

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

SCIENTIFICA ACTA

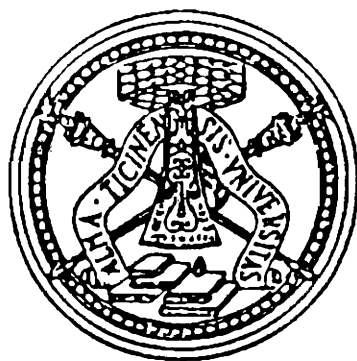
QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME VIII

ANNO VIII

NUMERO 1

15 GENNAIO 1993



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

CENTRO STAMPA - DIPARTIMENTI FISICI
via Bassi, 6 27100 Pavia

INDICE

- | | | |
|-----|---|---------|
| 1 - | TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA -
Alberto Vancheri | pag. 1 |
| 2 - | ROTTURA ESPlicita E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE
GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi | pag. 25 |
| 3 - | APPLICAZIONI DELLA μ^+ SR NELLA STRUTTURA DELLA
MATERIA - P.Carretta | pag. 39 |
| 4 - | EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto | pag. 75 |

Alberto Vancheri

**Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica**

**TEORIA DELLE STRINGHE
IN DIMENSIONE NON CRITICA**

Seminario tenuto il 6 Dicembre 1991

INTRODUZIONE

Nella presente trattazione, la teoria delle stringhe non verrà affrontata storicamente, in connessione cioè a quelle problematiche che ne hanno giustificato l'introduzione, ma da un punto di vista formale. In questo senso non farò alcun accenno a questioni riguardanti il tipo di applicazioni della teoria, e il suo eventuale successo.

La nostra attenzione sarà al contrario rivolta alla teoria delle stringhe come teoria che descrive la dinamica di oggetti estesi, in contrapposizione alle usuali teorie di campo che descrivono la dinamica di oggetti puntiformi, le particelle. In questo senso approfondiremo le connessioni della teoria delle stringhe con la teoria delle superfici random e quindi con le teorie di campo conformi e lo studio dei fenomeni critici. La trattazione ha un carattere assolutamente elementare ed introduttivo, ed è volta all'inquadramento delle suddette tematiche e alle loro interconnessioni più che all'approfondimento dei modelli e ai risultati ottenuti.

Fra gli approcci sviluppati per lo studio della dinamica di oggetti estesi, uno fra i più interessanti è quello che fa uso di triangolazioni random di superfici. Dedicheremo il capitolo 4 alla definizione di un modello particolare, ricordando però che sono stati proposti anche altri modelli; quelli trattati in [10], [11] e [12] sono alcuni interessanti esempi.

Teorie di superfici random compaiono naturalmente in molti settori della fisica quali, oltre alle già citate stringhe, la gravità quantistica bidimensionale e lo studio dei fenomeni critici in tre dimensioni.

In tutti i casi il problema è sempre quello di fornire una opportuna nozione di somma su superfici, opportunamente pesate da una azione, allo scopo di ricavare i propagatori quantistici e le funzioni di correlazione.

Il modo forse più semplice ed intuitivo per dare una veste matematica precisa al concetto di somma sulle superfici, è quello di ricorrere ad una discretizzazione delle superfici su cui si intende sommare, per poi recuperare in un secondo momento il limite continuo della teoria.

Vedremo nel caso particolare della stringa bosonica come que-

ste idee possano essere concretamente applicate. Allo scopo farò prima una digressione sullo studio della dinamica della particella mediante l'uso della teoria dei cammini random. In questo ambito sono già presenti molte delle idee che verranno applicate poi allo studio della stringa. Successivamente introdurrò in forma molto elementare la teoria continua della stringa bosonica, per arrivare poi al concetto di dimensione critica. La parte restante del lavoro è dedicata alla presentazione di un modello discreto e allo studio del suo limite continuo. In conclusione al lavoro si fa infine un breve accenno ai più recenti sviluppi della teoria.

1 - PARTICELLE E STRINGHE

Una particella può essere descritta come un oggetto 0-dimensionale, immerso in uno spazio-tempo d -dimensionale M^d dotato di metrica euclidea:

$$g = \text{diag}(1, \dots, 1).$$

La segnatura euclidea può essere ottenuta da quella lorentziana mediante una rotazione di Wick dell'asse temporale:

$$t \rightarrow -it \tag{1.1}$$

Evolvendo nello spazio-tempo la particella sviluppa una varietà ad una dimensione, la traiettoria o linea di universo.

Nella teoria classica della particella ad ogni traiettoria corrisponde una azione, che nel caso più semplice può essere assunta proporzionale alla lunghezza l della traiettoria stessa:

$$S[\gamma] = -ml(\gamma) \tag{1.2}$$

dove m è interpretabile come massa della particella.

L'ampiezza di probabilità per l'evoluzione di γ_1 in γ_2 è data, analogamente al caso della particella, da una somma sulle possibili varietà che possono essere sviluppate nel corso della evoluzione:

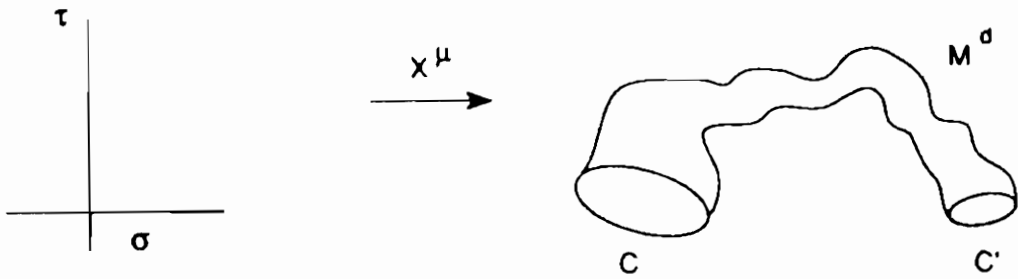
$$G(\gamma_1; \gamma_2) = \sum_S e^{-A[S]} \quad (1.6)$$

dove S è una superficie di contorno γ_1 e γ_2 e A è una azione ancora da definire. La scelta di A che immediatamente generalizza il caso della particella, consiste nell'assegnare a ciascuna superficie S un peso proporzionale alla sua area:

$$A[S] = T \int_S d\sigma d\tau \sqrt{\det g} \quad (1.7)$$

dove g è il tensore metrico indotto su S , σ e τ sono coordinate che parametrizzano i punti della superficie e T è una costante di proporzionalità detta tensione della stringa.

In questo modo la teoria delle stringhe assume naturalmente la forma di una teoria di superfici random. Naturalmente l'espressione (1.6) ha un significato solamente formale e necessita quindi di una opportuna regolarizzazione.



Nell'evolvere tra due punti x ed y in M^d la particella percorre una ben precisa traiettoria, quella che minimizza l'azione. In altre parole valgono le equazioni del moto:

$$\frac{\delta S[\gamma]}{\delta \gamma(t)} = 0. \quad (1.3)$$

Nella teoria quantistica l'evoluzione della particella assume un carattere statistico e la questione di interesse diviene la seguente: *"Quale è la probabilità che, in una operazione di misura della posizione, la particella venga trovata in y quando, in una precedente misura, era stata trovata in x ?"*

Seguendo l'approccio alla Feynman alla meccanica quantistica, ogni cammino in M^d con estremi x ed y contribuisce a tale probabilità con un peso dato dall'esponentiale dell'opposto dell'azione; la probabilità si ottiene facendo il modulo al quadrato della somma dei contributi di ciascun cammino. Più precisamente:

$$P(x; y) = |G(x; y)|^2 \quad (1.4)$$

dove

$$G(x; y) = \sum_{\gamma: x \rightarrow y} e^{-S[\gamma]} \quad (1.5)$$

$G(x; y)$ è il propagatore quantistico della particella libera.

Si osservi che l'espressione (1.5) ha un significato solo formale, in quanto non "è affatto chiaro, matematicamente, il significato da attribuire alla somma sui cammini, e neppure quindi come tale somma possa essere concretamente eseguita. Tornerò più avanti su questo punto.

Da un punto di vista formale una stringa è un oggetto che generalizza a dimensione maggiore il concetto di particella. Penseremo ad una stringa come ad una cordicella chiusa su se stessa ad anello.

Evolvendo liberamente nello spazio-tempo M^d la stringa sviluppa una superficie d'universo bidimensionale il cui contorno è dato dalla stringa iniziale γ_1 e dalla stringa finale γ_2 , come mostrato in figura alla pagina seguente.

2 - LA STRINGA COME TEORIA DI CAMPO CONFORME

Vedremo in questo paragrafo come sia possibile riscrivere l'azione (1.7) in modo tale che la teoria delle stringhe prenda la forma di una teoria di campi scalari con simmetria conforme accoppiati alla gravità bidimensionale ([1] pag. 361-363 e [2] pag. 10-19).

Ciascuna delle superfici S che compaiono nella somma (1.6) può essere parametrizzata con un sistema di coordinate bidimensionale $(\sigma; \tau)$. Ciascun punto della superficie avrà poi coordinate $X^\mu(\sigma; \tau)$ nello spazio di immersione M^d , con $\mu = 1, 2, \dots, d$. Le quantità X^μ specificano interamente la superficie S , le cui proprietà geometriche sono deducibili dalla metrica:

$$\begin{aligned} ds^2 = & g_{\mu\nu} \partial_\tau X^\mu \partial_\tau X^\nu d\tau^2 + \\ & g_{\mu\nu} \partial_\sigma X^\mu \partial_\sigma X^\nu d\sigma^2 \\ & + 2g_{\mu\nu} \partial_\sigma X^\mu \partial_\tau X^\nu d\tau d\sigma \end{aligned} \quad (2.1)$$

Possiamo tuttavia cambiare punto di vista ed immaginare la superficie S intrinsecamente. Su di essa possiamo definire indipendentemente come variabili dinamiche un tensore metrico g e dei campi scalari X^μ , con $\mu = 1, 2, \dots, d$, senza enfatizzare il ruolo di questi ultimi come campi che descrivono l'immersione della nostra superficie in M^d .

