe ansatz per la suscettività e il calore specifico rispettivamente nel caso in cui $N = 6$ (a) e nel caso in cui $N = 4$ (b)[23, 11]. La scala è logaritmica sulle ascisse, il che consente di esplorare diversi ordini di grandezza per il rapporto T/T_K . Come si vede, l'accordo è eccellente e migliora aumentando N [23, 11]. In Fig.8 si mostra il confronto tra la NCA e il gruppo di rinormalizzazione per $N = 2$ [24]: sorprendentemente, l'accordo è molto buono anche in questo caso. Il successo della NCA per piccoli N ha implicazioni molto importanti: quando la degenerazione dei livelli di impurezza è risolta (almeno in parte) da un forte campo cristallino oppure da un campo magnetico, N non è più grande e $1/N$ non è più, in linea di principio, un buon parametro di sviluppo. Nonostante questo, sulla base dei risultati ottenuti per $N = 2$, ci si aspetta che la NCA sia ancora valida.

A bassissima energia o temperatura (nell'estremo regime liquido di Fermi), tuttavia, la NCA dà risultati scorretti. Questa tecnica infatti rispetta con buona approssimazione le relazioni di liquido di Fermi per il modello di Anderson a temperatura finita, ma non a $T = 0 K$. I risultati spuri a $T = 0$ sono dovuti al fatto che la NCA tratta in modo inadeguato i processi a bassa energia che coinvolgono più coppie elettrone-buca. Questo problema non emerge a temperatura finita, infatti a $T > 0$ i contributi di questi processi sono velocemente soppressi nella media termica. Il comportamento

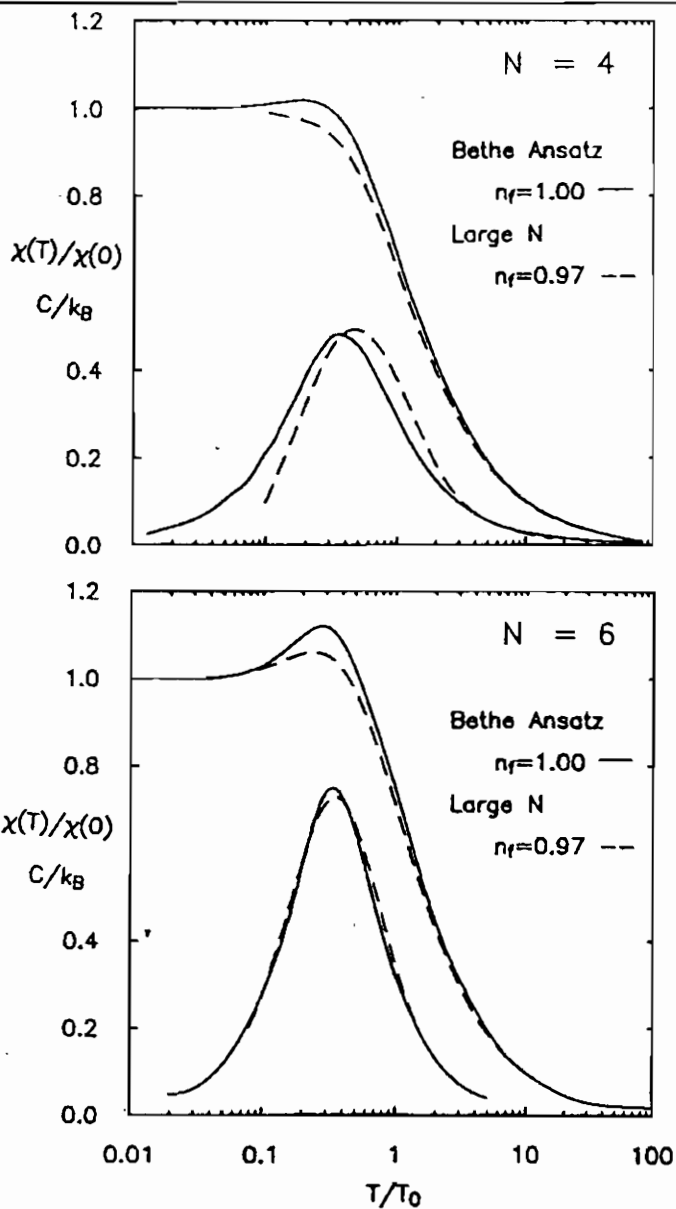


Fig. 7: Confronto tra i risultati ottenuti attraverso la NCA e attraverso il Bethe ansatz per $N=4$ (a) e $N=6$ (b): suscettività magnetica e calore specifico[23, 11].

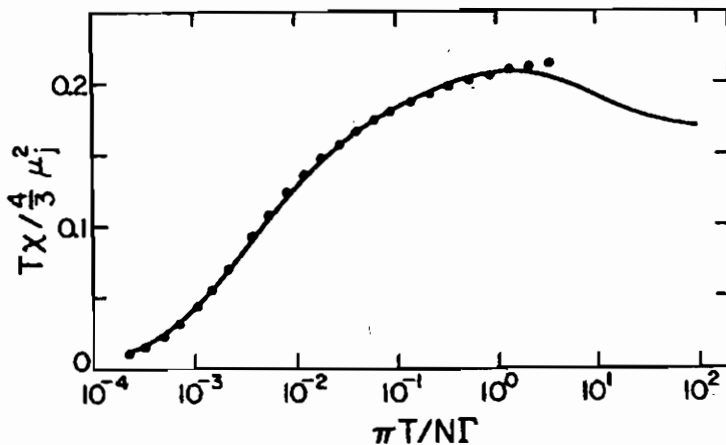


Fig. 8: *Confronto tra i risultati della NCA e del gruppo di rinormalizzazione per $N=2$: suscettività. I pallini neri rappresentano la suscettività per il modello di Kondo, calcolata con il gruppo di rinormalizzazione[4]; la linea continua è il risultato della la NCA per il modello di Anderson con $N = 2$ [24].*

anomalo è limitato a temperature e frequenze dell'ordine di

$$\hbar\omega^*, k_B T^* \sim \frac{k_B T_0}{N+1} \left(\frac{\pi T_0}{\Gamma} \right)^{(N+1)/(N-1)}. \quad (38)$$

T^* è molto piccola se paragonata a T_0 . In Fig.9 è riportato l'andamento di $Im(\chi_{imp}(\omega)/\omega)$ in funzione di ω a varie temperature. Osserviamo la curva corrispondente a $T = 0$: $Im(\chi_{imp}(\omega)/\omega)|_{\omega=0}$ non ha il valore atteso nel regime liquido di Fermi (croce) e manifesta un comportamento anomalo che scompare solo quando $T > T^*$ o $\hbar\omega > k_B T^*$ ⁷.

⁷Notiamo tuttavia che il valore atteso per $Im(\chi_{imp}(\omega)/\omega)$ a $\omega = 0$ (croce)

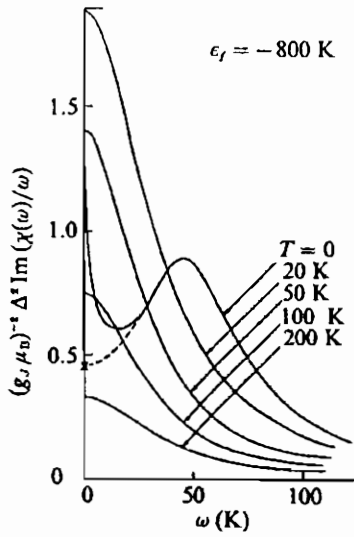


Fig. 9: $\text{Im}(\chi_{imp}(\omega)/\omega)$ a varie temperature. La curva per $T = 0$ non assume il valore atteso a $\omega = 0$ (croce) e manifesta un comportamento anomalo che scompare per $T > T^*$ o $\hbar\omega > k_B T^*$. $\Delta = \Gamma = 30 \text{ K} [25]^\circ$.

6 Confronto con risultati sperimentali

Il composto cubico $(La, Ce)B_6$ è stato studiato a fondo dal punto di vista sperimentale[26, 27, 28]. Si ritiene che le interazioni tra le impurezze si possano trascurare per concentrazioni di Ce al di sotto del 2%. Questa lega manifesta tutte le anomalie dei sistemi Kondo diluiti e ha una scala caratteristica $T_0 \sim 1 \text{ K}$. T_0 è piccola, e quindi, attorno a T_0 , i contributi fononici al calore specifico e alle proprietà di trasporto sono pure piccoli : gli effetti di impurezza possono essere facilmente isolati sottraendo il fondo (ottenuto con

è proprio quello che si ottiene estrapolando dalla curva $\text{Im}(\chi_{imp}(\omega)/\omega)$ ottenuta nell'intervallo in cui la NCA dà risultati corretti, $\hbar\omega > k_B T^*$ (linea tratteggiata).

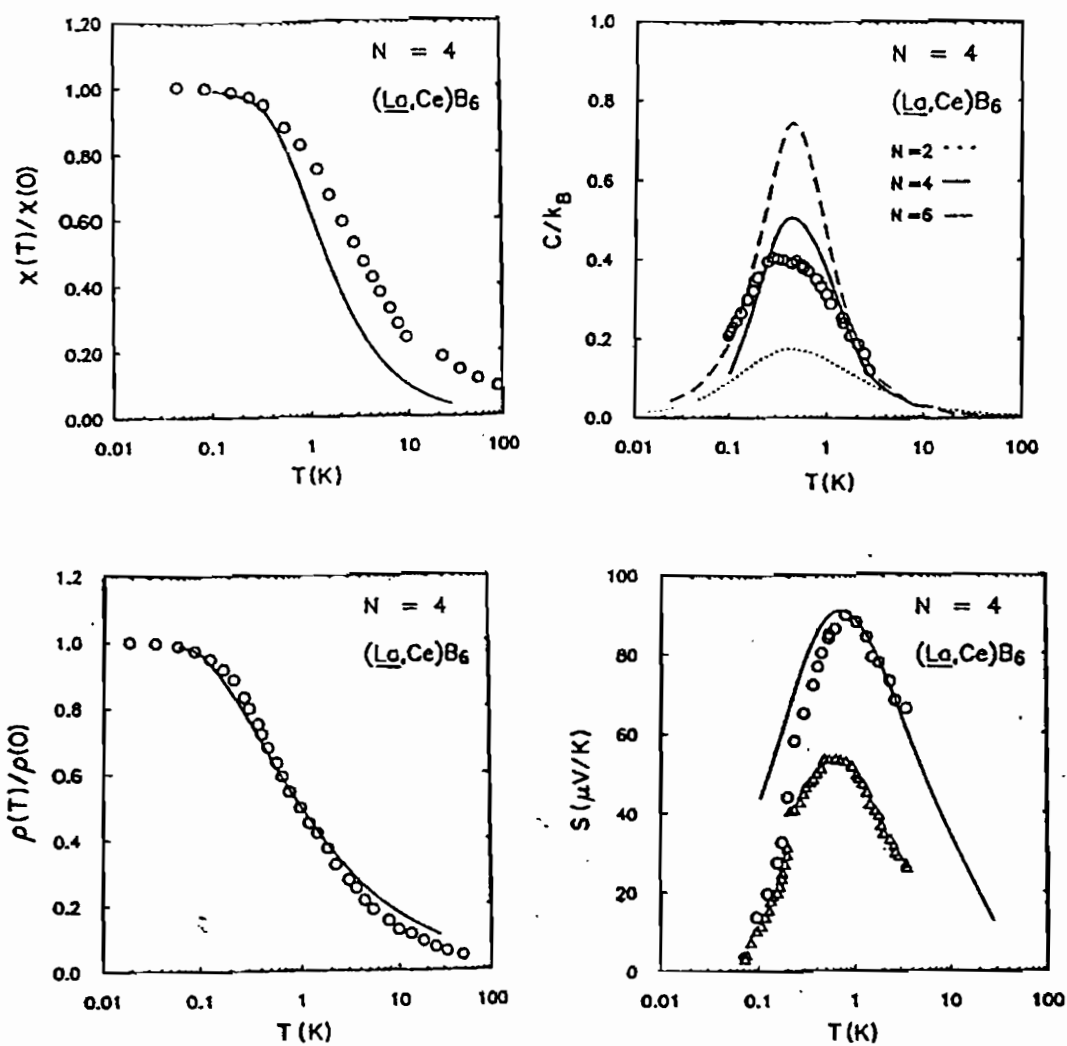


Fig. 10: Suscettività magnetica[27], calore specifico[28], resistività[26] e potere termoelettrico[28] in $(La,Ce)B_6$. La linea continua è la curva teorica[10, 11] ($NCA, N=4$) e i pallini vuoti sono i punti sperimentali.

misure su LaB_6 puro). Inoltre questa lega non mostra transizioni superconduttive almeno fino a $\sim 1\text{ mK}$: è possibile dunque fare misure su un campione nello stato normale in un largo intervallo di temperature. Tra le proprietà del campione che sono state misurate troviamo la resistività[26], la suscettività[27], il calore specifico[28], e il potere termoelettrico[28].

Come abbiamo visto, lo stato fondamentale dello ione Ce^{3+} è il $J = 5/2$ ($N=6$). Il campo cristallino abbassa la degenerazione dello stato fondamentale da $N=6$ a $N=4$ (lo stato fondamentale è infatti il quartetto Γ_8). Sia attraverso lo scattering elastico di neutroni che attraverso misure Raman è stato osservato uno splitting $\Gamma_8 - \Gamma_7$ dell'ordine di di 600 K [29]. È stato anche osservato che il Γ_8 si apre in due doppietti: la separazione tra questi tuttavia, nel sistema diluito, è inferiore a T_K , e quindi lo stato fondamentale può essere considerato un quartetto a tutti gli effetti. Assunto $N = 4$, Bickers. et al[10] hanno calcolato $\chi(T)$, $C(T)$, $\rho(T)$ e $S(T)$ per mezzo della NCA e hanno confrontato esperimenti e teoria lasciando libero un solo parametro, T_0 . Questo confronto (Fig.10) è un test piuttosto stringente della teoria. Le curve sperimentali in Fig.10 mostrano solo i contributi di impurezza ad ogni proprietà. L'accordo tra teoria ed esperimenti è ragionevole per tutte e quattro le proprietà.