Per questo sistema possiamo definire la seguente azione:

$$A[X^\mu] = -\frac{T}{2} \int d\sigma d\tau \sqrt{g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu \quad (2.2).$$

L'azione (2.2) appare a prima vista completamente diversa dalla (1.7); se però ricaviamo le equazioni del vincolo variando rispetto a g e le sostituiamo nella espressione della azione riotteniamo la (1.7) [1].

Si osservi che sotto la trasformazione conforme:

$$g_{ij} \rightarrow g_{ij} e^{\phi(\sigma; \tau)} \quad (2.3)$$

con ϕ funzione arbitraria, la espressione $\sqrt{g} g_{ij}$ rimane invariata, e quindi anche l'azione (2.2).

La teoria delle stringhe rientra in questo modo nel più vasto capitolo delle teorie di campo conformi in due dimensioni, che a loro volta sono in relazione con la teoria dei fenomeni critici in due dimensioni. Si pensi, per esempio, alla invarianza per trasformazioni di scala della distanza, che è una proprietà comune sia alle teorie conformi che ai sistemi al punto critico.

Queste sono considerazioni di estremo interesse anche se non è questa la sede per ulteriori approfondimenti. Per una trattazione approfondita dell'argomento si rimanda a [4].

Accanto alla simmetria conforme l'azione (2,2) presenta anche una invarianza sotto l'azione del gruppo dei diffeomorfismi della superficie S . I diffeomorfismi possono essere visti, localmente, come riparametrizzazioni della superficie:

$$(\sigma; \tau) \rightarrow (\xi_1(\sigma; \tau); \xi_2(\sigma; \tau)) \quad (2.4)$$

La trasformazione (2.4) induce una corrispondente trasformazione sul tensore metrico g , che però rappresenta la stessa situazione fisica.

Le trasformazioni (2.3) e (2.4) sono delle invarianze di gauge della teoria di cui bisogna tenere conto quando si procede alla quantizzazione.

Nella trattazione continua della teoria [3], il propagatore viene scritto come somma su tutti i campi metrici g e su tutti i campi di materia X^μ che vivono sulla superficie S . La (1.5) prende pertanto la forma:

$$G(\gamma_1; \gamma_2) = \int D[g] \int D[X^\mu] e^{-A[X^\mu; g]} \quad (2.5)$$

L'integrale sui campi metrici è ridondante a causa della invarianza della teoria per diffeomorfismi. L'integrale deve essere piuttosto eseguito sullo spazio delle orbite determinato dall'azione del gruppo dei diffeomorfismi di S sullo spazio delle metriche di S . Formalmente questo può essere fatto dividendo la misura di integrazione per il volume del gruppo dei diffeomorfismi che, grazie alla simmetria, fattorizza davanti all'integrale:

$$\int D[g] \rightarrow \int \frac{D[g]}{\text{Vol}(\text{diff}_S)} \quad (2.6)$$

Il sistema però, almeno a livello classico, presenta anche una simmetria conforme data dalla trasformazione (2.3) della metrica.

Se questa fosse una simmetria anche a livello quantistico, sarebbe possibile dividere nella (2.5) anche per il volume formale del gruppo delle trasformazioni conformi. Questo accade però solo se la stringa è pensata immersa in uno spazio dotato di 26 dimensioni ($d=26$ è detta dimensione critica). In caso contrario il campo ϕ che compare nella espressione della trasformazione conforme, non si disaccoppia e diviene così un modo fisico della teoria, detto modo di Liouville.

In dimensione critica l'integrale sulle metriche è finito dimensionale, e può essere valutato esplicitamente. Ogni metrica bidimensionale è determinata infatti, a meno di un diffeomorfismo e di una trasformazione conforme, da un numero finito di parametri, detti moduli della varietà, il cui numero dipende dalla topologia della superficie.

Per dimensioni diverse da quella critica, l'integrale non può essere valutato e il solo modo per affrontare il problema è quello di regolarizzare la somma (1.6) facendo ricorso ad una opportuna discretizzazione delle superfici.

3 - QUANTIZZAZIONE DELLA PARTICELLA LIBERA E PROCESSI STOCASTICI CLASSICI

Prima di affrontare il problema della regolarizzazione del propagatore della stringa, svilupperò con qualche dettaglio il caso più semplice della particella, dove tutte le idee più interessanti sono già presenti.

È noto che esiste uno stretto legame tra processi stocastici classici e propagazione quantistica di una particella. Senza entrare nei dettagli della questione, ([5], [6] e [7]), ci limiteremo ad osservare che in un processo stocastico la distribuzione di probabilità di presenza della particella nel mezzo è determinata ad ogni

istante di tempo quando sia nota la distribuzione iniziale $\rho(\mathbf{x}; t_0)$ ed una probabilità di transizione tra il punto \mathbf{x} all'istante t_0 ed il punto \mathbf{y} all'istante t , mediante l'equazione:

$$\rho(\mathbf{x}; t) = \int d\mathbf{y} P(\mathbf{x}; t | \mathbf{y}; t_0) \rho(\mathbf{y}; t_0) \quad (3.1)$$

Nello stesso modo, in meccanica quantistica, la funzione d'onda è determinata ad un qualsiasi istante di tempo se se ne conoscono il valore iniziale $\Psi(\mathbf{x}; t_0)$ ed il propagatore $\langle \mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0 \rangle$.

Il propagatore quantistico gioca dunque un ruolo del tutto analogo a quello della probabilità di transizione nei processi stocastici.

Entrambi verificano poi l'importantissima proprietà di semigruppato:

$$P(\mathbf{y}; t | \mathbf{x}; t_0) = \int d\mathbf{x}_1 \dots \int d\mathbf{x}_N P(\mathbf{y}; t | \mathbf{x}_N; t_N) P(\mathbf{x}_N; t_N | \mathbf{x}_{N-1}; t_{N-1}) \dots P(\mathbf{x}_1; t_1 | \mathbf{x}; t_0) \quad (3.2)$$

con una espressione del tutto analoga per la particella quantistica.

La (3.2) può essere utilizzata direttamente come punto di partenza per la costruzione di una misura funzionale sullo spazio dei cammini tra (\mathbf{x}_0, t_0) e (\mathbf{x}, t) che permette di esprimere il propagatore o la probabilità di transizione come path integral [6], [7]. Qui seguiremo però una strada un poco differente e arriveremo ad esprimere il propagatore come una somma su cammini discretizzati (linee spezzate) [8], [9], [10]. (La referenza [8] presenta il caso più complesso ma assai interessante di cammini con azione dipendente dalla curvatura estrinseca).

Cominciamo col considerare una particella soggetta ad un processo di diffusione stocastico, che transiti dal punto \mathbf{x} al punto \mathbf{y} in M^d compiendo un numero finito di steps rettilinei. Supponiamo inoltre che il singolo step sia compiuto con una probabilità data da:

$$t_\beta(\mathbf{x}; \mathbf{y}) = \exp(-\beta |\mathbf{x} - \mathbf{y}|) \quad (3.3)$$

dove β è un parametro reale positivo. Naturalmente l'espressione di t_β deve essere opportunamente normalizzata.

La probabilità di transizione tra x ed y è allora data da:

$$P_\beta(x; y) = \sum_N \int dx_1 \dots dx_N t_\beta(x; x_1) \dots t_\beta(x_N; y) \quad (3.4)$$

Si osservi che la (3.4) ricorda la proprietà di semigruppato (3.2), anche se il suo significato è diverso: mentre la (3.2) rappresenta una relazione di compatibilità per la distribuzione P , già assegnata, la (3.4) definisce ex novo una probabilità di transizione a partire dalle t_β .

La (3.4) è una somma su cammini spezzati tra x ed y e rappresenta quindi una versione discreta di un path integral. Naturalmente, a priori, la probabilità definita nella (3.4) è largamente arbitraria e non ha la pretesa di assomigliare, per esempio, ad un moto browniano che, come è noto, descrive la propagazione quantistica di una particella libera [6]. Vedremo tuttavia che, in particolari condizioni, questa arbitrarietà non è affatto rilevante.

Grazie alla indipendenza degli steps successivi, l'integrale nella (3.4) può essere valutato per grandi valori di N facendo uso del teorema del limite centrale:

$$P_\beta(x; y) = \sum_N \left(\frac{c_0}{\beta^{\frac{d}{2}}} \right)^N \frac{1}{(2\pi\sigma_0 N)^{\frac{d}{2}}} \exp\left[-\frac{\beta|x-y|^2}{2\sigma_0 N} \right] \quad (3.5)$$

dove c_0 e σ_0 sono rispettivamente il momento di ordine 0 e di ordine 2 della distribuzione t_β .

La sommatoria (3.5) converge solo per β maggiore di un certo valore critico dato da:

$$\beta_c = c_0^{\frac{2}{d}} \quad (3.6)$$

L'esistenza di un valore critico per β è di estrema importanza; la (3.4) può essere interpretata come la funzione di partizione di una teoria statistica di cammini discretizzati: quando β approssima il suo valore critico e la (3.5) comincia a divergere, significa che la somma statistica è dominata dai cammini con un grande numero di steps, che possono essere assimilati a cammini continui. Per renderci conto di questo fatto osserviamo che ogni cammino entra nella (3.4) con un peso dato approssimativamente dal valore medio

l della lunghezza di uno step, per il numero degli steps N che compongono il cammino:

$$P_\beta(x; y) = \sum_{\gamma(N)} e^{-\beta l N} \quad (3.7)$$

dove abbiamo formalmente indicato con $\sum_{\gamma(N)}$ la somma sui cammini di lunghezza N .

Il valore di aspettazione di N è dato pertanto da:

$$\langle N \rangle = \sum_{\gamma(N)} e^{-\beta l N} = -\frac{1}{l} \frac{\partial}{\partial \beta} P_\beta(x; y) \quad (3.8)$$

che diverge quando β tende al valore critico. In questo modo lo studio del limite continuo è ricondotto a quello del limite critico.

Il limite critico viene studiato sfruttando le proprietà di riscaldamento dei propagatori in prossimità della temperatura critica β_c [8], [9], [10]. Come prima cosa viene introdotto un parametro di scala θ dal quale si fa dipendere β in modo tale che:

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \beta(\theta) = \beta_c \quad (3.9)$$

successivamente le grandezze fondamentali della teoria vengono riscalate:

$$\begin{aligned} x &\rightarrow \theta x \\ G_\beta(x; y) &\rightarrow G_{\beta(\theta)}(\theta x; \theta y) \end{aligned} \quad (3.10)$$

e si definisce il propagatore continuo nel seguente modo:

$$G_{cont}(x; y) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{d-2} G_{\beta(\theta)}(\theta x; \theta y) \quad (3.11)$$

Nel limite critico in cui θ va all'infinito si può dimostrare che il propagatore diventa quello di una particella libera di spin 0 e massa m [9], [10]:

$$G_{cont}(x; y) = \frac{1}{2} \sigma^2 (-\Delta + m^2)^{-1}(x; y) \quad (3.12)$$

e si definisce il propagatore continuo nel seguente modo:

$$G_{cont}(x; y) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^{d-2} G_{\beta(\theta)}(\theta x; \theta y) \quad (3.11)$$

Nel limite critico in cui θ va all'infinito si può dimostrare che il propagatore diventa quello di una particella libera di spin 0 e massa m [9], [10]:

$$G_{cont}(x; y) = \frac{1}{2} \sigma^2 (-\Delta + m^2)^{-1}(x; y) \quad (3.12)$$

dove

$$\frac{1}{2} \sigma^2 m^2 = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \theta^2 \log \frac{\beta(\theta)^{\frac{d}{2}}}{c_0} \quad (3.13)$$

La cosa più importante da notare è che, a partire dal propagatore discretizzato (3.4) abbiamo ottenuto il propagatore per la particella scalare libera, senza fare uso della forma esplicita delle probabilità di transizione t_β . Abbiamo utilizzato soltanto il teorema del limite centrale, applicabile grazie alla indipendenza degli steps successivi del processo; come conseguenza abbiamo ottenuto una teoria di particella libera. I risultati non sarebbero cambiati se noi avessimo usato un random walk su reticolo, la cui forma e spaziatura poteva anch'essa essere decisa arbitrariamente. Il fatto è che le trasformazioni di scala (3.10) fanno smarrire i dettagli microscopici quali la forma delle funzioni di transizione t_β o la struttura del reticolo, per lasciarci solo gli effetti cooperativi su larga scala. Questo importante risultato va normalmente sotto il nome di universalità.

L'universalità da una parte ci offre una vasta possibilità di scelta del tipo di teoria discreta da utilizzare, in relazione ad esigenze di maneggevolezza e semplicità, dall'altra apre la possibilità ad una classificazione di tutte le possibili teorie continue in base alla loro classe di universalità. Questa libertà di scelta gioca un ruolo fondamentale nel caso della teoria delle superfici random [10].

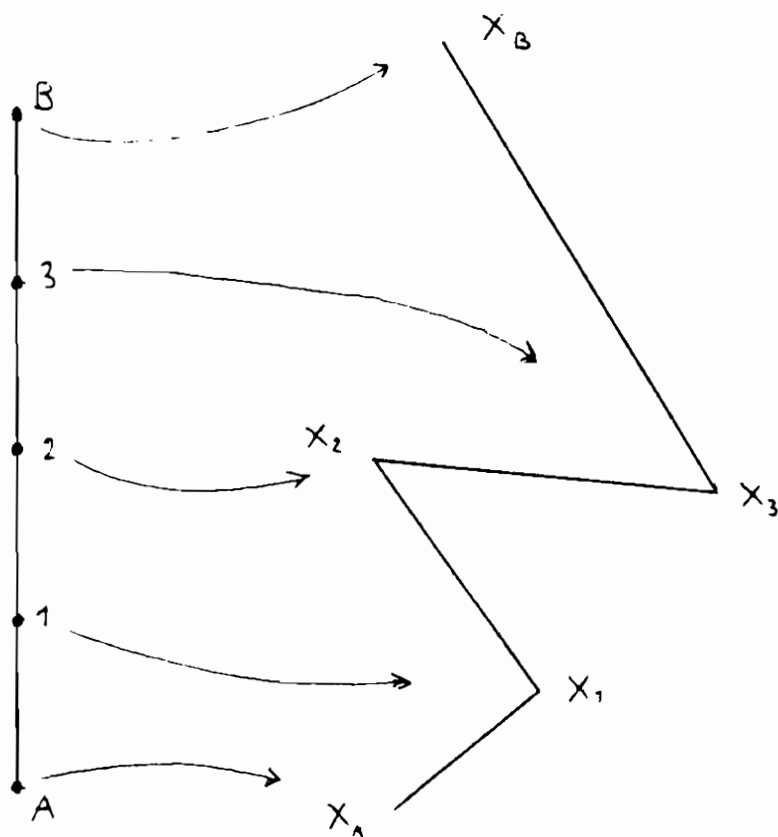
Si osservi infine che, stando alla (3.8), il propagatore continuo è dominato dai cammini con un numero infinito di steps. Questo non significa che tali cammini siano di lunghezza infinita, perchè nella definizione del propagatore continuo le distanze vengono riscalate secondo la (3.10), e quindi la lunghezza dei singoli steps, nel limite continuo, diventa infinitesima.

4 - REGOLARIZZAZIONE DELLE STRINGHE MEDIANTE TRIANGOLAZIONI DI SUPERFICI

In questo capitolo applicheremo al caso delle stringhe le idee appena sviluppate

Il primo passo consiste nel costruire una opportuna discretizzazione delle superfici coinvolte nella somma (1.6) (l'equivalente delle traiettorie spezzate nel caso della particella).

Ciascuno dei cammini spezzati della somma (3.4) poteva essere interpretato come l'immersione in M^d di un certo cammino intrinseco (non immerso), costituito da una sequenza di $N + 1$ punti legati ciascuno al successivo da un segmento di lunghezza 1, come mostrato in figura:



La somma (3.4) può essere vista così come una somma su tutti i cammini intrinseci, rappresentata da \sum_N , e una somma su tutte le immersioni di questi in M^d , rappresentata da $\int dx_1 \dots dx_N$.

Per estendere direttamente questo punto di vista al caso delle superfici, dobbiamo definire l'analogo discreto degli ingredienti che compaiono nella espressione del propagatore continuo:

$$G(\gamma_1; \gamma_2) = \int D[g] \int D[X^\mu] \exp\left[- \int d\sigma d\tau \sqrt{g} g^{ij} \partial_i X^\mu \partial_j X_\mu\right] \quad (4.1)$$

Le stringhe γ_1 e γ_2 possono essere approssimate da poligoni chiuse in M^d . Un campo metrico g viene rappresentato da una triangolazione T della superficie che interpola tra γ_1 e γ_2 , in cui però le lunghezze dei lati vengano poste tutte uguali ad 1. La triangolazione T viene così concepita intrinsecamente come un complesso simpliciale formato da triangoli equilateri tutti uguali incollati tra di loro secondo un certo schema combinatorio che caratterizza quella data triangolazione. Mediante le regole del calcolo di Regge ([1] pag.446, [15]), da questo schema è possibile estrarre tutte le informazioni geometriche che, nel caso continuo, sono contenute nella metrica g .

L'integrale sulla metrica viene sostituito da una somma sulle triangolazioni T appartenenti ad una data classe Θ da definire.

I campi di materia X^μ vengono definiti solo sui vertici della triangolazione e rappresentano l'immersione di T in M^d . Infine l'analogo discreto della azione prende la forma:

$$A[X^\mu; T] = \sum_{\langle ij \rangle} (X_i^\mu - X_j^\mu)^2 \quad (4.2)$$

dove il simbolo $\langle ij \rangle$ sta ad indicare che la somma deve essere eseguita solo su quelle coppie di vertici che, nella triangolazione, sono connesse da un lato. Si noti come nell'argomento della sommatoria nella (4.2) sia riconoscibile una forma discreta di *laplaciano*, tenuto presente che i lati dei triangoli sono di lunghezza unitaria. L'accoppiamento dei campi X^μ con la metrica avviene grazie allo schema di primi vicini che caratterizza la triangolazione.