Una grandezza piuttosto studiata con la NCA è la suscettività dinamica. In Fig.11 mostriamo quella del sistema denso $CePd_3$ misurata per $T = 5\text{ K}$ e $T = 280\text{ K}$ [30]. Lo spettro è confrontato sia con i risultati della NCA che con una forma di riga Lorenziana. La forma di riga che si usa abitualmente per il fitting degli spettri quasielastici è infatti una Lorentziana centrata in $\omega = 0$

$$\text{Im } \chi(\omega)/\chi(T) = \frac{\omega\Gamma_Q(T)}{\omega^2 + \Gamma_Q^2(T)} \quad (39)$$

dove $\Gamma_Q(T)$ è la larghezza di riga e coincide con la distanza dall'origine del massimo della Lorenziana. Questa forma di riga descrive bene lo spettro di un sistema Kondo solo ad alta temperatura. Come si osserva in Fig.11, infatti, lo spettro sperimentale a 5 K

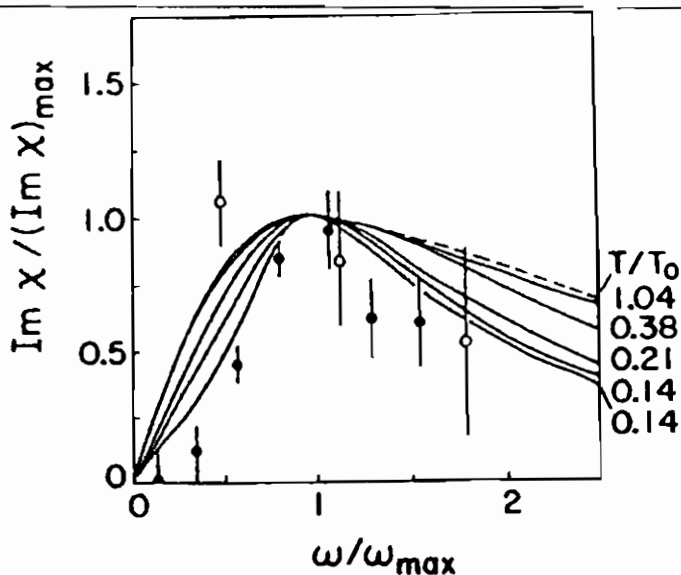


Fig. 11: *La suscettività dinamica in CePd₃. Linee continue: risultati della NCA. Linea tratteggiata: forma di riga Lorentziana[10, 11]. Cerchi pieni: punti sperimentali a T=5 K. Cerchi vuoti: punti sperimentali a 280 K [30].*

devia dalla Lorentziana ed è invece ragionevolmente descritto dai risultati ottenuti con la NCA a bassa temperatura.

La NCA dà inoltre una descrizione qualitativa dell'andamento della larghezza di riga quasielastica, Γ_{NEU} , definita operativamente come la distanza dall'origine del picco in $\sigma_f(\omega) = \pi^{-1} \text{Im} \chi(\omega)$, in funzione della temperatura. In genere Γ_{NEU} viene studiata sperimentalmente nell'intervallo che va da 4 a 300 K. I sistemi in cui la larghezza di riga cresce con la temperatura in questo intervallo (spesso all'incirca come \sqrt{T}) hanno un comportamento detto di "reticolo di Kondo". La scala caratteristica (ottenuta dalle misure di calore specifico) è tipicamente dell'ordine di 10–20 K. Al contrario i sistemi con una larghezza di riga indipendente da T sono sistemi a "valenza mista"; la scala caratteristica è dell'ordine di 100 K. In Fig.12a si mostrano i risultati della NCA per la larghezza di riga: entrambi i regimi sono possibili per lo stesso sistema, in diverse re-

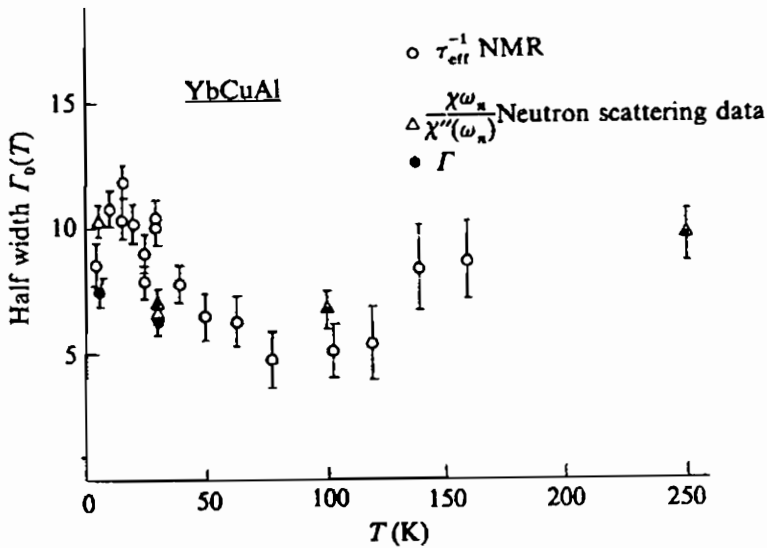
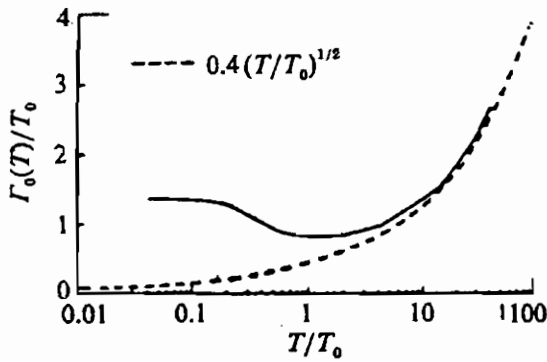


Fig. 12: (a) Andamento della larghezza di riga in funzione della temperatura in base ai risultati della NCA[11]. (b) Andamento della larghezza di riga in YbCuAl in funzione della temperatura in base a misure NMR[31] e di scattering neutronico[32].

gioni di temperatura. In YbCuAl (Fig.12b) si osserva che, in effetti, la larghezza di riga sperimentale è una funzione non monotona della temperatura, che assomiglia a $\Gamma_0(T)$ della figura 12a.

Questi risultati suggeriscono che la descrizione a ione singolo è sufficiente per descrivere molti aspetti di alcuni sistemi densi.

7 Conclusioni

In questo articolo ho descritto una tecnica, la *Non Crossing Approximation* (NCA), che consente di calcolare le proprietà statiche, dinamiche e di trasporto dei sistemi Kondo diluiti. Non esistono tecniche esatte alle quali siano accessibili le proprietà dinamiche e/o di trasporto di questi sistemi. Per quanto riguarda le proprietà statiche, l'accordo tra i risultati ottenuti con la NCA e quelli ottenuti con le tecniche esatte è eccellente per $N \geq 4$ (ad eccezione che nell'estremo regime liquido di Fermi ($T < T^* \ll T_0$)). Sorprendentemente, infine, l'accordo è buono anche per $N = 2$ ⁸. La NCA inoltre è in grado di descrivere anche molte proprietà di sistemi Kondo concentrati, come la suscettività dinamica di CePd_3 o la larghezza di riga di YbCuAl .

Infine, la NCA è una tecnica che consente di studiare modelli realistici. I primi modelli utilizzati per lo studio delle leghe diluite (modello di Kondo e modello di Anderson) per semplicità non includevano i multipletti spin-orbita eccitati o gli effetti di campo cristallino. Un modello più realistico è tuttavia anche più ricco di parametri. Alcuni di questi parametri (come gli splitting di campo cristallino) sono determinati direttamente da misure di scattering neutronico; alcuni vengono riassorbiti come rinormalizzazione di altri parametri; altri devono essere determinati dal *fitting* di risultati sperimentali (calore specifico, suscettività,..) in funzione della temperatura. Ovviamente più sono i parametri liberi e meno è facile mettere alla prova la validità della teoria. La situazione sarebbe molto diversa se fosse possibile calcolare i parametri del modello da

⁸Per $N = 2$ la NCA dà risultati corretti fino a $T \sim 0.1T_0$ [11].

principi primi. Questo obiettivo per lungo tempo è apparso come un traguardo irraggiungibile: le soluzioni esatte infatti, da un lato non sono facilmente estendibili a modelli più sofisticati del modello di Kondo o di quello di Anderson, e dall'altro pongono degli stretti vincoli sulla forma della legge di dispersione delle bande. La NCA invece permette di trattare modelli più realistici con facilità e anche di includere leggi di dispersione realistiche per le bande di energia: può dunque essere combinata con calcoli da principi primi[13]. Lo sviluppo di una tecnica flessibile come la *Non Crossing Approximation* costituisce quindi un passo avanti fondamentale verso lo sviluppo di una descrizione da principi primi dei sistemi Kondo.

Riferimenti

- [1] W. J. de Haas, J. H. de Boer and G. J. van den Berg, *Physica* **1**, 1115 (1934); W. J. de Haas and G. J. van den Berg, *Physica*. **3**, 440 (1936).
- [2] J. Kondo, *Prog. Theor. Phys.* **32**, 37 (1964).
- [3] C. Zener, *Phys. Rev.* **81**, 440 (1951).
- [4] K. G. Wilson, *Rev. Mod. Phys.* **47**, 773 (1975); H. R. Krishnamurthy, J. W. Wilkins and K. G. Wilson, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1011(1975); *Phys. Rev. B* **21**, 1003 (1980); **21**, 1044 (1980).
- [5] a) N. Andrei, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 379 (1980); b) P. B. Wiegmann, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **31**, 392 (1980) [*JETP Lett.* **31**, 364 (1980)]; c) N. Andrei, K. Furuya, and J. H. Lowenstein, *Rev. Mod. Phys.* **55**, 331 (1983); d) A. M. Tsvelick and P. B. Wiegmann, *Adv. Phys.* **32**, 453 (1983).
- [6] N. Andrei, *Phys. Lett.* **87A**, 299 (1982).

- [7] P. W. Anderson, in *Valence Fluctuation in Solids*, edited by L. M. Falikov, W. Hanke, and M. B. Maple, (North-Holland, Amsterdam, 1981) p.451.
- [8] T. V. Ramakrishnan, in *Valence Fluctuation in Solids*, Ref.7, p.13; T. V. Ramakrishnan and K. Sur, *Phys. Rev. B* **26**, 1798 (1982).
- [9] R. Abe, *Prog. Theor. Phys.* **48**, 1414 (1972); S. Ma, *Phys. Rev A* **7**, 2172 (1973); R. Opperman and F. J. Wegner, *Z. Phys. B* **34**, 327 (1979); L. G. Yaffe, *Rev. Mod. Phys.* **54**, 407 (1982); A. A. Migdal, *Phys. Rep.* **102**, 199 (1983); M. Ma and E. Fradkin, *Phys. Rev. B* **28**, 2990 (1983).
- [10] N. E. Bickers, *Rev. Mod. Phys.* **59**, 845 (1987).
- [11] N. E. Bickers, D. L. Cox and J. W. Wilkins, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 230 (1984). N. E. Bickers, D. L. Cox and J. W. Wilkins, *Phys. Rev. B* **36**, 2036 (1987).
- [12] O. Gunnarsson and K. Shönhammer, *Phys. Rev. B* **28**, 4315 (1983); O. Gunnarsson and K. Shönhammer, *Phys. Rev. B* **31**, 4815 (1985).
- [13] R. Monnier, L. Degiorgi and D. D. Koelling, *Phys. Rev. Lett* **56**, 2774 (1986).
- [14] N. Grewe, *Z. Phys. B* **67**, 323 (1987); D. L. Cox and N. Grewe, *Z. Phys. B* **71**, 321 (1988).
- [15] M. D. Daybell, in *Magnetism*, edited by G. Rado and H. Suhl (Academic, New York, 1973) **V**, p 121; C. Rizzuto, *Rep. Prog. Phys.* **37**, 147 (1974);[5]^d; G. R. Stewart, *Rev. Mod. Phys.* **56**, 755 (1984).
- [16] P. A. Lee, T. M. Rice, J. W. Serene, L. J. Sham and J. W. Wilkins, *Comments in Solid State Physics* **12**, 99 (1986).
- [17] P. W. Anderson, *Phys. Rev.* **124**, 41 (1961).

- [18] J. R. Schrieffer and P. A. Wolff, Phys. Rev. **149**, 491 (1966).
- [19] A. A. Abrikosov, Physics **2**, 5 (1965); S. E. Barnes, J. Phys. F **6**, 1375 (1976); P. Coleman, Phys. Rev. **29**, 3035 (1984).
- [20] H. Keiter and J. C. Kimball, Int. J. Magn. **1**, 233 (1971).
- [21] Y. Kuromoto, Z. Phys. B **53**, 37 (1983).
- [22] J. W. Rasul and A. C. Hewson, J. Phys. C **17**, 2555(1984); 3332 (1984).
- [23] V. T. Rajan, Phys. Rev. Lett. **51**, 308 (1983).
- [24] F. C. Zhang e T. K. Lee, Phys. Rev. B **30**, 1556 (1984).
- [25] a)Y. Kuromoto, H. Kojima, Z. Phys. B **57**, 95 (1984);
b)E. Müller-Hartmann, Z. Phys. B **57**, 281 (1984).
- [26] K. Winzer, Sol. Stat. Com. **16**, 521 (1975).
- [27] W. Flesch, Z. Phys. B **29**, 211 (1978).
- [28] H. J. Ernst, H. Grühl, T. Krug, and K. Winzer, in *Proceedings of the 17th International Conference on Low Temperature Physics*, edited by U. Eckern et al. (North-Holland, Amsterdam, 1984), p.137.
- [29] E. Zirngiebl, B. Hillebrands, S. Blumenroder, G. Güntherodt, K. Winzer, and Z. Fisk, Phys. Rev. B **30**, 4052 (1984).
- [30] R. M. Galera, D. Givord, J. Pierre, A. P. Murani, C. Vettier and K. R. A. Ziebeck, J. Magn. Magn. Mat. **47-48**, 139 (1985).
- [31] D. E. Laughlin, F. R. de Boer, J. Bijvoet, P. F. de Chatel and W. C. M. Mattens, J. Appl. Phys. **50**, 2094.
- [32] A. P. Murani, W. C. M. Mattens, F. R. de Boer and G. H. Lander, Phys. Rev. B **31**, 52 (1985).

Ernesto Lunati

Dipartimento di Fisica "Alessandro Volta"
Università di Pavia
e
Istituto Nazionale di Fisica della Materia

GREGOR WENTZEL
E I CAMMINI DI FEYNMAN

Seminario tenuto il 19 dicembre 1996

Introduzione

Esistono tre formulazioni della meccanica quantistica: la meccanica delle matrici di Heisenberg (1925)[1], la meccanica ondulatoria di Schrödinger (1926)[2] e, molto più tardiva, la formulazione basata sui cammini di Feynman (1948)[3]. Quest'ultimo approccio nasce da un'idea coltivata da Feynman durante gli anni Quaranta, allo sviluppo della quale egli perviene anche grazie alla conoscenza dei lavori di Dirac[4,5], il quale è stato probabilmente l'unico ispiratore della scoperta dell'americano; tuttavia esiste un precursore della teoria dei cammini in *Gregor Wentzel*, fisico tedesco il cui nome è soprattutto associato alla cosiddetta approssimazione di *Wentzel-Brillouin-Kramers*[6]. Nel 1924, Wentzel scrive due articoli[7,8] in cui il formalismo matematico e parte dell'interpretazione fisica dei cammini di Feynman vengono anticipati in maniera sorprendente. Sfortunatamente l'idea è applicata in maniera poco perspicua all'ottica quantistica, senza possibilità di raggiungere buoni risultati: per questo motivo l'intuizione di Wentzel è accantonata rapidamente sia dalla comunità scientifica che dallo stesso autore, ansioso di occuparsi delle importanti scoperte di Heisenberg e, soprattutto, Schrödinger. Si tratta però di un'idea assai feconda, destinata a dare i suoi frutti dopo più di vent'anni grazie al lavoro di Feynman.

Solo recentemente l'importanza degli articoli di Wentzel è stata riconosciuta da Antoci e Liebscher[9]; il titolo del loro articolo è, significativamente: "La terza via alla meccanica quantistica è la prima, dimenticata".

1 I cammini di Feynman

Non intendiamo trattare in maniera estesa l'argomento dei cammini di Feynman: la letteratura a riguardo è assai vasta e il lettore può trovare altrove la possibilità di approfondire il soggetto[10,11]. È però importante richiamare i due postulati su cui si fonda la formulazione di Feynman della meccanica quantistica.

Il primo postulato riguarda la cosiddetta *fase di Feynman*. Supponiamo che un sistema fisico compia il tragitto dal punto a al punto b nello *spazio delle configurazioni esteso* (q_i, t) . Ad ogni particolare cammino (virtuale) C_{ab} che collega a con b si attribuisce una fase $\varphi(C_{ab})$ nel seguente modo:

$$\varphi(C_{ab}) = \frac{2\pi}{h} \int_{C_{ab}} L(q_i(t), \dot{q}_i(t), t) dt \quad (1)$$

Nell'equazione (1) $L=T-V$ è la Lagrangiana del sistema ed h è la costante di Planck. Le funzioni $q_i(t)$ individuano parametricamente il cammino C_{ab} e non sono soluzioni delle equazioni classiche del moto. Qualora il cammino fosse proprio quello classico, caratterizzato dalle equazioni di Hamilton, l'integrale di L sarebbe una funzione ben nota in meccanica analitica: la *funzione principale di Hamilton*, indicata solitamente con la lettera S ; osserviamo tuttavia che considerazioni matematiche sulla natura dei cammini escludono il cammino classico da quelli che effettivamente devono essere presi in considerazione[11].

Il secondo postulato è il *principio di sovrapposizione*. Ad ogni cammino C_{ab} si associa il numero complesso $\exp(i\varphi(C_{ab}))$; l'ampiezza di probabilità quantistica $\Phi_{a \rightarrow b}$ che il sistema vada dal punto a al punto b , nello spazio delle configurazioni esteso, è proporzionale alla *sovrapposizione* dei numeri complessi associati ad ogni particolare cammino collegante i due punti. Con la parola "sovrapposizione" intendiamo una somma da eseguirsi nello spazio dei cammini, concetto matematico assai delicato[12] che prende il nome di *integrale di Feynman*. Evidenziamo il fatto che la fase φ è un *funzionale* dell'insieme di funzioni $q_i(t)$, che indichiamo globalmente con $q(t)$. L'ampiezza ottenuta dalla sovrapposizione sarà da noi espressa in forma di integrale funzionale come segue:

$$\Phi_{a \rightarrow b} = F \int Dq(t) \exp(i\varphi[q(t)]) \quad (2)$$

La costante reale F sarà determinata dalle condizioni di normalizzazione. La probabilità di transizione $W_{a \rightarrow b}$ è data infine dal quadrato del modulo di $\Phi_{a \rightarrow b}$.

La formulazione di Feynman della meccanica quantistica è equivalente a quelle di Heisenberg e Schrödinger quando il potenziale V ha una forma opportuna[12]; tra i pregi di questo formalismo, segnaliamo la naturalezza con cui scaturisce il limite classico della meccanica quantistica[3,10].

2 Il contesto

Nel 1924, l'anno che ci interessa, non esiste ancora nessuna delle tre formulazioni odierne della meccanica quantistica. La teoria quantistica nella sua forma più evoluta è ancora espressa dalla regola di Bohr-Sommerfeld nella versione canonicamente invariante di Einstein[13], secondo la quale risulta quantizzata la quantità (pari a nh):

$$A \equiv \int \sum_i p_i dq_i \quad (3)$$

L'integrale va esteso separatamente a ciascuna delle curve chiuse topologicamente inequivalenti nello "spazio delle coordinate razionale" definito da Einstein[14].

Un problema particolarmente avvertito dai fisici è il dualismo della luce: essa infatti si comporta come un insieme di *quanti d'energia e impulso* nei processi di emissione e assorbimento, mentre nella sua propagazione manifesta comportamenti tipicamente *ondulatori*; sarebbe desiderabile, invece, sviluppare un modello unico che descriva congiuntamente gli aspetti corpuscolari e ondulatori dei processi radiativi. Alcuni fisici teorici si cimentano nel tentativo[15-17]; i lavori di Wentzel del 1924 nascono anch'essi nell'ambito di questa problematica.

Nella comunità scientifica (e in particolare nell'ambiente di Monaco, dove opera Wentzel) ha destato inoltre un grande interesse

l'idea di de Broglie di associare caratteristiche ondulatorie all'elettrone in generale; e in particolare nei suoi stati stazionari[18]. La possibilità di descrivere la materia associando un'onda al sistema meccanico comincia ad essere presa in considerazione, finché nel 1926 Schrödinger[2] giungerà a scrivere un'equazione di propagazione per tale onda¹. Proprietà riferite per il momento all'ottica potrebbero essere applicate, in virtù di questa intuizione che risale all'analogia ottico-meccanica contemplata da Hamilton, alla meccanica in generale.

3 "Sull'ottica quantistica"

Il primo dei due articoli che prenderemo in considerazione si intitola "Sull'ottica quantistica"[7] e contiene in forma estesa la teoria dei cammini.

Wentzel intende con l'espressione "*stato meccanico*" uno stato del sistema che evolve secondo le equazioni di Hamilton, muovendosi lungo un cosiddetto *cammino meccanico* nello spazio delle fasi. Se però gli atomi che compongono il sistema materiale interagiscono con la radiazione, esso è evidentemente disturbato e può evolvere in maniera *non meccanica*, ovvero non Hamiltoniana; i cammini possibili nello spazio delle fasi sono in tal caso *non meccanici*. Per dare una misura invariante di quanto l'evoluzione del sistema si discosta dalle equazioni di Hamilton, Wentzel introduce la seguente grandezza:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^N q_k dp_k \quad (4)$$

dove N è il numero di gradi di libertà del sistema materiale, q_k sono le coordinate canoniche e p_k sono i momenti ad esse coniugati (se-

¹ Rispondendo tra l'altro alle sollecitazioni insistenti di Debye, che sottolinea come non sia possibile parlare di un'onda senza esibire l'equazione differenziale che essa soddisfa.

guiamo, per comodità del lettore, una notazione diversa rispetto all'articolo originale); introduciamo inoltre i punti estremi a e b del cammino nello spazio delle fasi.

Eseguendo l'integrazione per parti della (4) otteniamo:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^N q_k dp_k = \sum_{k=1}^N p_k q_k \Big|_a^b - \int_a^b \sum_{k=1}^N p_k dq_k \quad (5)$$

L'equazione (5) risulta molto utile per il confronto tra il formalismo di Wentzel e quello di Feynman. Il primo termine a secondo membro è la variazione della funzione $\sum_k p_k q_k$ nello spazio delle fasi e, contrariamente agli integrali a cui si accompagna, dipende solo dai punti estremi in cui la funzione è valutata e non dal particolare cammino considerato.

Chiamiamo *fase di Wentzel n°1* (in quanto introdotta dal fisico tedesco nel primo dei due articoli) la quantità (4) divisa per la costante di Planck:

$$\varphi_w = \frac{1}{h} \int_a^b \sum_{k=1}^N q_k dp_k \quad (6)$$

In virtù della (5) e introducendo la Lagrangiana e l'Hamiltoniana, la fase di Wentzel può essere scomposta in tre contributi:

$$\varphi_w = \frac{1}{h} \left[\sum_{k=1}^N p_k q_k \Big|_a^b - \int_a^b L dt - \int_a^b H dt \right] \quad (7)$$

Il primo contributo è *indipendente* dal cammino e come tale influente nella sovrapposizione delle fasi di cui parleremo tra poco. Il secondo contributo, a meno del segno, coincide con la fase di Feynman. Il terzo contributo, infine, *dipende* dal cammino: infatti, se pure ci restringessimo a sistemi in cui H fosse costante lungo il cammino classico, ciò non sarebbe comunque vero lungo il generico

cammino virtuale rispetto a cui avvengono le integrazioni contenute nella (7). Per questo motivo la fase di Wentzel del primo articolo non è equivalente, ma solo simile a quella di Feynman.

Successivamente Wentzel espone la sua versione del principio di sovrapposizione. Consideriamo un quanto di luce che interagisce col sistema meccanico, descritto dalle coordinate q_k e dai momenti p_k di cui ci siamo finora occupati. Il fotone sia emesso quando il sistema meccanico si trova nel punto a dello spazio delle fasi, e assorbito nel punto b . Wentzel identifica ogni cammino s del quanto di luce con un cammino C_{ab} del sistema materiale e ricerca un'espressione per la probabilità che il fotone, emesso quando il sistema è in a , venga assorbito quando il sistema è in b . Tale probabilità è proporzionale a un coefficiente J così strutturato:

$$J = \frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^*}{|\mathbf{F}_0|^2} \quad (8)$$

Ove si pone:

$$\mathbf{F}_0 = \sum_s \mathbf{f}_s \quad (9)$$

$$\mathbf{F} = \sum_s \mathbf{f}_s \exp(2\pi i \varphi_s) \quad (10)$$

essendo \mathbf{f}_s il vettore (reale) del campo elettrico associato al cammino s del fotone (in ossequio al principio di corrispondenza) e φ_s la fase di Wentzel associata al cammino C_{ab} del sistema materiale, cioè al cammino s -esimo del fotone. Naturalmente quella che Wentzel indica come una semplice sommatoria sull'indice s è in realtà una somma da eseguirsi nello spazio funzionale dei cammini, che, come abbiamo detto in precedenza, è un concetto ben più complesso; necessitano precisazioni matematiche che il fisico tedesco non fornisce e che lo stesso Feynman, nel 1948, presenterà in modo da lui stesso definito, per il momento, "inadeguato"[3].

Possiamo comunque constatare come in questo approccio di Wentzel siano presenti l'idea di una *somma sui cammini non meccanici* (oggi si direbbe *virtuali*), l'interpretazione *probabilistica* dei fenomeni ottici, la definizione della probabilità come modulo quadrato di una somma di *ampiezze complesse*. Inopportuna appare oggi l'impostazione teorica che assegna al campo elettromagnetico la determinazione delle ampiezze vettoriali f_s , mentre delega ai soli gradi di libertà della materia la determinazione delle fasi φ_s . Interessante, infine, è la seguente osservazione di Wentzel riguardo all'equazione (8), che ha la stessa numerazione anche nel suo articolo: "*La coincidenza formale del numeratore con il quadrato delle ampiezze delle onde sovrapposte assicura alla prescrizione (8) una validità senza eccezioni per quanto riguarda la descrizione di un qualsiasi fenomeno di interferenza*". Non viene esclusa, pertanto, la possibilità di applicare il metodo dei cammini fuori dal contesto dell'ottica; e quella che Feynman costruirà più di vent'anni dopo rappresenta, tra le altre cose, una teoria dei cammini per l'"interferenza" dei sistemi meccanici.

4 "La teoria quantistica dello spettro di frenamento Röntgen"

Sempre nel 1924, Wentzel produce un secondo articolo in cui la teoria dei cammini viene applicata allo studio dello spettro continuo di frenamento Röntgen[8]; in un'appendice, il formalismo del primo articolo viene riproposto utilizzando le variabili azione-angolo[19] e introducendo un'importante modifica rispetto all'equazione (4): ora Wentzel ambienta l'integrazione nello *spazio delle fasi esteso*, vale a dire in uno spazio a $N+1$ gradi di libertà in cui $q_{N+1}=t$ e $p_{N+1}=-H$. Pertanto la deviazione dalla meccanica Hamiltoniana viene misurata dalla grandezza:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{N+1} q_k dp_k = \int_a^b \sum_{k=1}^N q_k dp_k - \int_a^b t dH \quad (11)$$

L'integrazione per parti del secondo membro della (11) fornisce:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{N+1} q_k dp_k = \left[\sum_{k=1}^N p_k q_k - Ht \right]_a^b - \left[\int_a^b \sum_{k=1}^N p_k dq_k - \int_a^b H dt \right] \quad (12)$$

Ancora una volta compare l'incremento di una funzione nello spazio delle fasi, quantità che non dipende dal cammino considerato.

Supponiamo che H non dipenda esplicitamente dal tempo. L'equazione (12) assume una forma particolarmente elegante se si sceglie come sistema di coordinate canoniche uno in cui i momenti p_k risultino essere *costanti* lungo il cammino *meccanico* (che sarà da noi individuato attribuendo il suffisso "mecc" al segno di integrale). La trasformazione canonica, nota a Wentzel, che realizza il cambiamento di coordinate desiderato, è quella di *Delaunay*[20]. Sfruttando l'invarianza canonica del primo membro della (12) e indicando con gli stessi simboli (q_k, p_k) le nuove variabili, possiamo scrivere, utilizzando anche la definizione della Lagrangiana:

$$\int_a^b \sum_{k=1}^{N+1} q_k dp_k = \int_a^b L dt - \int_a^b L dt = S(b, a) - \int_a^b L dt \quad (13)$$

mecc

Nel passaggio intermedio della (13) compare la differenza tra l'integrale della Lagrangiana eseguito lungo il cammino meccanico e quello generico: l'interpretazione della quantità (11) come "deviazione dalla meccanica" risulta così giustificata in modo particolarmente chiaro. Nell'ultimo passaggio è stata introdotta la funzione principale di Hamilton S , di cui abbiamo parlato nel primo paragrafo, valutata nei due estremi a e b .

La *fase di Wentzel* n° 2 è definita a partire dalla (11) in modo analogo alla fase del primo articolo, ma con differenti (ed importanti) sfumature:

$$\varphi_w = -\frac{2\pi}{h} \int_a^b \sum_{k=1}^{N+1} q_k dp_k \quad (14)$$

Utilizzando la (13) distinguiamo due contributi alla fase di Wentzel:

$$\varphi_w = \frac{2\pi}{h} \left[-S(b, a) + \int_a^b L dt \right] \quad (15)$$

Il primo contributo non dipende dal cammino ed è pertanto ininfluenza nella sovrapposizione delle fasi; il secondo contributo è ora *precisamente uguale alla fase di Feynman!* Ne concludiamo che nell'articolo [8] la fase di Wentzel è matematicamente equivalente a quella che verrà proposta più di vent'anni dopo da Feynman.