Con le suddette prescrizioni la versione discreta del modello prende la seguente forma:

$$G(\gamma_1; \gamma_2) = \sum_{T \in \Theta} \rho(T) \int \prod_{i \in T - \partial T} dX_i \exp[-\beta \sum_{\langle ij \rangle} (X_i - X_j)^2] \quad (4.3)$$

dove l'esponente μ è stato omesso e il simbolo dX_i indica la misura di Lebesgue in R^d . $\rho(T)$ è un peso da attribuire alla triangolazione con la funzione di un potenziale chimico [10]. Il coefficiente β è stato introdotto in previsione della ricerca di eventuali punti critici del modello.

Si noti che nella (4.3) i campi X^μ variano solo su $T - \partial T$ perchè il contorno ∂T della triangolazione T deve essere mappato sulle poligonalie che approssimano γ_1 e γ_2 . Questo consente di sopprimere dalla teoria i modi dovuti alla invarianza per trasformazioni di Poincaré dello spazio M^d .

5 - STRINGHE INTERAGENTI

Una prima questione delicata è quella che riguarda la definizione della classe Θ di triangolazioni su cui è necessario sommare. A prima vista sembrerebbe naturale includere in Θ tutte le possibili triangolazioni. Questo però comporta dei grossi problemi: il numero di triangolazioni con v vertici cresce come una potenza di $v!$:

$$n(v) \sim (v!)^\alpha \quad (5.1)$$

e questo comporta la divergenza della (4.3) per ogni ragionevole scelta del peso $\rho(T)$. Il problema può essere risolto limitandosi a considerare triangolazioni di fissata topologia (fissato numero di Eulero χ). In tal caso la crescita diventa esponenziale:

$$n_\chi(v) \sim c^v \quad (5.2)$$

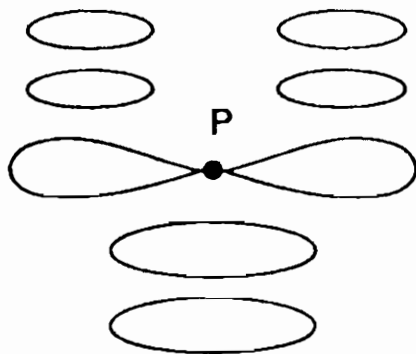
e la (4.3) può convergere per qualche valore di β [13], [14].

Si può in questo modo definire una ben precisa teoria di superfici random triangolate per ogni possibile scelta della topologia.

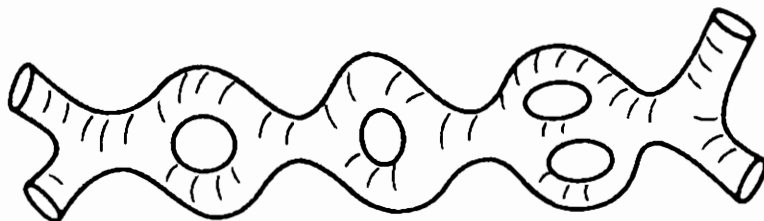
È di estremo interesse il fatto che il valore critico di β non dipende dalla topologia. Questo ci consente di scrivere una espansione formale del propagatore nella topologia (più precisamente nel genere della superficie, che è il numero di manici che crescono sulla superficie stessa deformata in una sfera con due buchi, che rappresentano γ_1 e γ_2).

Una tale espansione equivale a una teoria di stringhe interagenti, come mostrerò ora senza alcuna pretesa di rigore.

Una interazione può essere pensata come un processo nel quale una stringa si divide in due o viceversa, come viene rappresentato in figura (è importante notare che le stringhe, pur essendo oggetti estesi, interagiscono solo localmente, vale a dire un solo punto dello spazio-tempo è interessato al processo. Tuttavia, come si può facilmente notare tracciando dei diagrammi spazio-temporali per differenti osservatori, questo punto non può essere definito univocamente per tutti gli osservatori):



La propagazione di una stringa con autointerazione è perciò rappresentata da una superficie del tipo:



Come possiamo vedere, ogni processo costituito dalla emissione e dal successivo assorbimento di una stringa corrisponde ad un manico sulla superficie. Una superficie di genere h rappresenta pertanto una propagazione con $2h$ vertici di interazione ([1] pag. 374-380).

Ha senso quindi scrivere formalmente:

$$G(\gamma_1; \gamma_2) = \sum_h \xi^{2h} G_h(\gamma_1; \gamma_2) \quad (5.3)$$

dove G_h è il propagatore per superfici di genere h e ξ è una costante di interazione per le stringhe. G è il propagatore per una teoria in cui si somma su ogni topologia.

Ciascuna delle G_h rappresenta una teoria ben definita e auto-consistente, ed inoltre tutte queste teorie hanno uno stesso limite continuo, ma la loro somma (5.3), che sarebbe lo sviluppo perturbativo di una teoria di stringhe interagenti, non ha senso perché non può essere regolarizzata [9].

Siamo in una situazione differente da quella che si ha regolarizzando su reticolo le teorie di campo dove, prima di mandare a 0 il passo reticolare, la teoria si presenta perfettamente ben definita. Per una semplice ed istruttiva dimostrazione della non convergenza della somma estesa a tutti i generi si rimanda a [9].

Sebbene a prima vista il problema paia di impossibile soluzione, recentemente si è tentato di eseguire ugualmente la somma sulle topologie, nell'ambito di una teoria di random matrix models. Farò un breve accenno a questi nuovi sviluppi nella parte conclusiva del lavoro.

6 - LA TENSIONE DELLA STRINGA

Una seconda questione assai delicata riguarda il fatto che al limite critico la tensione della stringa non scala a 0 [16].

Definiamo la tensione della stringa $\tau(\beta)$ nel seguente modo:

$$\tau(\beta) = - \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{1}{L^2} \log G_\beta(\gamma_{L,L}) \quad (6.1)$$

dove $\gamma_{L,L}$ è un quadrato di lato L e $G_\beta(\gamma_{L,L})$ è la funzione di Green ad una loop.

È possibile dimostrare che è sempre valida la relazione:

$$\tau(\beta) \geq 2\beta \quad (6.2)$$

da cui si deduce immediatamente che, al punto critico, la tensione della stringa non scala a 0, per il fatto che β_c è sempre positivo. quali sono le conseguenze per la nostra teoria?

Nello studio del punto critico, come abbiamo visto per la particella, le grandezze fisiche della teoria vengono ricavate dalle proprietà di riscaldamento delle grandezze nude, cioè dipendenti da β . Per ragioni dimensionali, le grandezze fondamentali devono riscaldare secondo le seguenti relazioni:

$$\begin{aligned} x_{phys} &= xa(\beta) \\ m_{phys} &= \frac{1}{a(\beta)} m(\beta) \\ \tau_{phys} &= \frac{1}{a^2(\beta)} \tau(\beta) \end{aligned} \quad (6.3)$$

dove la massa nuda $m(\beta)$ della stringa è definita nel seguente modo:

$$m(\beta) = - \lim_{l \rightarrow \infty} \frac{1}{l} \log G_\beta(\gamma; \gamma(l)) \quad (6.4)$$

dove $\gamma(l)$ indica una stringa ottenuta da γ con una traslazione di una quantità l in M^d . Nella (6.3) $a(\beta)$ è un parametro di scala che si annulla al punto critico.

Dall'ultima delle (6.3) si deduce immediatamente che la tensione fisica della stringa è infinita. Questo comporta che, nel limite continuo, vengano fortemente sopresse tutte quelle configurazioni che corrispondono ad una azione diversa da quella minima consentita. Come conseguenza sopravvivono nel limite continuo soltanto configurazioni costituite da superfici di azione minima, sulle quale crescono un groviglio di filamenti che occupano dimensioni lineari grandi, ma di area nulla.

Questo problema non è inusuale e affligge anche altri approcci alla teoria delle superfici random [10]. D'altra parte, anche nel più usuale problema dei cammini random, affrontato nel capitolo 3, i cammini che dominano la somma statistica nel limite continuo non sono differenziabili in nessun punto ([7] pag.114-119). È un fatto normale in teoria dei campi che dominino configurazioni molto irregolari. Questo di solito non è un problema grave. Però nella teoria delle stringhe e nella gravità bidimensionale, noi vogliamo avere, nel limite continuo, l'invarianza per diffeomorfismi e non è del tutto evidente che questa possa essere ottenuta quando dominano delle configurazioni così irregolari.

Una possibile soluzione è quella di modificare l'azione in modo da includere dei termini dipendenti dalla curvatura estrinseca della superficie [9] [16]. Intuitivamente l'idea è quella di introdurre una nuova costante di accoppiamento λ in relazione ai termini di curvatura estrinseca:

$$S = \beta \sum_{\langle ij \rangle} (x_i - x_j)^2 + \lambda \sum_l \sin^2\left(\frac{\theta_{\Delta_1 \Delta_2}}{2}\right) \quad (6.5)$$

dove Δ_1 e Δ_2 rappresentano due elementi della triangolazione, uniti dal lato l e θ è l'angolo che formano.

Se per qualche valore di λ il modello esibisce una transizione di fase del secondo ordine, significa che si stano sviluppando delle correlazioni su larga scala nei vettori normali, e questo, intuitivamente, può far pensare a superfici più regolari. Del resto esiste al riguardo un interessante parallelo con il caso delle particelle. I termini di curvatura estrinseca sono legati alla presenza di gradi di libertà fermionici (nella teoria delle superstringhe). Quando si fa una costruzione simile per la particella il risultato è che la dimensione di Hausdorff delle curve che dominano la somma statistica passa da 2 (particella bosonica) a 1 [17]. La dimensione di Hausdorff h può essere definita dalla relazione $L^h \sim R$, dove L è la lunghezza della curva e R sono le dimensioni lineari della regione di spazio occupata dalla curva stessa. È chiaro, almeno intuitivamente, che una dimensione di Hausdorff uguale a 1 equivale all'idea di una traiettoria liscia.