5 L'impatto

I lavori di Wentzel del 1924 non incontrano una risposta favorevole da parte dei colleghi. I contemporanei considerano l'approccio di Wentzel solo come uno dei numerosi tentativi di arrivare a una vera teoria dell'ottica quantistica, che è ancora lontana. Nel 1926 nessuno immagina di applicare il concetto dei cammini e il principio di sovrapposizione alla meccanica ondulatoria di Schrödinger. Nel 1948 nessuno, nemmeno lo stesso Wentzel, ricorda che la teoria di Feynman ha un precedente, seppure rudimentale, in quegli articoli, subito dimenticati, del fisico tedesco.

Il primo a citare l'articolo "Sull'ottica quantistica" è Herzfeld, amico di Wentzel e autore di un lavoro sulla dispersione pressoché contemporaneo[16]. Herzfeld vede nella teoria di Wentzel una versione quantistica del principio (di sovrapposizione) di Huygens. Kramers e Heisenberg[21] pubblicano nel 1925 un lavoro, anch'esso sulla dispersione, assai lungo e complesso. In una nota a piè pagina liquidano l'approccio dei cammini come inadeguato, poiché i

dati sperimentali sono meglio riproducibili da formule classiche che dalle formule proposte da Wentzel. Tale critica ha l'effetto di un giudizio definitivo, accettato dalla comunità scientifica e dallo stesso Gregor Wentzel. Landé[22] espone nel 1925 un'obiezione di fondo, basata sul principio di causalità, contro i cammini di Wentzel: si tratta di un ragionamento simile a quello che oggi conosciamo come "esperimento delle due fenditure". È un paradosso che può essere risolto riconoscendo la natura virtuale dei cammini, quindi l'inapplicabilità di argomenti fondati sul principio di causalità, che altrimenti invaliderebbero anche il metodo di Feynman².

Altri autori[23-25] citano Wentzel in maniera marginale e accomunano i suoi lavori ad altri articoli dai contenuti più specialistici, dimostrando così di non averne inteso la portata fondamentale. Del resto, come accennato nell'introduzione, anche Wentzel abbandona da subito l'idea dei cammini e si concentra sulle scoperte, di impatto ben maggiore, realizzate dai suoi colleghi Heisenberg e Schrödinger. È possibile però che almeno un fisico, negli anni Venti, abbia colto le potenzialità dell'idea di Wentzel: stiamo parlando di *P.A.M. Dirac*.

6 Wentzel e Dirac

Nel 1933[4] e, più tardi, nel 1945[5] Dirac, nel tentativo reiterato di dare una formulazione lagrangiana alla meccanica quantistica, introduce il "corrispondente" quantistico di una *trasformazione di contatto* nello spazio delle configurazioni (che può essere la stessa evoluzione temporale delle coordinate $q_T \rightarrow q_I$); definiamo una fase φ associata alla trasformazione nel modo seguente:

$$\varphi(q_I, q_T) = \frac{1}{h} \int_T^I L dt' \quad (15)$$

² Un'analoga obiezione basata su argomenti di causalità, da parte di Bohr, sarà indirizzata anche a Feynman.

Dirac pone in corrispondenza la grandezza classica $\exp(i\varphi(q_t, q_T))$ con il *propagatore quantistico* $(q_t|q_T)$. Successivamente Feynman[3], assumendo che tali grandezze siano *proporzionali* e non semplicemente corrispondenti, riuscirà a riformulare la meccanica quantistica utilizzando i cammini.

Feynman riconosce esplicitamente in Dirac il suo ispiratore, e indica gli articoli [4,5] come punto di partenza della sua teoria. Per parte sua, Dirac non cita mai Wentzel, ma sicuramente conosce i lavori scritti nel 1924 dal fisico tedesco: infatti una lettera di *R. H. Fowler* a Bohr, datata 29 Aprile 1925[26], attesta che Dirac in quel periodo è interessato alla cosiddetta "fase di Wentzel". Fowler infatti parla di una nota scritta da Dirac, sulla fase di Wentzel, e la allega alla sua lettera perché -suggerisce- potrebbe interessare a Bohr o a Kramers in vista di un seminario. Egli stesso, accortosi che Dirac si occupava della questione, lo aveva sollecitato a scrivere questa nota e, dopo averla letta, sostiene di avere più chiaro il lavoro di Wentzel, del quale prima aveva solamente una vaga idea. Fowler dice infine a Bohr di non rendergli la nota di Dirac; malgrado scrupolose ricerche, essa non è più stata ritrovata[27].

Esiste invece un'intervista a Dirac effettuata da *T. S. Kuhn* nel 1964[28], in cui il fisico inglese è interrogato proprio sulla "fase di Wentzel". Dirac suggerisce di rivolgersi a Wentzel per sapere cosa essa fosse e aggiunge che nel 1925, prima della comparsa del lavoro di Heisenberg [1], egli si occupava del tentativo di unificazione dei campi gravitazionali ed elettromagnetici compiuto da Weyl[29] e non della teoria dei quanti³. Gregor Wentzel, intervistato poi da Kuhn nello stesso anno[28], non riceve domande sulla "fase" che interessava a Dirac; peraltro dimostra di attribuire scarso valore ai lavori del 1924 sull'ottica quantistica, e di prediligere invece articoli successivi e maggiormente noti.

³ È interessante osservare, tuttavia, come già nel 1923 Schrödinger avesse suggerito un'applicazione della teoria di Weil alle orbite quantiche di elettrone singolo[30].

Conclusioni

Dal punto di vista storico, non è possibile stabilire se e quanto Wentzel abbia influenzato Dirac e, in tal modo, contribuito alla nascita della formulazione di Feynman della meccanica quantistica. Dal punto di vista matematico, abbiamo però dimostrato la coincidenza formale della teoria di Wentzel con quella dei cammini di Feynman. L'interpretazione fisica presenta, in Wentzel, incongruenze ed ingenuità, ma nel modo di costruire la probabilità di transizione come modulo quadrato della somma di ampiezze complesse, ciascuna associata a un cammino non "meccanico", cioè virtuale, egli è sorprendentemente vicino alla teoria attuale.

Wentzel dev'essere pertanto considerato un precursore della "terza via" alla meccanica quantistica, se non uno dei fondatori della stessa, come invocato da Antoci e Liebscher[9].

Bibliografia

- [1] Heisenberg, W., *ZS f. Phys.* **33**, 879 (1925).
- [2] Schrödinger, E., *Ann. d. Phys.(Lpz.)* **79**, 361 (1926).
- [3] Feynman, R. P., *Rev. Mod. Phys.* **20**, 367 (1948).
- [4] Dirac, P. A. M., *Phys. ZS Sowjetunion* **3**, 64 (1933).
- [5] Dirac, P. A. M., *Rev. Mod. Phys.* **17**, 195 (1945).
- [6] Wentzel, G., *ZS f. Phys.* **38**, 518 (1926); Brillouin, L., *Comptes Rendus Acad. Sci.* **183**, 24 (1926); Kramers, H. A., *ZS f. Phys.* **39**, 828 (1926).
- [7] Wentzel, G., *ZS f. Phys.* **22**, 193 (1924).
- [8] Wentzel, G., *ZS f. Phys.* **27**, 257 (1924).
- [9] Antoci, S., Liebscher, D-E., *Ann. Fond. de Broglie* **21**, n°3, 349 (1996).
- [10] Feynman, R. P., Hibbs, A. R., "Quantum Mechanics and Path Integrals", McGraw-Hill, New York (1965).

- [11] Roncadelli, M., Defendi, A., "I cammini di Feynman" *Quaderni di Fisica Teorica* **6**, Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica (1992).
- [12] Albeverio, S. A., Høegh-Krohn, R. J., "Mathematical Theory of Feynman Path Integrals", *Lectures Notes on Mathematics* **523**, Springer, Berlino (1976).
- [13] Einstein, A., *Verhandlungen der Deutschen Phys. Gesellschaft* **19**, 82 (1917).
- [14] Graffi, S., "Le radici della quantizzazione", *Quaderni di Fisica Teorica* **9**, Università degli Studi di Pavia, Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica (1993).
- [15] Smekal, A., *Die Naturwissenschaften* **11**, 873 (1923).
- [16] Herzfeld, K. F., *ZS f. Phys.* **23**, 341 (1924).
- [17] Bohr, N., Kramers, H. A., Slater, J. C., *ZS f. Phys.* **24**, 69 (1924).
- [18] De Broglie, L., *Comptes Rendus Acad. Sci.* **177**, 507 (1923).
- [19] Goldstein, H., *Classical Mechanics*, Addison-Wesley Press, Cambridge, Mass. (1951).
- [20] Lanczos, C., "The Variational Principles of Mechanics", University of Toronto Press (1949), pag. 243.
- [21] Kramers, H. A., Heisenberg, W., *ZS f. Phys.* **31**, 681 (1925).
- [22] Landé, A., *ZS f. Phys.* **35**, 317 (1925).
- [23] Pauli, W., Geiger, H., Scheel, K. (eds.): *Handbuch der Physik* **4**, Springer, Berlino (1926).
- [24] Pringsheim, P., Geiger, H., Scheel, K. (eds.): *Handbuch der Physik* **21**, Springer, Berlino (1929).
- [25] Kulenkampff, H., Geiger, H., Scheel, K. (eds.): *Handbuch der Physik*, 2 Aufl. **23/2**, Springer, Berlino (1933).
- [26] Lettera di R. H. Fowler a N. Bohr del 29 aprile 1925, Archives for the History of Quantum Physics.
- [27] Niels Bohr Archive, Copenhagen, comunicazione privata.
- [28] Kuhn, T. S., Interviews (1964), Archives for the History of Quantum Physics.
- [29] Weyl, H., *Ann d. Phys.(Lpz.)* **59**, 101 (1919).
- [30] Schrödinger, E., *ZS f. Phys.* **12**, 13 (1923).

Paolo Tognini

**Dipartimento di Fisica "A. Volta"
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale per la Fisica della Materia
Sezione di Pavia**

La microscopia a scansione a effetto tunnel

Seminario tenuto il 15 Dicembre 1995

1 Introduzione

L'interesse, sia di carattere fondamentale che applicativo, suscitato dallo studio e dalla tecnologia delle superfici dei materiali, richiede la conoscenza estremamente accurata delle loro caratteristiche topologiche. Una delle tecniche che meglio permettono di soddisfare a questa richiesta è la microscopia a scansione a effetto tunnel (STM) [1]: si tratta infatti di una tecnica spettroscopica (dà quindi informazioni risolte in energia) che permette di conoscere la topografia di una superficie, o, più precisamente, la disposizione degli stati elettronici superficiali, con risoluzione spaziale anche migliore di 1 Å.

La STM è stata la prima in ordine cronologico [2] delle tecniche microscopiche "stilo", basate cioè sull'interazione di una punta metallica acuminata (la risoluzione è proporzionale all'acutezza della punta) con la superficie in studio. Una differenza di potenziale applicata tra punta e campione, che si trovano a distanza di pochi angstrom uno dall'altro, permette il passaggio di un numero apprezzabile di elettroni per effetto tunnel: tale corrente di tunneling rivela la presenza di stati elettronici vuoti o pieni nella regione spaziale sottostante la punta, a un'energia determinata dal potenziale utilizzato. Muovendo la punta nel piano x-y (corrispondente alla superficie del campione), variando la sua distanza dal campione e la differenza di potenziale applicata, si ottiene la densità locale degli stati (LDOS) per la superficie studiata.

2 Principi

Si considerino gli elettroni presenti con energia E su due elettrodi costituiti dello stesso metallo separati dal vuoto. Nell'ipotesi di barriera unidimensionale rettangolare di ampiezza d , la probabilità di trasmissione (corrente elettronica di tunneling) I decade esponenzialmente con la larghezza della barriera (cioè con la distanza tra gli elettrodi) d :

$$I \propto e^{-2kd} \quad (2.1)$$

dove $k^2 = 2m(V_B - E)/\hbar^2$ e V_B è il potenziale della barriera [3]. Nel caso in cui gli elettroni si trovino al livello di Fermi, $(V_B - E)$ è

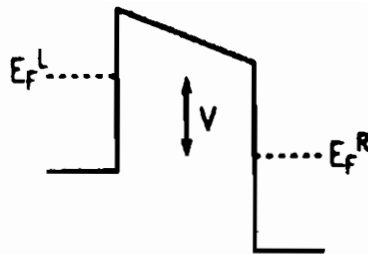


Figura 1: *Barriera di potenziale tra due elettrodi con applicata una differenza di potenziale V . I livelli di fermi differiscono di eV . La freccia indica l'intervallo di energia entro il quale si ha tunneling. A energie piú alte non ci sono elettroni disponibili per il tunnel, a energie piú basse non ci sono stati vuoti disponibili.*

la funzione lavoro ϕ del metallo. Se è applicata una differenza di potenziale V attraverso la barriera, solo gli elettroni negli stati posti entro V sotto il livello di Fermi sul lato negativo possono passare negli stati vuoti entro V sopra il livello di Fermi sul lato positivo (Fig. 1). Tipicamente ϕ è dell'ordine dei $4 \div 5 eV$, cosicché $k \sim \text{Å}^{-1}$, e questo significa che la corrente di tunneling varia di circa un ordine di grandezza per ogni angstrom di variazione della distanza tra gli elettrodi. Questa rapida variazione di I con d è importantissima per il raggiungimento di una elevata sensibilità: la curvatura posseduta dalla punta fa sì che i pochi atomi all'apice siano più vicini al campione rispetto a quelli immediatamente circostanti di circa 1 angstrom, cosicché lo scambio di elettroni in regime di tunneling avviene quasi esclusivamente attraverso di essi.

Per separazioni punta-campione di qualche angstrom (situazione tipica), l'accoppiamento tra le funzioni d'onda degli stati di partenza e di arrivo è debole e il tunneling può essere trattato al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Si ottiene per la corrente

netta di tunnel:

$$I = \frac{2\pi e}{\hbar} \sum_{\mu\nu} \{f(E_\mu)[1-f(E_\nu)] - f(E_\nu)[1-f(E_\mu)]\} |M_{\mu\nu}|^2 \delta(E_\nu + V - E_\mu) \quad (2.2)$$

con $f(E)$ funzione di distribuzione di Fermi, V differenza di potenziale applicata e $M_{\mu\nu}$ elemento di matrice di tunneling fra stati di punta (ψ_μ) e di campione (ψ_ν). I termini in parentesi graffa esprimono la probabilità che gli stati di partenza e di arrivo siano rispettivamente occupato e vuoto; la conservazione dell'energia totale è espressa attraverso la δ di Dirac.

Facendo le ipotesi di:

- potenziale V piccolo
- $f(E, T) \simeq f(E, 0)$

è possibile semplificare l'equazione (2.2) nel modo seguente [4]:

$$I = \frac{2\pi}{\hbar} e^2 V \sum_{\mu\nu} |M_{\mu\nu}|^2 \delta(E_\mu - E_F) \delta(E_\nu - E_F) \quad (2.3)$$

poiché uno dei due termini fra parentesi graffa è nullo (E_F è il livello di Fermi nei due materiali, indicato per semplicità allo stesso modo).

Se poi la punta viene considerata come una sorgente (matematicamente) puntiforme di corrente, e la sua posizione viene espressa dalla coordinata r_t , dall'equazione (2.3) si ottiene[4]:

$$I \propto \sum_{\nu} |\psi_\nu(r_t)|^2 \delta(E_\nu - E_F) \quad (2.4)$$

che coincide con $\rho(r_t, E_F)$, densità di carica della superficie del campione al livello di Fermi E_F nella posizione della punta, cioè con la densità locale degli stati (LDOS) a E_F . Queste approssimazioni danno le proprietà della superficie "nuda", cioè trascurando l'influenza della punta. $\rho(r_t, E_F)$ misurata viene poi confrontata con il valore calcolato, ottenuto ad esempio come sovrapposizione di densità di carica sferiche di tipo atomico. Tale approccio è corretto e fornisce buoni risultati per i campioni metallici e i semiconduttori più semplici, cioè quando ψ_ν è di tipo orbitale s.

Nel caso generale dei semiconduttori, a complicare tutto interviene la forte dipendenza delle immagini dal potenziale applicato.

In prima approssimazione si può porre

$$I(V) \sim \int_{E_F}^{E_F+V} \rho(r_t, E) dE \quad (2.5)$$

anche se tale approccio non tiene conto della dipendenza di ρ da V . Soprattutto quando si arrivano a studiare gli intervalli di energia in vicinanza degli estremi di banda nella zona di Brillouin, si possono verificare delle discontinuità in $\rho(V)$: la distribuzione spaziale degli stati di conduzione (descritta da ψ_c) può differire da quella degli stati di valenza (descritta da ψ_v). Come esempio si può prendere il GaAs [5]: per V del campione positivo la corrente entra nella banda di conduzione BC, se V è negativo la corrente esce dalla banda di valenza BV. Si studiano due regioni di superficie diverse perché le distribuzioni spaziali di ψ_c e ψ_v differiscono: la prima è centrata sugli atomi di Ga mentre la seconda su quelli di As (Fig. 2).

Spesso, nel confronto tra teoria ed esperimento, la dipendenza dal potenziale viene inclusa in un coefficiente di trasmissione della barriera $T(E, V)$, così che

$$I(V) \propto \int_{E_F}^{E_F+V} \rho(E) T(E, V) dE \quad (2.6)$$

tuttavia in generale la forte dipendenza di $T(E, V)$ da V impedisce di trovare una relazione semplice tra la conducibilità differenziale dI/dV e la densità locale degli stati ρ .

Una soluzione al problema può essere quella di dividere la conducibilità differenziale per I/V [6]. Si ottiene in questo modo $\frac{d \ln I}{d \ln V}$, che cancella la dipendenza esponenziale di $T(E, V)$ da V .

Si dipende poi fortemente dalla funzione lavoro ϕ del materiale, cioè dall'altezza della barriera di potenziale che un elettrone al livello di Fermi deve superare per abbandonare la superficie. Sperimentalmente si misura una funzione lavoro effettiva ϕ_A [7], cioè la barriera che le cariche devono superare per passare da un elettrodo all'altro. Poiché

$$I \propto V \exp(-2s\sqrt{2m\phi_A/\hbar}) \quad (2.7)$$

si definisce, per V costante,

$$\phi_A = \frac{\hbar^2}{8m} \left(\frac{d \ln I}{ds} \right)^2 \quad (2.8)$$

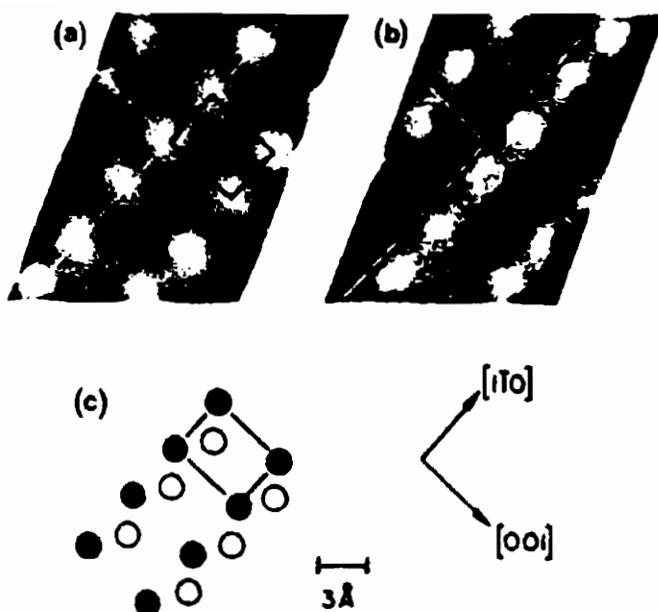


Figura 2: Immagine di GaAs(110) ottenuta con potenziale del campione rispetto alla punta a) $+1.9V$ e b) $-1.9V$. Si può vedere come la corrente elettronica interessi atomi distinti, nel primo caso Ga, nel secondo As. In c) è riportata la struttura del GaAs (Ga e As sono rispettivamente i cerchi pieni e vuoti).

con s separazione punta-campione (l ed s sono quantità note). Quando $s \rightarrow \infty \Rightarrow \phi_A(s) \rightarrow \phi$, dove ϕ è la funzione lavoro della superficie del campione, ma quando s è finito, $\phi_A < \phi$, per la presenza di interazioni di scambio-correlazione e di dipoli indotti ¹.

Il formalismo utilizzato non è più corretto quando punta e campione sono così vicini tra loro che la sovrapposizione tra le funzioni d'onda dei vari stati è apprezzabile: in questo caso stati di punta e

¹In pratica un'accurata misura della barriera è molto difficoltosa. Infatti misure che evitano i problemi di compensazione dovuti al non istantaneo ciclo di feed-back, lavorano a bassa velocità facendo intervenire effetti di deriva. Se si lavora ad alte velocità di modulazione del potenziale, è poco accurata la calibrazione degli elementi piezoelettrici che controllano lo spostamento.

di campione vanno trattati come un singolo sistema.

3 Apparato per misure STM

Una misura STM richiede il movimento di una punta a una distanza di qualche angstrom da una superficie, evitando ogni interazione che danneggi la punta stessa, ma mantenendo costante tale distanza oppure variandola in modo che resti costante la corrente di tunneling. Richiede inoltre la possibilità di variare la differenza di potenziale tra punta e campione, in modo da poter investigare stati della banda di valenza e di quella di conduzione in un ampio spettro energetico

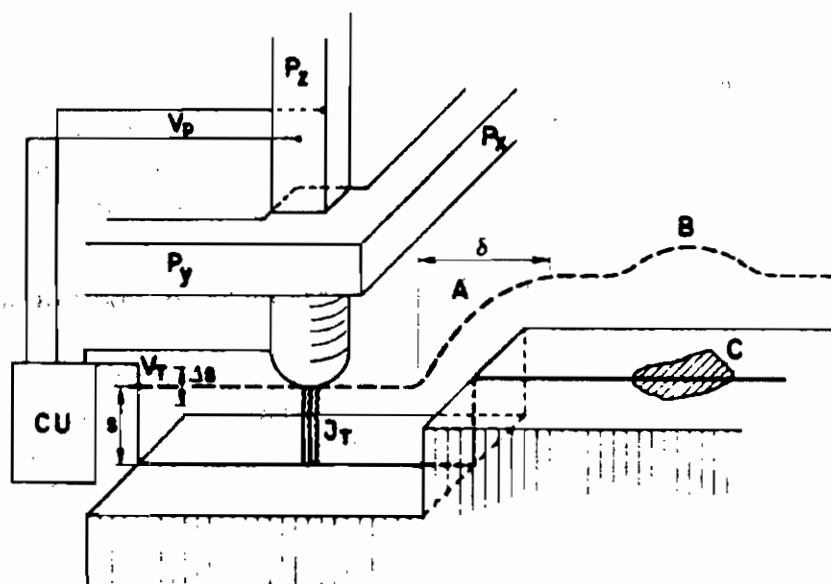


Figura 3: Schema di apparato. Si distinguono gli elementi piezoelettrici (P_x, P_y, P_z), l'unità di controllo CU che può mantenere costante la corrente di tunneling J_T oppure la distanza punta-campione s o infine il potenziale applicato.

L'accuratezza sulla distanza punta campione deve essere migliore di 0.05 \AA , e la risoluzione nel piano x-y migliore di 1 \AA , per una

distanza di tunneling che mediamente è di circa 6 \AA . Tali parametri vengono gestiti da un circuito di feed-back, composto da elementi piezoelettrici, che mantiene stabile la corrente di tunneling oppure la distanza punta-campione (Fig. 3). Ovviamente la reazione di tale sistema non è né istantanea né esatta. Al sistema di scansione e al circuito di controllo è richiesto inoltre un grande intervallo spaziale di operatività.

I principali ostacoli a un accurato posizionamento della punta sono dati da:

- vibrazioni a bassa frequenza;
- derive termiche;
- rumore elettrico.

Si effettuano misure in aria e in ultra alto vuoto; nel primo caso si ha il vantaggio di un apparato più compatto, quindi meno sensibile alle vibrazioni meccaniche, nel secondo caso quello di studiare superfici pulite, cioè non contaminate chimicamente dall'atmosfera.

La geometria e l'identità chimica della punta hanno grande influenza sulle misure topografiche e spettroscopiche [8]. Le migliori immagini si hanno quando la punta è metallica e ha un solo atomo alla sua estremità, poiché la risoluzione nella misura è pari all'area attraversata dalle cariche di tunneling. In realtà data la estrema dipendenza della corrente di tunneling dalla distanza, basta che un atomo sia solo di poco ($\sim 1 \text{ \AA}$) più sporgente degli altri perché la maggior parte della corrente passi attraverso di esso. Materiali costituenti la punta sono generalmente Pt-Ir, Pt, Au (per misure in aria), W (per misurte in UHV). In generale, conoscendo il raggio di curvatura della parte terminale della punta, è possibile stimarne la risoluzione spaziale.

I risultati della misura possono infine essere influenzati da interazioni tra punta e campione dovute alla deformabilità della punta oppure alla presenza di impurezze sulla superficie. Sperimentalmente [9] si è verificato come la forza di interazione tra punta e campione sia di circa 1 nN per una separazione di circa 3.5 \AA .

4 Metodologie di analisi superficiale

Già in passato tecniche spettroscopiche utilizzando l'effetto tunnel venivano usate per studiare giunzioni fisse. La novità della tecnica STM sta nell'abilità di scansione e nella possibilità di variare la distanza tra punta e campione, rendendo possibile sondare la barriera di potenziale tra i due elettrodi. Inoltre la possibilità di variare la differenza di potenziale tra gli elettrodi rende utilizzabili e quindi studiabili molteplici autostati di punta e campione. Lo svantaggio di tale tecnica è legato al contributo sconosciuto della punta, che rende non perfettamente riproducibili i dati raccolti. Solitamente vengono effettuati due tipi di scansione: (i) a corrente di tunneling fissata, con velocità di scansione dell'ordine di $10\mu\text{m}/\text{sec}$; (ii) a distanza punta-campione fissata, con velocità più elevata, paragonabile allo standard TV. Altre tecniche combinano in vari modi le due qui citate.

Nel caso (i), tramite il circuito di feed-back, ogni deviazione da un prefissato valore della corrente viene compensata variando opportunamente la separazione tra punta e campione. Nel caso (ii), le misure I-V effettuate a distanza punta-campione fissata costituiscono una sonda maggiormente risolta in energia: permettono di ottenere, ad esempio, il gap di banda e la concentrazione dei portatori. La superficie del campione deve però essere priva di rugosità onde evitare il danneggiamento della sonda: l'utilizzo di questa particolare tecnica STM è pertanto limitato a piccole porzioni di superficie.

Poiché la STM, più che una topografia superficiale degli atomi, dà una misura delle funzioni d'onda elettroniche superficiali, si cerca di variare la finestra di energia degli stati che contribuiscono alla corrente di tunnel I, in modo da raccogliere informazioni, oltre che di tipo spettroscopico, anche sulla loro localizzazione spaziale [10]. Per questo, si raccolgono misure dipendenti da V delle curve a I costante, che permettono anche di ottenere la conducibilità differenziale dI/dV . Tale tecnica è stata ad esempio applicata al Si(111) nella sua ricostruzione superficiale 2×1^2 , la cui superficie è

² $m \times n$ sono gli indici di Miller bidimensionali che servono a descrivere la cella unitaria superficiale in termini di vettori del reticolo di volume.

caratterizzata da una catena quasi-unidimensionale di atomi di Si, disposti a zig-zag, con legami di tipo π tra un atomo di Si e l'altro³.

Si è osservato come gli stati della banda di valenza (studiati a V del campione positivo) siano localizzati su un lato della catena (Fig. 4a), mentre quelli della banda di conduzione (studiati a V del campione negativo) siano localizzati sull'altro lato (Fig. 4b). È la simmetria del reticolo sottostante che rende non-equivalenti i due atomi nella cella unitaria.

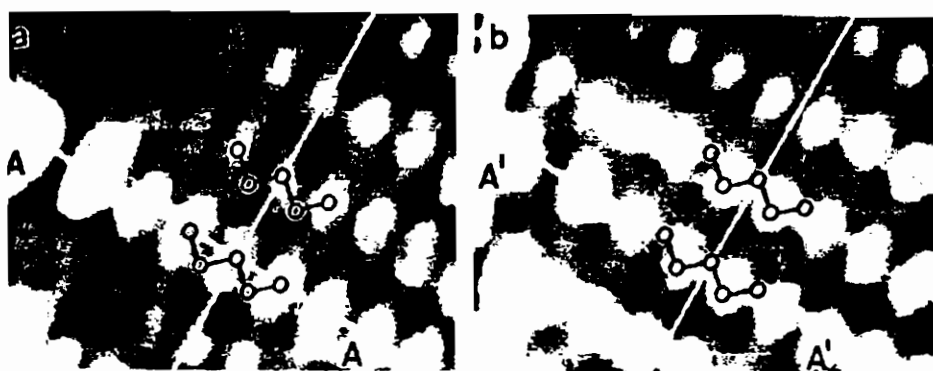


Figura 4: Superficie di $Si(111)2 \times 1$, applicando al campione il potenziale a) $+1V$ (in chiaro gli stati in BV) e b) $-1V$ (in chiaro gli stati in BC). È evidenziato il legame π tra gli atomi di Si.