7 - TEORIA DELLE STRINGHE E MATRIX MODELS

I più recenti sviluppi nello studio della teoria delle stringhe mediante triangolazioni random di superfici, riguarda il tentativo di costruire una teoria di stringhe interagenti o, equivalentemente, di sommare su tutti i generi. Mi limiterò ad esporre semplicemente le idee principali, senza minimamente entrare nei dettagli della questione.

Esiste un notevole legame tra la teoria delle superfici random e la teoria dei random matrix models [1] pag.450. Quest'ultima è una teoria statistica definita dalla seguente funzione di partizione:

$$Z(\beta; N) = \int d^{N^2} M \exp -\beta \text{tr} \left(\frac{1}{2} M^2 + V(M) \right) \quad (7.1)$$

dove:

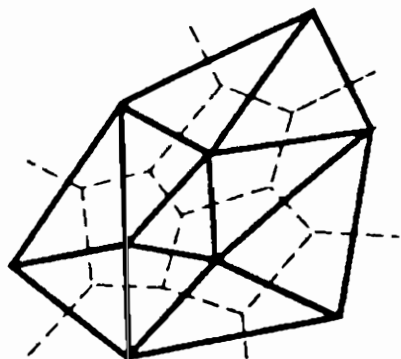
$$V(M) = \sum_{p=3}^{\infty} g_p M^p \quad (7.2)$$

Nella (7.1) M indica una matrice hermitiana di ordine N e $d^{N^2} M$ è la misura di Lebesgue N^2 -dimensionale.

La (7.1) può essere anche interpretata come il funzionale generatore di una teoria di campo in 0 dimensioni in cui le configurazioni di campo siano costituite dalle matrici M . La (7.1) genera allora i diagrammi di Feynmann di vuoto, che sono dei grafi chiusi senza gambe esterne. Il parallelo con la teoria delle superfici random si realizza osservando che il grafo duale di ciascuno di questi diagrammi di vuoto è una certa discretizzazione di una superficie. Il duale di un grafo si ottiene segnando un punto in ciascuna loop di propagatori e successivamente congiungendo questi punti con segmenti che taglino in uno e un solo punto i propagatori del grafo originale, come mostrato in figura nella pagina seguente.

È immediato osservare che i termini di ordine p nella espressione (7.2) della parte di interazione dell'azione, essendo responsabili dei vertici di interazione con p propagatori, generano, nel passaggio al duale, dei poligoni con p lati. Un potenziale con interazione cubica, per esempio, genera delle triangolazioni e un

potenziale con interazione quartica delle suddivisioni della superficie in tetragoni. In Generale sarà possibile ottenere suddivisioni di ogni tipo includendo nel potenziale interazioni di qualsiasi ordine.



Se facciamo uno sviluppo perturbativo in potenze di $\frac{1}{N}$ del nostro modello di matrici random, otteniamo uno sviluppo topologico nel genere. In altre parole, l'insieme dei diagrammi il cui grafo duale è di genere h , viene pesato nello sviluppo in potenze di $\frac{1}{N}$ da un fattore $\frac{1}{N^{2-2h}}$ [1] pag. 450. Il limite per N infinito seleziona quindi solo diagrammi con la topologia di una sfera (diagrammi planari) [18]. La quantità $\frac{1}{N}$ gioca un ruolo di fattore di soppressione topologica ed è quindi il parallelo della costante di accoppiamento della stringa nella teoria delle superfici random.

La cosa di rilievo è che, prendendo il limite $N \rightarrow \infty$, in modo tale che $\frac{\beta}{N}$ vada al limite critico del modello (limite continuo), la funzione di partizione verifica una legge di scala che permette di ricavare una equazione differenziale [19] [20] [21] [22]. Questo fa sì che il fattore di soppressione topologico non vada a 0 nel limite continuo in modo che possono essere studiati gli effetti dovuti a topologie di ordine superiore.

Un'altro aspetto interessante è che, aggiustando opportunamente i parametri che compaiono nel potenziale (7.2), si possono riprodurre gli effetti della materia (conforme), senza dover introdurla esplicitamente come nel caso della stringa bosonica o della

superstringa.

I risultati di maggior rilievo si sono avuti nel caso della gravità quantistica bidimensionale, trattata recentemente con successo facendo uso di tali tecniche [20] [21].

Bibliografia

[1] : Alvarez-Gaumè, *Random surfaces, statistical mechanics and string theory*, Helvetica Physica Acta. **64**, (1991) 359.

[2] : M.B. Green, *Introduction to string and superstring theory*, in *String and superstring* Vol 3, T.piran and S.Weinberg, (World Sientific, Jeru salem 20 Dec. 85 - 9 Jan. 86).

[3] : S. Weinberg, *Covariant path integral approach to string theory* in *String and Superstring*, Vol 3, T. piran and S. Weinberg, (World scientific, Jerusalem, 20 Dec. 85 - 9 Jan. 86).

[4] : John L. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, in *Fields, strings and critical phenomena*, E. Brezin and J. Zinn-Justin, (North-Holland, Les Houches 1988).

[5] : M. Roncadelli e A. Defendi, *I cammini di Feynmann*, Quaderni di fisica teorica, (Università degli Studi di Pavia, 1992).

[6] : J. Glimm and A. Jaffe, *Quantum Physics. A Functional integral point of view*, Springer Verlag, (1981).

[7] : R.J. Rivers, *Path integral method in quantum field theory*, Cambridge monographs in mathematical physics, Cambridge University Press (1987).

[8] : J. Ambjorn, B. Durhuus and T. Jonsson, *Statistical mechanics of paths with curvature-dependent action*, J. Phys. A: Math. **21** (1988), 981.

[9] : J. Ambjorn, *Random surfaces: A non-perturbative regularization of strings* in *Probabilistic methods in quantum field*

theory and quantum gravity, P.H. Damgaard et al edt., (Plenum Press, New York, 1990).

[10] ; J. Ambjorn, B. Durhuus and J. Frolich, *Diseases of triangulated random surface models, and possible cures*, Nucl. Phys. **B257** [FS 12], (1984) 453.

[11] : F. David, *A model of random surfaces with non-trivial critical behaviour*, Nuclear Physics B **257** [FS 14], 1985, 543.

[12] : B. Duhuurus, J. Frolich and T. Jonsson, *Critical behaviour in a model of planar random surfaces*, Nuclear Physics B **240** [FS 12], (1984), 453.

[13] : J. Koplik, A. Neveu and Nussinov, Nucl. Phys **B123**, (1977) 109.

[14] : D. Bessis C. Itzykson and J.B. Zuber, Adv. Appl. Math. **1**, (1980) 109.

[15] : T.Regge, Nuovo cim, **19**, (1961), 558.

[16] : J. Ambjorn and B. Durhuus, *Regularized bosonic strings need extrinsic curvature*, Physics Letters B **188** n.2 (1987) 253.

[17] : A. Polyakov, *Two-dimensional quantum gravity...*, in *Fields, strings and critical phenomena*, E. Brezin and J. Zinn-Justin, (North-Holland, Les Houches 1988).

[18] : E. Brezin, C. Ytzikson, G. Parisi and J.B. Zuber, *Planar diagrams*, Commun. math. Phys. **59**, (1978) 35.

[19] : E. Brezin and V.A. Kazakov, *Exactly solvable field theories of closed strings*, Physics Letters B **236**, (1990) 144.

[20] : D.J. Gross and A.A. Migdal, *Non perturbative two-dimensional quantum gravity*, Phys. Rew. Lett. **64**, (1990) 127.

[21] : D.J. Gross and A.A. Migdal, *A non perturbative treatment of two-dimensional quantum gravity*, Nuclear Physics B **340**, (1990) 333.

[22] : M.R. Douglas and S.H. Shenker, *Strings in less than one dimension*, Nuclear Physics B **335**, (1990) 635.

Antonio Defendi

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica
Università di Pavia
e
Istituto Nazionale di Fisica Nucleare
Sezione di Pavia**

**ROTTURA ESPLICITA E SPONTANEA
DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI
NEL MODELLO STANDARD**

Seminario tenuto il 6 Dicembre 1991

1. Introduzione

È opinione diffusa nella fisica delle particelle elementari che le uniche simmetrie esatte siano le simmetrie di gauge. Per quanto riguarda invece le simmetrie globali si ritiene che in genere esse debbano essere in qualche modo rotte.

In questo spirito, una decina di anni fa, furono studiati alcuni modelli [1-5] in cui si considerava la rottura spontanea di simmetrie continue globali. In queste teorie erano ovviamente presenti, in virtù del teorema di Goldstone, particelle scalari a massa nulla, alcune delle quali (quelle "visibili") sono state escluse sperimentalmente dai risultati di LEP [6].

Molto recentemente [7] queste teorie sono state riprese e modificate in modo da tenere conto anche di una lieve rottura esplicita. A prima vista ci si potrebbe aspettare che il corrispondente pseudo bosone di Goldstone acquisti una massa molto piccola (sostanzialmente proporzionale all'entità della rottura esplicita), e che quindi anche queste teorie siano escluse sperimentalmente come le originarie.

Ciò è falso. Mostreremo, prendendo come esempio il modello del majorone tripletto, che la massa dello pseudo bosone di Goldstone è molto maggiore di quanto ci si aspetti.

Nel cap. 2 presenteremo una breve rassegna del modello originario (in presenza cioè di sola rottura spontanea), esaminando principalmente il relativo spettro di massa. Nel cap. 3 prenderemo in considerazione anche una lieve rottura esplicita e vedremo le radicali modifiche che essa comporta.