Un'altra variante è rappresentata dalla tecnica CITS (Current Imaging Tunneling Spectroscopy), che consiste, per ciascun pixel

³Quando si parla di ricostruzione si intende evidenziare come la periodicità fondamentale degli atomi di superficie sia diversa da quella del materiale massivo sottostante. Poiché i legami sono di tipo covalente, in superficie si avrebbe un grande numero di legami liberi (dangling bonds); gli atomi superficiali si riarrangiano in modo da diminuire questo numero, diminuendo così l'energia libera del sistema. Si osserva una specie di superreticolo superficiale, che dà un ordine frazionario negli studi di diffrazione.

della scansione, nell'effettuare la misura a I costante e successivamente disabilitare il circuito di feedback ottenendo le caratteristiche I - V . In questo modo si osserva la localizzazione degli stati in funzione della loro energia e della loro posizione. Da questi spettri è possibile ricavare la densità di stati a E_F+V alla distanza e al potenziale dati dalle condizioni di lavoro [11].

Per evitare il danneggiamento della superficie in esame, l'intensità della corrente viene mantenuta molto bassa, intorno al nA. La si può amplificare, ad esempio, riducendo la separazione tra punta-campione. La dipendenza dalla distanza viene eliminata normalizzando i risultati di conducibilità differenziale dI/dV ottenuti, cioè dividendoli per I/V . Questo permette di confrontarli tra loro, ma ha un ulteriore vantaggio: elimina la dipendenza esponenziale dal potenziale nella formula che lega la corrente alla densità di carica.

La normalizzazione effettuata in questo modo non è corretta quando ci si trova in presenza di materiali con grandi gap di banda: intensità di corrente e conducibilità vanno a zero e il rapporto sopra citato diverge. In questi casi si usa una correzione moltiplicativa della forma $\exp(2k\Delta s)$, con Δs variazione della distanza punta-campione e k inverso della lunghezza di decadimento della corrente di tunnel [12].

5 Tunneling in scienza dei materiali

5.1 Si(111)7×7

Il silicio (111) nella sua ricostruzione superficiale 7×7 è stata la prima superficie studiata con tecniche STM [2] [13]. La ricostruzione 7×7 si osserva per superfici trattate con annealing a T inferiori di 1148 K (a T superiori sarebbe 1×1) ma superiori a 653 K (al di sotto sarebbe 2×1).

La prima osservazione di tale superficie è stata effettuata con tecnica LEED (Low Energy Electron Diffraction) nel 1959 [14], ma si è dovuta attendere la STM per poter formulare un modello accettato [15] detto DAS (dimer-atom-stacking fault). Infatti, per la complessità della cella unitaria, contenente 49 atomi (Fig. 5),

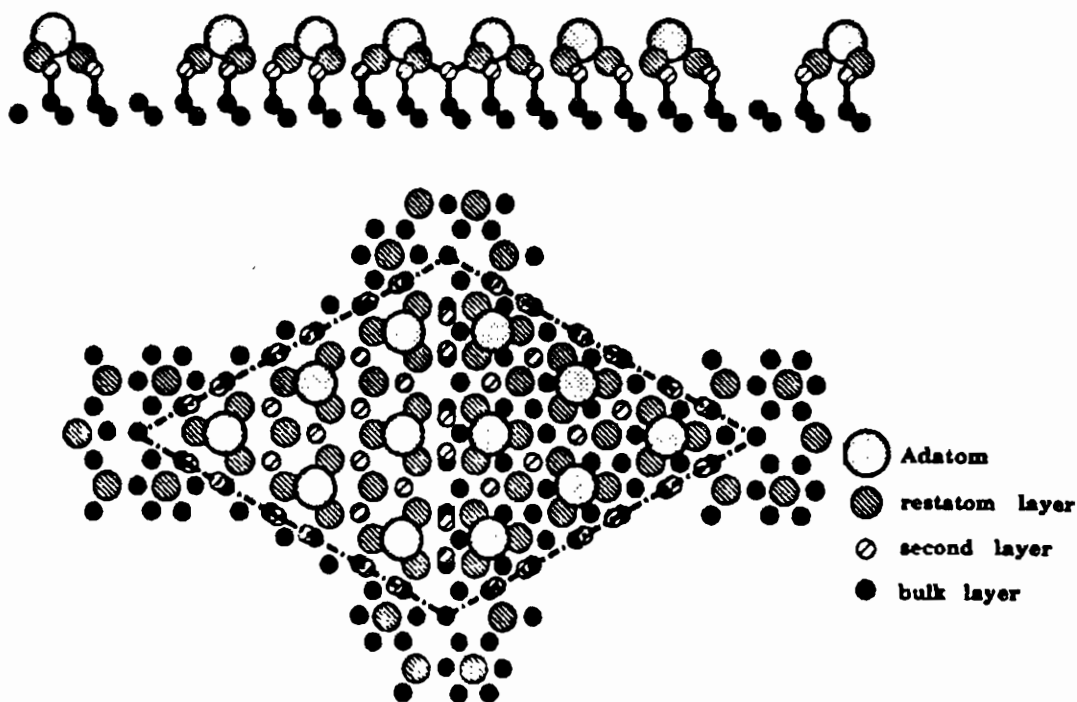


Figura 5: *Schema del Si(111)-7×7 nella struttura DAS.*

non è possibile ricostruire l'immagine in campo reale solamente dai picchi di diffrazione.

Il modello attualmente accettato descrive la superficie del Si(111) come una combinazione di adatom (atomi di Si legati a tre atomi superficiali) e di vacanze posti sopra un substrato di Si. Il riarrangiamento della superficie e dello strato immediatamente sotto di essa è attribuito alle interazioni a corto raggio che minimizzano il numero di dangling bonds. L'altezza apparente delle strutture visualizzata in STM dipende più dalla distribuzione spaziale degli stati elettronici che dalla geometria degli atomi: in Fig. 6a sembra che gli atomi nelle due metà della cella unitaria abbiano altezza diversa, ma cambiando la polarità del campione l'altezza apparente si scambia (Fig. 6b e 6c): in un caso si studia la distribuzione degli stati occupati, nell'altro quella degli stati non occupati.

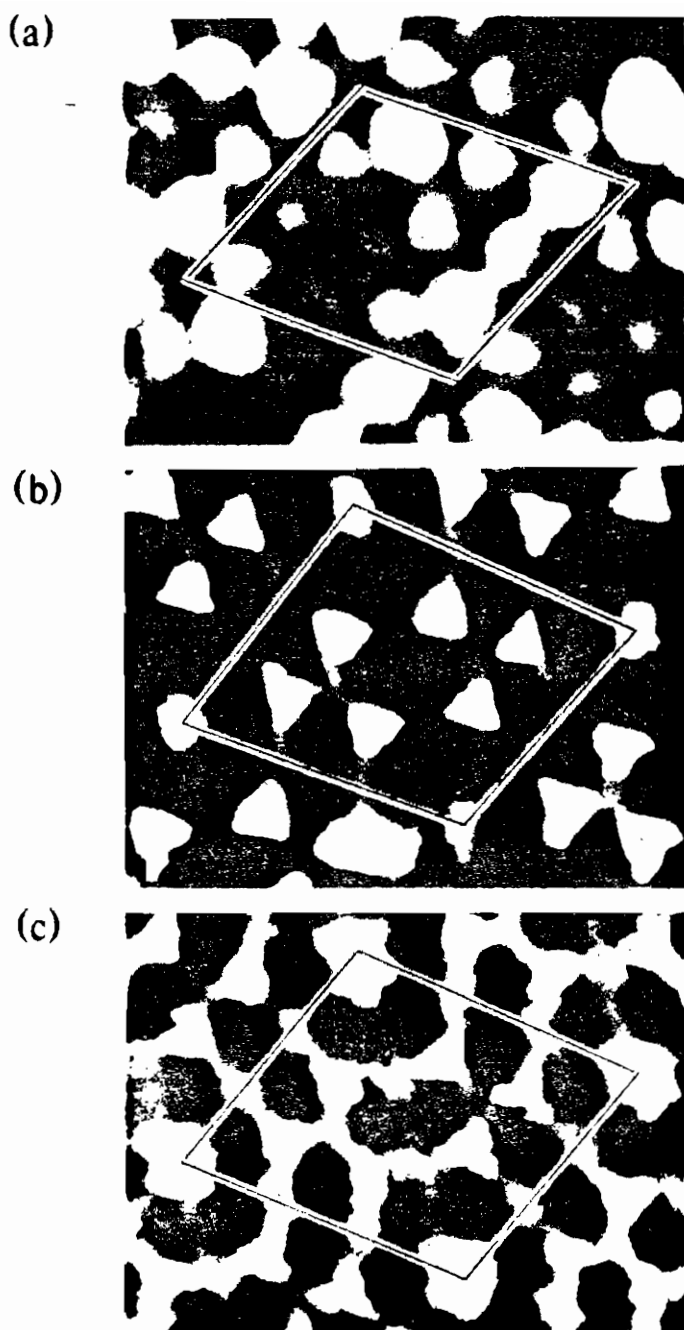


Figura 6: Immagine CITS della superficie del $\text{Si}(111)\text{-}7\times 7$. I potenziali applicati al campione rispetto alla punta sono rispettivamente a)-0.35V, b)-0.8V, c)-1.75V. Il rombo rappresenta la cella unitaria superficiale.

5.2 Onde di densità di carica (CDW)

Le onde di densità di carica sono un fenomeno che si osserva nei composti del tipo MX_2 e MX_3 , con M metallo di transizione (Ta, Nb, V) e X calcogeno (Se, S). Tali composti formano strutture cristalline quasi-unidimensionali o quasi-bidimensionali, dipendenti dalla temperatura di crescita. Si presentano come lunghi cristalli fibrosi caratterizzati da catene di atomi metallici circondati da gabbie trigonali prismatiche di atomi calcogeni.

L'interazione fra elettroni e fononi produce un'interazione fra elettroni e buche, che dà luogo a una transizione da uno stato metallico a uno stato di isolante. Tale transizione è caratterizzata da uno stato coerente a lungo range del gas elettronico, descritto come trasferimento di elettroni in un'onda stazionaria. La modulazione della densità di carica dello stato risultante ha periodicità pari a due o più vettori reticolari (Fig. 7) ed è data da:

$$\Delta\rho = \rho_1 \cos(2k_F x + \phi) \quad (5.1)$$

con k_F vettore d'onda di Fermi, x coordinata spaziale e ϕ, ρ_1 costanti.

Tale fenomeno è determinato da una divergenza nella suscettività elettronica completa $\chi(q)$ [16], che è dovuta all'interazione non solo tra elettroni ma anche tra elettroni e fononi e a effetti di correlazione-scambio. Essa è legata alla suscettività elettronica semplice $\chi^0(q)$ dalla relazione:

$$\chi(q) = \chi^0(q) \frac{1}{1 - X(q)\chi^0(q)} \quad (5.2)$$

dove $X(q)$ riflette la simmetria della superficie di Fermi (FS). Tale formula è ricavata nella teoria RPA (Random Phase Approximation), ed è chiaro che si ha una divergenza quando $X(q) \simeq 1/\chi^0(q)$. Poiché $X(q)$ ha sempre valori abbastanza piccoli, deve essere grande $\chi^0(q)$. Affinché $\chi^0(q)$ sia grande, grandi aree della superficie di Fermi devono venire separate dallo stesso vettore d'onda. Se la struttura è cilindrica o planare, questa condizione viene soddisfatta, quindi è favorita, in ultima analisi, la formazione di onde di densità di carica.

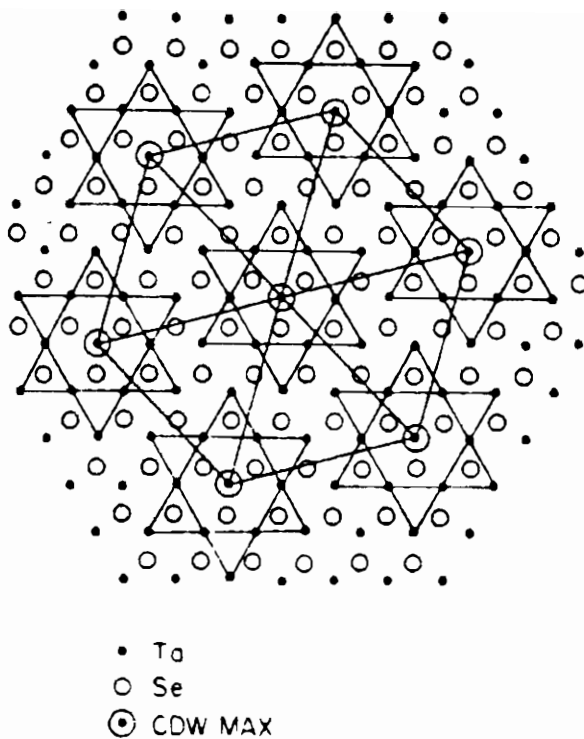


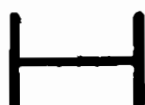
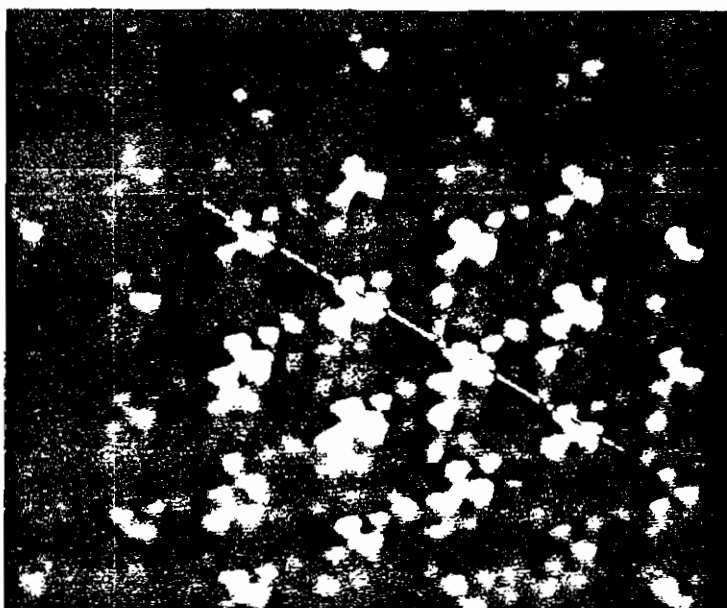
Figura 7: Supercella CDW con clusters di 13 atomi di Ta in composti $TaSe_2$ e TaS_2 .

Riassumendo, si ha instabilità quando l'interazione elettrone-fonone supera il termine elettrostatico, ma condizione necessaria è che sia grande il termine $\chi^0(q)$ ⁴.

Il picco presente in $\chi^0(q)$ a $T \simeq 0K$ diminuisce e si allarga all'aumentare di T : si ha quindi divergenza solo quando la temperatura è al di sotto di un certo valore. Sopra tale valore la transizione allo stato CDW non ha luogo e il materiale continua ad avere comportamento metallico.

La formazione di CDW è accompagnata da una distorsione del reticolo, poiché è richiesto un moto ionico per schermare la modulazione elettronica. Tale distorsione viene osservata con tecniche di diffrazione di raggi X, elettroni e neutroni.