2. Il majorone tripletto

Questo modello è stato elaborato da Gelmini-Roncadelli [1] e Glashow-Georgi-Nussinov [2] allo scopo di dare massa di Majorana ai neutrini, e quindi, poiché gli spinori di Majorana non conservano il numero leptonico, si ha la rottura della relativa simmetria globale $U(1)_l$. Si sceglie di utilizzare il meccanismo di rottura spontanea e pertanto si introduce (accanto al doppietto "standard" φ con $I = \frac{1}{2}$ e $Y = 1$) un tripletto complesso Φ con $I = 1$, $Y = 2$ e numero leptonico $l = -2$, che si trasforma secondo la rappresentazione aggiunta di $SU(2)_L$. In questo modo risulta possibile introdurre nella lagrangiana, senza violare esplicitamente

$U(1)_I$, un termine di Yukawa che accoppia il campo Φ con le sole componenti left dei leptoni, il quale, in seguito alla rottura spontanea attribuisce ai neutrini masse di Majorana. Esplicitamente scriviamo, in termini degli autostati della carica elettrica,

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(++)} \\ \Phi^{(+)} \\ \Phi^{(0)} \end{pmatrix}, \quad (2.1)$$

La densità di lagrangiana, invariante per $SU(2)_L \times U(1)_Y$ locale e $U(1)_I$ globale, è

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_{F\varphi} + \mathcal{L}_{F\Phi} + \mathcal{L}_{\varphi\Phi}. \quad (2.2)$$

\mathcal{L}_F è il termine cinetico per i campi di Dirac con le opportune derivate covarianti, \mathcal{L}_G il termine cinetico per i bosoni di gauge e $\mathcal{L}_{F\varphi}$ è l'accoppiamento di Yukawa che dà massa ai fermioni carichi dopo la rottura di simmetria. Rispetto alla lagrangiana del modello standard, nella (2.2) compaiono i nuovi termini $\mathcal{L}_{F\Phi}$ e $\mathcal{L}_{\varphi\Phi}$.

Il primo termine descrive l'accoppiamento fra il tripletto ed i campi fermionici, e darà massa di Majorana ai neutrini in deguito alla rottura spontanea. Esso ha la forma

$$\mathcal{L}_{F\Phi} = -\alpha_M \overline{(\ell_L)^c} \tau \cdot \Phi \ell_L + \text{h.c.} \quad (2.3)$$

dove α_M è assunto reale, τ indica le matrici di Pauli, (ℓ_L) è il doppietto leptonico left-handed

$$(\ell_L) = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

e $(\ell_L)^c$ è il doppietto coniugato di carica definito come

$$(\ell_L)^c = i\tau_2 \begin{pmatrix} \nu_L^c \\ e_L^c \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Il secondo termine contiene i termini cinetici e d'interazione degli scalari

$$\mathcal{L}_{\varphi\Phi} = |D_\mu\varphi|^2 + |D_\mu\Phi|^2 - V_i(\varphi, \Phi) \quad (2.6)$$

dove il potenziale $V(\varphi, \Phi)$ ha la forma polinomiale più generale rinormalizzabile ed invariante per $SU(2)_L \times U(1)_Y \times U(1)_I$, cioè

$$\begin{aligned} V_i(\varphi, \Phi) = & a|\varphi|^2 + b|\Phi|^2 + c|\varphi|^4 + d|\Phi|^4 + e|\varphi|^2|\Phi|^2 + f|\Phi^T\Phi|^2 \\ & + ih\epsilon_{jkl}\varphi^+\tau_j\varphi\Phi_k^+\Phi_l \end{aligned} \quad (2.7)$$

dove a, b, c, d, e, f, h sono parametri reali tali che V_i sia hermitiano. In generale, affinché la rottura spontanea abbia luogo a e b dovranno essere negativi, mentre c, d, e, f saranno positivi al fine di garantire l'esistenza di un minimo.

La richiesta di conservazione della carica elettrica fissa univocamente la "direzione" di rottura: solo le componenti neutre dei campi potranno avere un valore di aspettazione sul vuoto (VeV) diverso da zero. Scriveremo quindi

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_D + \rho_D + i\eta_D) \end{pmatrix} \quad (2.8a)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} \Phi^{(++)} \\ \Phi^{(+)} \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(v_T + \rho_T + i\eta_T) \end{pmatrix} \quad (2.8b)$$

Entrambi i VeV v_D e v_T sono scelti reali tramite due opportune trasformazioni indipendenti di $SU(2)_L$ e di $U(1)_I$.

Dopo la rottura di simmetria, i termini \mathcal{L}_F , \mathcal{L}_G e $\mathcal{L}_{F\varphi}$ conducono ai consueti termini di corrente elettro-debole, di interazione fra i bosoni vettori e di massa per i fermioni carichi, nonché agli accoppiamenti fra questi ultimi e gli scalari di Higgs.

Questi risultati "standard" non vengono modificati dai termini non "standard" $\mathcal{L}_{F\Phi}$ e $\mathcal{L}_{\varphi\Phi}$, se non per la ridefinizione degli

autostati di massa degli scalari e una lieve modifica del rapporto fra le masse dei bosoni di gauge (si veda oltre).

L'effetto di $\mathcal{L}_{F\Phi}$ è di introdurre accoppiamenti fra gli scalari e i neutrini e di generare per questi ultimi masse di Majorana

$$\mathcal{L}_{m_\nu} = \alpha_M v_T \bar{\nu}_L^c \nu_L + \text{h.c.}, \quad (2.9)$$

da cui

$$m_\nu = \alpha_M v_T \quad (2.10)$$

Consideriamo ora il termine cinetico in $\mathcal{L}_{\varphi\Phi}$. Esso fornisce innanzi tutto, mediante il meccanismo di Higgs, le masse dei bosoni di gauge. Ricordando che i campi dello Z^0 , dei W^\pm e del fotone sono definiti come

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}(A_{1\mu} \mp iA_{2\mu}) \\ Z_\mu &= \frac{g'B_\mu - gA_{3\mu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}} \\ A_\mu &= \frac{gB_\mu + g'A_{3\mu}}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \end{aligned} \quad (2.11)$$

si ottiene

$$\begin{aligned} M_Z &= \frac{\sqrt{g^2 + g'^2}}{2}(v_D^2 + 4v_T^2)^{\frac{1}{2}} \\ M_W &= \frac{g}{2}(v_D^2 + 2v_T^2)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Ora, poiché deve essere recuperata la relazione "standard" tra le masse dei bosoni di gauge

$$M_W = M_Z \cos \theta_W. \quad (2.13)$$

è naturale richiedere che sia

$$v_T \ll v_D. \quad (2.14)$$

Quest'ultima condizione assicura anche (si veda la (2.10)) che le masse dei neutrini siano naturalmente piccole in confronto alle masse dei leptoni carichi, che sono invece proporzionali a v_D .

Ora, dei dieci gradi di libertà complessivi (di φ e Φ) inizialmente inseriti nel modello, tre sono stati utilizzati per dar massa ai bosoni di gauge, mentre i rimanenti sette sono gradi di libertà fisici e appaiono nello spettro di massa del modello. Abbiamo due particelle cariche Φ^{++} e ω^+ con massa

$$m_{\Phi^{++}}^2 = hv_D^2 + 2fv_T^2, \quad (2.15)$$

$$m_{\omega^+}^2 = \frac{1}{2}h(v_D^2 + 2v_T^2), \quad (2.16)$$

un bosone di Higgs pesante (che corrisponde all'higgs "standard") con massa

$$m_{\rho H}^2 = 2cv_D^2 + [(e - h)^2/2c]v_T^2, \quad (2.17)$$

un bosone di Higgs leggero con massa

$$m_{\rho L}^2 = [2d - (e - h)^2/2c]v_T^2 \quad (2.18)$$

e, ovviamente, un bosone di Goldstone - il majorone - a massa nulla, in conseguenza della rottura spontanea della simmetria $U(1)_I$ globale. Questa particella non massiva è stata esclusa dalle misure della larghezza dello Z^0 condotte al LEP [6]. Nel modello standard le uniche particelle neutre in cui può decadere significativamente lo Z^0 sono i neutrini delle varie famiglie, che costituiscono i cosiddetti decadimenti invisibili. In questa estensione del modello standard la situazione è più complessa. Il bosone Z^0 può ora decadere anche nella coppia majorone-higgs leggero e la larghezza

di questo decadimento, invisibile anch'esso, è pari al doppio del contributo di ciascuna famiglia neutrinica. Quello che si è visto al LEP è che la larghezza invisibile dell'0 Z^0 è proprio quella che compete alle tre famiglie neutriniche note: non vi è quindi spazio per il majorone.

3. Rottura esplicita e spontanea del numero leptonico

Sempre nell'ambito del modello standard con un tripletto addizionale, consideriamo ora il caso in cui la simmetria $U(1)_I$ del numero leptonico sia, non solo rotta spontaneamente, ma anche esplicitamente [7] da un termine non invariante nel potenziale di Higgs, che ora assume la forma

$$V = V_i + V_b \quad (3.1)$$

dove V_i è la parte invariante data dall'eq. (2.7). Il potenziale di rottura esplicita $V_b(\varphi, \Phi)$ ha la forma più generale rinormalizzabile e invariante per $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ma non per $U(1)_I$, ed è costituito da un unico termine trilineare

$$V_b(\varphi, \Phi) = -\xi \bar{\varphi}^+ \tau_i \varphi \Phi_i^* + \text{h.c.} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

dove

$$\bar{\varphi} = i\tau_2 \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)*} \\ -\varphi^{(+)*} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Naturalmente da un punto di vista fisico il termine (3.2) deve essere molto piccolo rispetto al potenziale invariante V_i . Quindi, poiché ξ ha le dimensioni di un'energia, possiamo indicativamente prendere $\xi \sim 10^{-5} - 10^{-3} \text{eV}$ (in ogni caso $\xi \ll G_F^{-1/2}$).

Riscrivendo ora il potenziale in termini degli autostati di carica elettrica, si ottiene

$$\begin{aligned}
V_i(\varphi, \Phi) = & a(|\varphi^{(++)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2) + b(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2) \\
& + c(|\varphi^{(++)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2)^2 + d(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2)^2 \\
& + e(|\varphi^{(++)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2)(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2) \\
& + f[\Phi^{(0)*}\Phi^{(++)*} + \Phi^{(++)*2}][\Phi^{(0)}\Phi^{(++)} + \Phi^{(++)2}] \\
& - h\{[\sqrt{2}\varphi^{(++)*}\varphi^{(0)}(\Phi^{(++)}\Phi^{(0)*} - \Phi^{(++)*}\Phi^{(++)}) + \text{h.c.}] + \\
& + (|\varphi^{(++)}|^2 - |\varphi^{(0)}|^2)(|\Phi^{(++)}|^2 - |\Phi^{(0)}|^2)\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
V_b(\varphi, \Phi) = & \xi\sqrt{2}[\varphi^{(++)2}\Phi^{(++)*} - \varphi^{(0)2}\Phi^{(0)*} - \sqrt{2}\varphi^{(0)}\varphi^{(++)}\Phi^{(++)*}] \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Sviluppiamo, come di consueto, le componenti neutre dei multipletti attorno ai loro valori si aspettazione sul vuoto (si vedano le eq. (2.8)). Anche in questo caso v_D e v_T possono essere entrambi assunti reali e positivi: la fase del primo può essere eliminata tramite una opportuna trasformazione di $SU(2)_L$, la fase del secondo può essere assorbita da quella del parametro complesso ξ .

A questo punto si deve verificare che v_D e v_T corrispondano effettivamente ad un punto di minimo del potenziale. Per prima cosa richiediamo che le derivate parziali prime di $V = V_i + V_b$ si annullino. Per questo occorre esprimere $V(\varphi, \Phi)$ in termini delle sue variabili indipendenti

$$\rho_D, \eta_D, \rho_T, \eta_T. \tag{3.6}$$

ed imporre

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_D} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \eta_D} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \rho_T} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \eta_T} \Big|_0 = 0 \tag{3.7}$$

dove l'indice 0 indica che le derivate devono essere calcolate nel punto

di questo decadimento, invisibile anch'esso, è pari al doppio del contributo di ciascuna famiglia neutrinica. Quello che si è visto al LEP è che la larghezza invisibile dell'0 Z^0 è proprio quella che compete alle tre famiglie neutriniche note: non vi è quindi spazio per il majorone.

3. Rottura esplicita e spontanea del numero leptonico

Sempre nell'ambito del modello standard con un tripletto addizionale, consideriamo ora il caso in cui la simmetria $U(1)_l$ del numero leptonico sia, non solo rotta spontaneamente, ma anche esplicitamente [7] da un termine non invariante nel potenziale di Higgs, che ora assume la forma

$$V = V_i + V_b \quad (3.1)$$

dove V_i è la parte invariante data dall'eq. (2.7). Il potenziale di rottura esplicita $V_b(\varphi, \Phi)$ ha la forma più generale rinormalizzabile e invariante per $SU(2)_L \times U(1)_Y$ ma non per $U(1)_l$, ed è costituito da un unico termine trilineare

$$V_b(\varphi, \Phi) = -\xi \bar{\varphi}^+ \tau_i \varphi \Phi_i^* + \text{h.c.} \quad i = 1, 2, 3 \quad (3.2)$$

dove

$$\bar{\varphi} = i\tau_2 \varphi^* = \begin{pmatrix} \varphi^{(0)*} \\ -\varphi^{(+)*} \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

Naturalmente da un punto di vista fisico il termine (3.2) deve essere molto piccolo rispetto al potenziale invariante V_i . Quindi, poiché ξ ha le dimensioni di un'energia, possiamo indicativamente prendere $\xi \sim 10^{-5} - 10^{-3} \text{eV}$ (in ogni caso $\xi \ll G_F^{-1/2}$).

Riscrivendo ora il potenziale in termini degli autostati di carica elettrica, si ottiene

$$\begin{aligned}
V_i(\varphi, \Phi) = & a(|\varphi^{(+)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2) + b(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(+)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2) \\
& + c(|\varphi^{(+)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2)^2 + d(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(+)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2)^2 \\
& + e(|\varphi^{(+)}|^2 + |\varphi^{(0)}|^2)(|\Phi^{(++)}|^2 + |\Phi^{(+)}|^2 + |\Phi^{(0)}|^2) \\
& + f[\Phi^{(0)*} \Phi^{(++)*} + \Phi^{(+)*2}][\Phi^{(0)} \Phi^{(++)} + \Phi^{(+)}^2] \\
& - h\{[\sqrt{2}\varphi^{(+)*} \varphi^{(0)}(\Phi^{(+)} \Phi^{(0)*} - \Phi^{(+)*} \Phi^{(++)}) + \text{h.c.}] + \\
& + (|\varphi^{(+)}|^2 - |\varphi^{(0)}|^2)(|\Phi^{(++)}|^2 - |\Phi^{(0)}|^2)\}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

$$\begin{aligned}
V_b(\varphi, \Phi) = & \xi\sqrt{2} [\varphi^{(++)2} \Phi^{(++)*} - \varphi^{(0)2} \Phi^{(0)*} - \sqrt{2}\varphi^{(0)} \varphi^{(+)} \Phi^{(+)*}] \\
& + \text{h.c.}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Sviluppiamo, come di consueto, le componenti neutre dei multipletti attorno ai loro valori si aspettazione sul vuoto (si vedano le eq. (2.8)). Anche in questo caso v_D e v_T possono essere entrambi assunti reali e positivi: la fase del primo può essere eliminata tramite una opportuna trasformazione di $SU(2)_L$, la fase del secondo può essere assorbita da quella del parametro complesso ξ .

A questo punto si deve verificare che v_D e v_T corrispondano effettivamente ad un punto di minimo del potenziale. Per prima cosa richiediamo che le derivate parziali prime di $V = V_i + V_b$ si annullino. Per questo occorre esprimere $V(\varphi, \Phi)$ in termini delle sue variabili indipendenti

$$\rho_D, \eta_D, \rho_T, \eta_T. \tag{3.6}$$

ed imporre

$$\frac{\partial V}{\partial \rho_D} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \eta_D} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \rho_T} \Big|_0 = \frac{\partial V}{\partial \eta_T} \Big|_0 = 0 \tag{3.7}$$

dove l'indice 0 indica che le derivate devono essere calcolate nel punto

$$\rho_D = \eta_D = \rho_T = \eta_T = 0. \quad (3.8)$$

Si ottiene così

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \rho_D} \Big|_0 &= v_D \left[a + cv_D^2 + \frac{(e-h)}{2} v_T^2 - 2v_T \operatorname{Re} \xi \right] = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \rho_T} \Big|_0 &= v_T \left[b + dv_T^2 + \frac{(e-h)}{2} v_D^2 \right] - v_D^2 \operatorname{Re} \xi = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \eta_D} \Big|_0 &= v_D v_T \operatorname{Im} \xi = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial \eta_T} \Big|_0 &= v_D^2 \operatorname{Im} \xi = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Dall'ultima di queste equazioni si vede subito che, poiché $v_D \neq 0$ (essendo il Vev del modello standard) ξ dovrà essere reale. In tal caso la terza equazione è banalmente soddisfatta. Dalla seconda poi notiamo che $\xi \neq 0$ implica $v_T \neq 0$, e quindi la rottura esplicita provoca la rottura spontanea.

Il risultato più notevole è tuttavia che, se inseriamo la relazione "standard"

$$a + cv_D^2 \simeq 0,$$

nella prima delle equazioni (3.9), otteniamo in modo naturale – cioè senza ricorrere ad un fine-tuning dei parametri – una soluzione per cui

$$\xi \sim v_T. \quad (3.10)$$

Infatti essendo per ipotesi ξ molto piccolo, possiamo dedurre

$$v_T \ll v_D \quad (3.11)$$

e quindi, assumendo le costanti adimensionali dell'ordine dell'unità,

$$b + dv_T^2 + \frac{(e-h)}{2}v_D^2 \sim v_D^2, \quad (3.12)$$

per cui le prime due equazioni risultano evidentemente soddisfatte.

Anche in questo caso, l'eq. (3.11) assicura che sia verificata la relazione standard fra le masse dei bosoni di gauge, $M_W = M_Z \cos \theta_W$ (valgono sempre le eq. (2.12)).

Dobbiamo ora controllare che l'estremo considerato sia effettivamente un punto di minimo: calcoliamo quindi le derivate parziali seconde del potenziale ed imponiamo che la relativa forma hessiana sia definita positiva. Ciò equivale a richiedere che la matrice di massa degli scalari abbia autovalori positivi. Esaminiamo quindi lo spettro degli scalari.