⁴Lo stato fondamentale in teoria del campo medio, con coppie buca-elettrone aventi momento totale $q=2k_F$ e un gap per le eccitazioni di carica nello spettro in E, è simile allo stato superconduttore della teoria BCS.



1 nm

Figura 8: Immagine STM di atomi e CDW sulla superficie di un cristallo di TaS_2 . È evidente il superreticolo ruotato rispetto al reticolo atomico.

L'interazione elettrone-fonone modifica la densità locale degli stati in corrispondenza alla FS, provocando la formazione di un gap di energia che annulla in parte o addirittura completamente la FS. Poiché la STM misura la LDOS al livello di Fermi, e la CDW, come detto, modifica la LDOS, provocando la formazione di una struttura nodale con periodicità corrispondente alla cella unitaria coinvolta nel collasso della FS, è possibile misurare in STM le ampiezze di CDW, ad esempio nel modo a I costante (Fig. 8).

Misure spettroscopiche sono state utili nel determinare una ben definita struttura di gap nei materiali CDW. Tali gap sono grandi se paragonati ai valori determinati dal debole accoppiamento BCS, e questo spiega la stabilità di tali strutture anche a temperature T relativamente alte.

A T ambiente si osserva una modulazione a lungo raggio dell'ampiezza

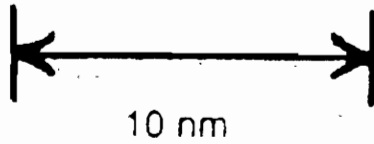
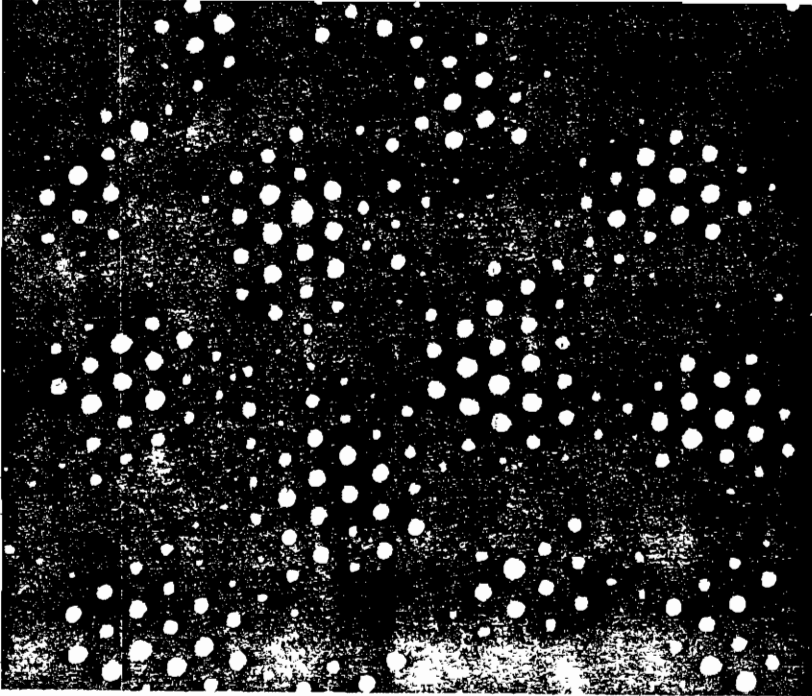


Figura 9: *Immagine STM di TaS₂ a T ambiente; è messa in rilievo la struttura bidimensionale risultante dalla modulazione in ampiezza della CDW.*

di CDW [17], attribuita all'interferenza tra modulazione CDW e modulazione prodotta dagli atomi di S o di Se superficiali, che provocano locali variazioni nel trasferimento di carica. Le prime osservazioni risalgono al 1989 e hanno messo in luce come il periodo di tali modulazioni sia di circa 6 CDW, con variazioni anche del 46 per cento (Fig. 9). La STM e la microscopia a forza atomica (AFM) si sono rivelate le uniche tecniche sperimentali che possono evidenziare tale struttura in dettaglio.

6 Conclusioni

L'accuratezza e la sensibilità della tecnica di microscopia a scansione a effetto tunnel ne fanno un prezioso metodo di indagine di superfici. Essa permette di rilevare immagini tridimensionali di superfici con risoluzioni a livello atomico, su scala locale nello spazio reale. Altre tecniche di analisi di superficie (XRD e tecniche diffrattive in generale) danno informazioni nello spazio reciproco. La microscopia elettronica (SEM e TEM) lavora in vuoto su campioni appositamente preparati, con costi decisamente superiori alla STM.

Riferimenti bibliografici

- [1] *Scanning Tunneling Microscopy*, ed. by J. A. Stroscio and W. J. Kaiser (Academic Press, 1993).
- [2] G. Binnig, H. Rohrer, C. Berger and E. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **49**, 57 (1982).
- [3] C. J. Chen, *Introduction to Scanning Tunneling Microscopy* (Oxford University Press, 1993).
- [4] J. Tersoff and D. R. Hamann, *Phys. Rev. B* **31**, 805 (1985).
- [5] P. Martensson and R. M. Feenstra, *Phys. Rev. B* **39**, 7744 (1989).
- [6] J. A. Stroscio, R. M. Feenstra and A. P. Fein, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 2579 (1986).

- [7] N. D. Lang, *Phys. Rev. B* **37**, 10395 (1988).
- [8] J. E. Demuth, U. Koehler and R. J. Hamers, *J. Microscopy* **152**, 299 (1988).
- [9] U. Durig, O. Zuger and D. W. Pohl, *J. Microsc.* **152**, 259 (1988).
- [10] J. A. Stroscio, R. M. Feenstra, D. M. New and A. P. Fein, *J. Vac. Sci. Technol. A* **6**, 499 (1988).
- [11] G. Chiarotti and S. Selci, *II Scuola Nazionale di Scienza dei Materiali* (1991).
- [12] P. Martensson and R. M. Feenstra, *Phys. Rev. B* **39**, 7744 (1989).
- [13] G. Binnig, H. Rohrer, C. Gender and E. Weibel, *Phys. Rev. Lett.* **50**, 120 (1989).
- [14] R. E. Schlier and H. E. Farnsworth, *J. Chem. Phys.* **30**, 917 (1959).
- [15] K. Takayanagi, Y. Tanishiro, M. Takahashi and S. Takahashi, *J. Vac. Sci. Tech. A* **3**, 1502 (1985).
- [16] J. Tersoff, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 440 (1986).
- [17] C. G. Slough et al., *Phys. Rev. B* **42**, 9255 (1990).

Volume I - n. 1 4/3/1986	CINQUANTA ANNI DI INTERAZIONI DEBOLI: DALLA TEORIA DI FERMI ALLA SCOPERTA DEI BOSONI PESANTI - Marcello Conversi	pag. 1
Volume I - n. 2 1/7/1986	EFFECTS OF DIOXINS ON NATURE AND SOCIETY - Opening talk, Sergio P. Ratti	pag. 3
	DIOXIN IN MISSOURI - Arnon F. Yanders	pag. 11
	DEMONSTRATION OF INNOVATIVE REMEDIAL ACTION TECHNOLOGIES AT UNITED STATES MILITARY DIOXIN CONTAMINATED SITES - Terry L. Stoddard	pag. 23
	TIMES BEACH DIOXIN RESEARCH FACILITY - Robert J. Schreiber	pag. 41
	E.P.A. RISK ASSESSMENT OF CHLORINATED DIBENZO-P-DIOXIN AND DIBENZOFURANS (CCDs/CDFs) - Donald G. Barnes, Patricia Roberts	pag. 51
	RECENT INTERNATIONAL COOPERATION IN EXCHANGE OF INFORMATION ON DIOXIN - Donald G. Barnes	pag. 63
Volume II - n. 1 15/9/1987	CHLORACNE AND THE AGENT ORAGE PROBLEM IN THE U.S.A. - B. Fischmann	pag. 69
	CONVEGNO SU "LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITA- ZIONALE" - MOTIVAZIONI DEL CONVEGNO - Sergio P. Ratti	pag. 3
	LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITAZIONALE: UN PROBLEMA APERTO - Sergio P. Ratti, Roberto Silvotti	pag. 5
	SVILUPPI RECENTI SULLA CONOSCENZA DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE - Anna Grassi, Giuliano Strini	pag. 19
	LIMITI SPERIMENTALI SULLA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' - Roberto Cassinis	pag. 31
	CONSEGUENZE SPERIMENTALI DELLA IPOTESI DI ESISTENZA DI UNA QUINTA INTERAZIONE - Fabrizio, Massa	pag. 43
	VERIFICA DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA E FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI - Bruno Bertotti	pag. 81
Volume II - n. 2 10/12/1987	TRANSIZIONE LIQUIDO SOLIDO - Mario Tosi	pag. 3
	EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - Emilio Zavattini	pag. 27
Volume III - n. 1 6/6/1988	METODI DI DILATAZIONE ANALITICA E RISONANZE IN SISTEMI QUANTISTICI NON RELATIVISTICI - Fausto Borgonovi	pag. 1
	CAMPO ELETTRICO ED EMISSIONI DA CARICHE IN UN MEZZO - Michele Spada	pag. 13
	SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE DI SUPERRETTICOLI SEMICONDUKTORI - Luciano Colombo	pag. 29
	SOLITONI IN FISICA NUCLEARE - Marco Radici	pag. 51
	ASPETTI NON LOCALI DEL COMPORTAMENTO QUANTISTICO - Oreste Nicosini	pag. 83
Volume III - n. 2 4/7/1988	CARATTERIZZAZIONE OTTICA IN SITU DI FILMS SOTTILI - Alessandra Piaggi	pag. 1
	TRANSIZIONI DI WETTING - Tommaso Bellini	pag. 23
	FORZE A TRE CORPI NEI GAS RARI - Silvia Celi	pag. 49
Volume III - n. 3 15/12/1988	FLAVOUR PHYSICS - Luciano Maiani	pag. 1
	THE STANDARD ELECTROWEAK MODEL: PRESENT EXPERIMENTAL STATUS - Pierre Darrulat	pag. 27
	WHY BE EVEN-HANDED? - Martin M. Block	pag. 47
Volume IV - n. 1 6/4/1989	LA FISICA DEI COLLIDER - Paolo Bagnaia, Fernanda Pastore	pag. 1
Volume IV - n. 2 15/6/1989	SOLAR WIND AND PHYSICS OF THE HELIOSPHERE - Bruno Coppi	pag. 2
	THE IGNITOR PROJECT - Bruno Coppi, Francesco Pegoraro	pag. 32
Volume IV - n. 3 15/9/1989	SPETTROSCOPIA ELLISSOMETRICA NEI SOLIDI - Alessandra Piaggi	pag. 3
	UNA INTRODUZIONE AL SUPERCONDUCTING SUPERCOLLIDER - R. Diaferia	pag. 23
	FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI - Fausto Borgonovi	pag. 49
Volume V - n. 1 15/3/1990	MULTI-BODIED PHASE SPACE - A NEW APPROACH - Martin M. Block	pag. 1
	SCATTERING BRILLOUIN RISONANTE - Cristina Bosio	pag. 20
	METODO DI RINORMALIZZAZIONE PER LO STUDIO DELLA STRUTTURA ELET- TRONICA DI SUPPERRETTICOLI - Saverio Moroni	pag. 40
	MECCANISMI DI CONDUCIBILITA' IONICA MEDIATI DA DIFETTI ESTRINSECI - IL CASO DEL QUARZO - Alberto Paleari	pag. 57
	STATISTICHE QUANTISTICHE ED INDISTINGUIBILITA' - Gianluca Introzzi	pag. 69
Volume V - n. 2 15/6/1990	FISICA DELLE ALTE ENERGIE ALLE KOAN FACTORIES - Renato Diaferia	pag. 1
	NEUTRONI FREDDI E NEUTRONI ULTRAFREDDI - Gianluca Raselli	pag. 15
	TRANSIZIONI ORDINE-DISORDINE NELLE DISPERSIONI COLLOIDALI - Paolo Di Trapani	pag. 51
Volume VI - n. 1 p. I - 11/10/1991	LE UNITA' DI MISURA DELLA RADIOPROTEZIONE - Sergio P. Ratti	pag. 1
	L'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Giuseppe Belli	pag. 7
	NORMATIVA E PRINCIPI DI RADIOPROTEZIONE - Argeo Benco	pag. 17
	APPENDICE 1 - Pubblicazioni I.C.R.P. - Argeo Benco	pag. 56
	APPENDICE 2a) - Il regime giuridico dell'impiego pacifico dell'energia nucleare	pag. 59
	APPENDICE 2b) - Elenco di provvedimenti di interesse per le attività di impiego pacifico dell'energia nucleare e delle radiazioni ionizzanti	pag. 64
	APPENDICE 2c) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative all'utilizzazione delle sostanze radioattive e delle macchine radiogene	pag. 78
	APPENDICE 2d) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative al trasporto delle sostanze radioattive	pag. 85
	RADIOATTIVITA' AMBIENTALE E RADIOECOLOGICA - Arrigo Cigna	pag. 87

	EFFETTI BIOLOGICI DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI - Marco Caprotti	pag. 107
Volume VI - n. 1	MODELLO PREVISIONALE DELLA CONCENTRAZIONE DI ^{90}Sr , ^{134}Cs E ^{137}Cs	
p. II - 11/10/1991	NELLA CATENA ALIMENTARE - Arrigo Cigna	pag. 117
	L'AMBIENTE E LA RADIOPROTEZIONE IN RELAZIONE AD INCIDENTI NUCLEARI - Arrigo Cigna	pag. 131
	INCIDENTE NUCLEARE "CHERNOBYL" E SUE RIPERCUSSIONI SULLA CATENA ALIMENTARE - R. Cazzaniga, G. Dominici, A. Malvicini, E. Sangalli	pag. 157
	PRIMA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO RADIOLOGICO AMBIENTALE NELLA ZONA DI ISPRA IN RELAZIONE ALL'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Argeo Benco	pag. 177
	APPROCCIO FRATTALE ALLA DESCRIZIONE DELLA RADIOATTIVITA' IN ARIA IN ITALIA DOPO CHERNOBYL - Gianfausto Salvadori	pag. 201
Volume VII - n. 1	ELECTRON ENERGY LOSS SPECTROSCOPY - Marco Amiotti	pag. 1
15/3/1992	LIVELLI ELETTRONICI PROFONDI IN SEMICONDUTTORI E LORO CARATTERIZZAZIONE - Adele Sassella	pag. 35
	LA RICERCA DEL BOSONE DI HIGGS AI FUTURI ACCELERATORI - G. Montagna	pag. 57
Volume VII - n. 2	SIMMETRIA CHIRALE E TEOREMA DI GOLDBERGER-TREIMAN - Carlo Gobbi	pag. 81
15/10/1992	CRESITA, CARATTERIZZAZIONE ED APPLICAZIONI DEI LANGMUIR-BLODGETT FILMS - Marco Amiotti	pag. 1
	LA CATODOLUMINESCENZA - Vittorio Bellani	pag. 35
	CORRELAZIONI ELETTRONICHE IN OSSIDI DI METALLI DI TRANSIZIONE - Luigi Sangaletti	pag. 63
Volume VIII - n. 1	TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA - Alberto Vancheri	pag. 1
15/1/1993	ROTTURA ESPLICITA E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi	pag. 25
	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 39
	EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto	pag. 75
Volume VIII - n. 2	L'UNITA' DELLA SCIENZA. IL CASO DELLA FISICA, OGGI - G. Salvini	pag. 1
15/4/1993	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 37
	MODELLO A TETRAEDRI PER LA FUNZIONE DIELETTRICA DI SOLIDI AMORFI - A. Sassella	pag. 73
	INTRODUZIONE ALLE RETI NEURALI - C. Macchiavello	pag. 93
Volume VIII - n. 3	RPC: STATUS AND PERSPECTIVES - R. Santonico	pag. 1
15/6/93	PERFORMANCE OF E771 RPC MUON DETECTOR - E. Gorini (E771 Coll.)	pag. 13
	THE MUON TRIGGER HODOSCOPE OF THE BEAUTY HADRO-PRODUCTION EXPERIMENT WA92; PERFORMANCES AND PRELIMINARY RESULTS ON BEUTY MUONIC DECAYS - G. Martellotti, D. Orestano (Beatrice Coll.)	pag. 29
	THE RPC TRIGGER SYSTEM FOR THE L3 FORWARD BACKWARD MUON DETECTOR - S. Patricelli	pag. 37
	RESULTS FROM THE RD5 EXPERIMENT AT CERN - A. Di Ciaccio (RD5 Coll.)	pag. 45
	LEVEL 1 MUON TRIGGER IN THE ATLAS EXPERIMENT AT THE LARGE HADRON COLLIDER - A. Nisati (ATLAS Coll.)	pag. 61
	RPC BASED MUON TRIGGER FOR THE CMS DETECTOR AT LHC - G. Wrochna (CMS Coll.)	pag. 73
	AN RPC MUON SYSTEM FOR SDC AT SSCL - G. Introzzi (Pavia SDC Group)	pag. 83
	A MUON TRIGGER FOR LHB - R. Santacesaria	pag. 103
	MINI: A HORIZONTAL MUON TELESCOPE IMPLEMENTED WITH RESISTIVE PLATE CHAMBERS - G. Iaselli	pag. 115
	T&T: A NEW DESIGN FOR A FRONT-END TIME DIGITIZER ELECTRONICS	
	M. Ambrosio, G.C. Barbarino, A. Lauro, G. Osteria, G. Agnetta, O. Catalano, L. Scarsi, A. Lanza, G. Liguori, P. Torre	pag. 123
	ATMOSPHERIC AND ACCELERATOR NEUTRINO PHYSICS WITH RPCS IN THE SOUDAN 2 CAVERN - D.J.A. Cockerill	pag. 133
	STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS IN THE RD5 EXPERIMENT - L. Pontecorvo (RD5 Coll.)	pag. 145
	OPERATION OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS WITH PURE CF_3BR - R. Cardarelli	pag. 159
	WLDC: A DRIFT CHAMBER WITH A PAD RPC FOR MUON DETECTION AT LHC	
	H. Faissner, Th. Moers, R. Priem, B. Razen, D. Rein, H. Reithler, D. Samm, R. Schleichert, H. Schwarhoff, H. Tuchscherer, H. Wagner	pag. 167
	GLASS ELECTRODE SPARK COUNTER - G. Bencivenni, G. Felici, E. Iacussa, C. Gustavino, M. D'Incecco	pag. 181
	RPC READOUT FOR PARTICLE ASTROPHYSICS - M. Bonori, U. Contino, F. Massa	pag. 193
	RESULTS OF TESTS OF PROTOTYPE RESISTIVE PLATE CHAMBERS - I. Crotty, J. Lamas Valverde, G. Laurenti, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 199
	GLASS ELECTRODES RPC: PERFORMANCE AND WORKING MODEL - M. Bonori, U. Contino, F. Massa	pag. 207
	FAST PARALLEL RPC READOUT SYSTEM - A. Lanza, G. Liguori, P. Torre, M. Ambrosio, G.C. Barbarino, M. Iacovacci, A. Lauro, G. Osteria, G. Agnetti, O. Catalano, L. Scarsi	pag. 219
	DATA ACQUISITION SYSTEMS DEVELOPED AT CAEN - F. Catarsi, C. Landi, G. Franchi, M. Lippi	pag. 225

Volume IX - n. 1 15/4/1994	RETICOLI DISORDINATI: IL MODELLO DI ANDERSON - R. Farchioni BREVE INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUANTISTICA DELLA STIMA - M. Paris SUSY - M. Cacciari MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS NEL MODELLO STANDARD - F. Piccinini	pag. 1 pag. 23 pag. 36 pag. 79
Volume IX - n. 2 15/11/94	DIELETTROFORESI: LIEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO - L. Laboranti PROPRIETÀ FISICHE DI CLUSTER METALLICI - V. Bellani APPLICAZIONI DI RETI NEURALI ALLA FISICA DELLE ALTE ENERGIE - P. Vitulo CRITTOGRAFIA QUANTISTICA - C. Macchiavello IL "PARADOSSO" DEI GEMELLI - M. Cacciari TRANSIZIONI DI FASE NEL PRIMO UNIVERSO - S. Rolli SULLA STABILITÀ DINAMICA DELLA BICICLETTA - M. Paris FISICA DELLE INTERAZIONI FONDAMENTALI CON NEUTRONI FREDDI	pag. 97 pag. 1 pag. 18 pag. 47 pag. 64 pag. 77 pag. 102
Volume X - n. 1 15/3/95	A. Guglielmi EFFETTO DELLA DISPERSIONE SPAZIALE SULL'ASSORBIMENTO ECCITONICO DEI CRISTALLI - G. Panzarini IL CAMPO ELETTRICO GENERATO DA UNA CARICA PUNTIFORME IN MOVIMENTO IN UN MEZZO ISOTROPO - U. Bellotti SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE A RISOLUZIONE TEMPORALE - P. Calvi IL CONTROLLO DEI SISTEMI CAOTICI - M. Maris ASPETTI SPERIMENTALI DELLA FISICA DEI MESONI B A LEP - L. Viola AN INTRODUCTION TO THE PERTURBATIVE QCD POMERON AND TO JET PHYSICS AT LARGE RAPIDITIES - V. Del Duca DIFFUSIONE DI LUCE DA SUPERFICI RUGOSE - M. Patrini PRINCIPI E APPLICAZIONI DELLE SPETTROSCOPIE A DIFFRAZIONE DI ELETTRONI - L. Rossi IONI DI TERRE RARE IN SEMICONDUTTORI - E. Pavarini PERDITA DI ENERGIA PER IONIZZAZIONE - P. Montagna TOPICS IN RESISTIVE PLATE CHAMBERS - R. Santonico THE AVALANCHE TO STREAMER TRANSITION IN RPC'S - R. Cardarelli, R. Santonico, V. Makeev A MODEL OF AVALANCHE TO STREAMER TRANSITION IN PPC/RPC DETECTORS - P. Fonte NEW DEVELOPMENTS OF RPC: SECONDARY ELECTRON EMISSION AND MICROSTRIP READOUT - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, P. Fonte, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, V. Peskov, M.C.S. Williams, A. Zichichi THE RPC SYSTEM FOR THE CMS EXPERIMENT AT LHC - G. Wrochna RPC TRIGGER DESIGN FOR THE FUTURE EXPERIMENT CMS - G. De Robertis, M. Gorski, M. Konecki, J. Krolikowski, I.M. Kudla, M. Lewandowski, F. Loddo, K. Pozniak, A. Ranieri, G. Wrochna THE LEVEL-1 MUON TRIGGER ALGORITHM OF THE ATLAS EXPERIMENT - A. Nisati RESISTIVE PLATE COUNTERS FOR THE BELLE DETECTOR AT KEKB - N. Morgan PRELIMINARY DESIGN OF THE BABAR DETECTOR FOR MUONS AND NEUTRAL HADRONS AT PEP II - N. Cavallo THE RPC FORWARD-BACKWARD TRIGGER SYSTEM OF THE L3 EXPERIMENT - P. Paolucci PERFORMANCES OF THE RPC TRIGGER SYSTEM IN THE L3 EXPERIMENT - R. De Asmundis USE OF RPC IN THE COVER PLASTEX EXPERIMENT - C. Agnetta, M. Ambrosio, C. Aramo, G.C. Barbarino, B. Biondo, O. Catalano, L. Colesanti, A. Erlykin, A. Lauro, A. Mangano A TEST OF THE ATLAS FIRST LEVEL MUON TRIGGER LOGIC - S. Veneziano CAEN ELECTRONICS FOR RESISTIVE PLATE CHAMBERS - A. Bigongiari, G. Franchi, G. Grieco, C. Landi, M. Lippi, F. Vivaldi TESTS OF RPC PROTOTYPES IN RD5 DURING 1994 RUNS - H. Czyrkowski, W. Dominik, J. Krolikowski, M. Lewandowski, Z. Mazur, M. Gorski, M. Szeptycka A TEST ON RESISTIVE PLATE CHAMBERS WITH NON OZONE DEPLETING FREON - M. Abbrescia, A. Colaleo, G. Iaselli, M. Maggi, B. Marangelli, S. Natali, S. Nuzzo, A. Ranieri, F. Romano, G. Gianini, G. Liguori, S.P. Ratti, P. Vitulo, M. Gorski STUDY OF ELECTRODE SURFACE TREATMENT EFFECTS ON BAKELITE RPC'S PERFORMANCES - M. Abbrescia, A. Colaleo, G. Iaselli, M. Maggi, B. Marangelli, S. Natali, S. Nuzzo, A. Ranieri, F. Romano, V. Arena, G. Boca, G. Bonomi, G. Gianini, G. Liguori, M. Marchesotti, M. Merlo, C. Riccardi, L. Viola, P. Vitulo RESISTIVE PLATE CHAMBER PERFORMANCES AT GREAT ALTITUDES - M. Abbrescia, E. Bisceglie, G. Iaselli, S. Natali, F. Romano EFFECTS INDUCED BY DIFFERENT KINDS OF FREON ON THE RPC CHARGE ACCUMULATION - V. Arena, G. Boca, G. Bonomi, G. Gianini, G. Liguori, C. Riccardi, L. Viola, P. Vitulo TEST OF LOW GAS GAIN RPC'S WITH OZONE AND NON OZONE DEPLETING GAS MIXTURES - A. Di Ciaccio POSITION MEASUREMENT IN RPC'S BY TOF - G.H. Grayer	pag. 1 pag. 79 pag. 105 pag. 1 pag. 25 pag. 59 pag. 91 pag. 1 pag. 25 pag. 49 pag. 85 pag. 1 pag. 11 pag. 25 pag. 45 pag. 63 pag. 79 pag. 91 pag. 101 pag. 115 pag. 129 pag. 139 pag. 157 pag. 177 pag. 187 pag. 197 pag. 217 pag. 229 pag. 245 pag. 255 pag. 263 pag. 273
Volume X - n. 2 15/6/95		
Volume X - n. 3 15/12/95		
Volume XI - n. 1 15/6/96		

POSSIBLE USE OF RPCs IN THE MINOS EXPERIMENT - G.H. Grayer	pag. 279
RESISTIVITY MEASUREMENTS ON RPC MATERIALS - G.H. Grayer	pag. 285
WHAT HAVE WE LEARNED FROM A COMPARISON BETWEEN THE WIDE GAP AND NARROW GAP RESISTIVE PLATE CHAMBER - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, S. Neupane, V. Peskov, S. Singh, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 295
LATEST RESULTS ON THE PERFORMANCE OF THE WIDE GAP RPC - E. Cerron Zeballos, I. Crotty, D. Hatzifotiadou, J. Lamas Valverde, S. Neupane, V. Peskov, S. Singh, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 317
DEVELOPMENT OF RESISTIVE PLATE COUNTERS FOR THE PIERRE AUGER COSMIC RAY OBSERVATORY - P.O. Mazur	pag. 331
THIN GAP CHAMBER: PERFORMANCE AS A TIME AND POSITION MEASURING DEVICE - Y. Ari, E. Barberio, T. Emura, J. Goldberg, K. Homma, M. Ikeno, M. Imori, K. Ishii, H. Ishiwaki, T. Kawamoto, T. Kobayashi, D. Lelloch, L. Levinson, N. Lupu, G. Mikenberg, M. Miyake, K. Nagai, T. Nagano, I. Nakamura, M. Nomachi, M. Nozaki, S. Odaka, T.K. Ohoka, O. Sasaki, H. Shirasu, H. Takeda, T. Takeshida, S. Tanaka, C. Yokoyama	pag. 349
RECENT STUDIES OF PARALLEL PLATE CHAMBERS FOR LHC EXPERIMENTS - A. Arefiev, G.L. Bencze, A. Bizzeti, E. Choumilov, C. Civinini, G. Dajkó, R. D'Alessandro, M.I. Josa, A. Malinin, M. Meschini, J. Molnár, V. Pojidaev, J.M. Salicio, F. Siklér, G. Vesztergombi	pag. 359
ABS PLASTIC RPCs - E. Ables, R. Bionta, H. Olson, L. Ott, E. Parker, D. Wright, C. Wuest	pag. 373
PERFORMANCES AND SIMULATION OF GLASS SPARK CHAMBERS - M. De Deo, M. D'Incecco, C. Gustavino, G. Bencivenni, G. Felici	pag. 387
R&D OF GLASS RPCs FOR THE BELLE DETECTOR - Y. Teramoto, A. Yamaguchi and Y. Hoshi	pag. 401
SOME RESULTS OF RESISTIVE PLATE COUNTER AND THE PROPOSAL TO TAU-CHARM FACTORY OF BEIJING - J.G. Bian, Y.B. Chen, H.G. Han, K.L. He, Y.Y. Jiang, X.L. Wang, Y.G. Xie, Y. Xu, C.S. Yang, G.A. Yang, Y. Yang, Z.T. Yu, J.Q. Zhang, Q.J. Zhang	pag. 419
THE FOCUS EXPERIMENT RPC MUON IDENTIFICATION ARRAY - P.D. Sheldon	pag. 437
ANTIGRAVITÀ E VIOLAZIONE DI CP - A. Filippi	pag. 1
MICROCAVITÀ A SEMICONDUITTORE - R. Seno	pag. 19
BANDE FOTONICHE E LA LOCALIZZAZIONE DELLA LUCE - R. Farchioni	pag. 59
CORRELAZIONE DIPOLARE IN CATENE POLIMERICHE DI TIPO VINILICO - P. Montagna	pag. 83
IL LASER AD ELETTRONI LIBERI E LE SUE APPLICAZIONI NELLA FISICA DELLO STATO SOLIDO - S. Bocelli	pag. 99