La particella $\Phi^{(++)}$ è ovviamente un autostato con

$$m_{\Phi^{++}}^2 = hv_D^2 + 2fv_T^2 + \xi \frac{v_D^2}{v_T}, \quad (3.13)$$

richiediamo quindi

$$h + \xi/v_T > 0 \quad (3.14)$$

Per quanto riguarda gli scalari con carica unitaria la matrice di massa sulla base

$$\begin{pmatrix} \varphi^{(+)} \\ \Phi^{(+)} \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

è

$$\left(\xi + \frac{h}{2}v_T\right) \begin{pmatrix} 2v_T & -\sqrt{2}v_D \\ -\sqrt{2}v_D & v_D^2/v_T \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Diagonalizzando otteniamo un autovalore nullo che corrisponde alla combinazione

$$\sigma^{(+)} = i\sqrt{\frac{2v_D^2}{2v_D^2 + v_T^2}}[\varphi^{(+)} + \sqrt{2}\frac{v_T}{v_D}\Phi^{(+)}] \quad (3.17)$$

che è il bosone di Goldstone mangiato da W ; il secondo autovalore è

$$m_{\omega^+}^2 = (h/2 + \xi/v_T)(v_D^2 + 2v_T^2) \quad (3.18)$$

relativo alla particella fisica rappresentata dalla combinazione ortogonale

$$\omega^{(+)} = i\sqrt{\frac{2v_D^2}{2v_D^2 + v_T^2}}[\sqrt{2}\frac{v_T}{v_D}\varphi^{(+)} - \Phi^{(+)}]. \quad (3.19)$$

In questo caso dovrà essere

$$\frac{h}{2} + \xi/v_T > 0. \quad (3.20)$$

Nel settore degli scalari neutri non c'è mixing fra i ρ e gli η . Sulla base

$$\begin{pmatrix} \rho_D \\ \rho_T \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

la matrice di massa è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2cv_D^2 & v_D[(e-h)v_T - 2\xi] \\ v_D[(e-h)v_T - 2\xi] & 2dv_T^2 + \xi v_D^2/v_T \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Gli autovalori (approssimati) sono

$$m_H = 2cv_D^2 + \frac{2d\xi v_T + [(e-h)v_T - 2\xi]^2}{2(c - \xi/(2v_T))} \quad (3.23)$$

$$m_L = 2dv_T^2 + v_D^2\xi/v_T - \frac{2d\xi v_T + [(e-h)v_T - 2\xi]^2}{2(c - \xi/(2v_T))} \quad (3.24)$$

e sono positivi per

$$c, \quad \xi > 0. \quad (3.25)$$

Infine sulla base

$$\begin{pmatrix} \eta_D \\ \eta_T \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

la matrice di massa è

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4\xi v_T & -2\xi v_D \\ -2\xi v_D & \xi v_D^2/v_T \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

Anche qui troviamo un autovalore è nullo, corrispondente alla combinazione

$$\theta = \sqrt{\frac{v_D^2}{v_D^2 + v_T^2}} \left(\eta_D + 2 \frac{v_T}{v_D} \eta_T \right) \quad (3.28)$$

(il bosone di Goldstone assorbito dallo Z^0); l'altro autovettore è relativo alla combinazione

$$\chi = \sqrt{\frac{v_D^2}{v_D^2 + v_T^2}} \left[2 \frac{v_T}{v_D} \eta_D - \eta_T \right] \quad (3.29)$$

ed è

$$m_\chi^2 = \xi/v_T (v_D^2 + 4v_T^2) \quad (3.30)$$

per il quale richiediamo

$$\xi > 0. \quad (3.31)$$

χ è ora uno pseudobosone di Goldstone e si riduce per $\xi \rightarrow 0$ al majorone. In definitiva, la positività delle masse è garantita per

$$\begin{aligned} \xi &> 0 \\ \frac{h}{2} + \xi/v_T &> 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

(c e d sono positivi per ipotesi). L' esistenza di un minimo è pertanto assicurata per un'ampia scelta dei valori dei parametri.

In conclusione lo spettro di massa del modello è dato da

$$m_{\omega^+}^2 = (h/2 + \xi/v_T)(v_D^2 + 2v_T^2)$$

$$m_{\Phi^{++}}^2 = hv_D^2 + 2fv_T^2 + \xi \frac{v_D^2}{v_T}$$

$$m_H^2 = 2cv_D^2 + \frac{2d\xi v_T + [(e-h)v_T - 2\xi]^2}{2(c - \xi/(2v_T))}$$

$$m_L^2 = 2dv_T^2 + v_D^2\xi/v_T - \frac{2d\xi v_T + [(e-h)v_T - 2\xi]^2}{2(c - \xi/(2v_T))}$$

$$m_\chi^2 = \xi/v_T (v_D^2 + 4v_T^2)$$

Come si può facilmente vedere per $\xi \sim v_T$ sia m_L che m_χ sono dell'ordine di v_D . La conclusione a cui si giunge è allora che, per quanto debole sia la rottura esplicita delle simmetria globale del numero leptonico, lo pseudo bosone di Goldstone corrispondente acquista una massa molto elevata (dell'ordine di $v_D \simeq 250\text{GeV}$).

Lo stesso discorso vale per l'higgs leggero e in definitiva le masse di tutti gli scalari risultano essere dell'ordine di v_D . Pertanto nessuno di essi può contribuire ai decadimenti invisibili dello Z^0 , quindi l'argomentazione usata per escludere l'originario modello del majorone tripletto non può qui essere ripetuta.

Il risultato fondamentale mostrato qui nel caso del majorone tripletto [7], cioè l'instabilità dei bosoni di Goldstone per effetto di perturbazioni nella lagrangiana, ha trovato recentemente [8] conferma dallo studio di altri modelli (assione e majorone singoletto).

Riferimenti bibliografici

- [1] G. Gelmini and M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **99B** (1981) 411.
- [2] H. Georgi, S. Glashow and S. Nussinov, *Nucl. Phys.* **193B** (1981) 297.
- [3] S. Bertolini and A. Santamaria, *Phys. Lett.* **213B** (1988) 487.
- [4] R. D. Peccei and H. R. Quinn, *Phys. Rev. Lett.* **38** (1977) 1440; *Phys. Rev. D* **16** (1977) 1971.
S. Weinberg, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 223.
F. Wilczek, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 279.
M. Dine, W. Fischler and M. Srednicki, *Phys. Lett.* **104B** (1981) 199.
- [5] Y. Chikashige, R. N. Mohapatra and R. D. Peccei, *Phys. Lett.* **98B** (1981) 265.
- [6] L3 Collaboration, ALEPH Collaboration, OPAL Collaboration, DELPHI Collaboration, *Phys. Lett.* **231B** (1989) 509–539.
- [7] M. Lusignoli, A. Masiero and M. Roncadelli, *Phys. Lett.* **252B** (1990) 247.
- [8] S. Ghigna, “Effetti combinati di rottura esplicita e spontanea di simmetrie continue globali”, *Tesi di laurea*, Pavia, 1991.

Pietro Carretta

Dipartimento di Fisica "A. Volta"
Università di Pavia
e
Gruppo Nazionale di Struttura della Materia
Sezione di Pavia

Applicazioni della μ^+ SR
nella Struttura della Materia

Seminario tenuto il 15/11/1991

Introduzione

Già negli anni cinquanta si dimostrò la possibilità di avere fasci di muoni polarizzati che decadevano anisotropicamente rispetto alla direzione di tale polarizzazione; successivamente si osservò che muoni iniettati nella materia prima di decadere interagivano fortemente con gli elettroni del materiale studiato; si capì dunque che era possibile fare uso di questi leptoni per estrarre informazioni sulle proprietà della materia condensata, analizzando gli effetti creati dal circondario sui propri spin. Da tali anni ad oggi si è visto un impiego di tali particelle nell'indagine delle proprietà dei materiali, in svariati campi (semiconduttori, superconduttori, metalli, isolanti magnetici, materiali organici, etc...), sempre più frequente grazie allo sviluppo di una tecnica di indagine microscopica: la μ^+ SR (i μ^- sono sonde altrettanto valide, ma in quanto meno sfruttati saranno trascurati nell'arco di questo lavoro). Il muone, in particolare, si presenta come una sonda utile per indagare le proprietà microscopiche della materia, che spesso si rivela unica ed in altre circostanze complementare alle sonde microscopiche più tradizionali (vedi NMR e neutroni). Inoltre, la possibile formazione di stati legati μ^+e^- (muonio), che è l'isotopo leggero dell'idrogeno con una lunga vita media, ha comportato ulteriori passi avanti sia in problemi di fisica di base che applicata.

In questo lavoro si intende dare una breve introduzione alle principali caratteristiche di questa tecnica e fornire alcuni esempi di tipiche applicazioni della μ^+ SR nei diversi campi della struttura della materia. Per una trattazione più approfondita di alcuni aspetti si rimanda ai testi citati nei riferimenti [1], [2], [3].

Massa a riposo	$m_\mu = 105.659 \text{ MeV}/c^2$
Carica	$+e$
Spin	$S = 1/2$
Momento magnetico	$\mu_\mu = 4.8410^{-3} \mu_B$
Rapporto giromagnetico	$\gamma_\mu/2\pi = 13.554 \text{ KHz/G}$
Vita media	$\tau_\mu = 2.210^{-6} \text{ s}$

Tab. I Alcuni dati caratteristici del muone

Le basi della μ^+ SR

La produzione dei μ^+

I μ^+ vengono ottenuti dal decadimento debole di pioni (vita media di $26ns$)

$$\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu$$

i quali si producono bombardando con protoni di energia superiore a $180MeV$ dei bersagli normalmente fatti in Berilio o grafite (Fig. 1).

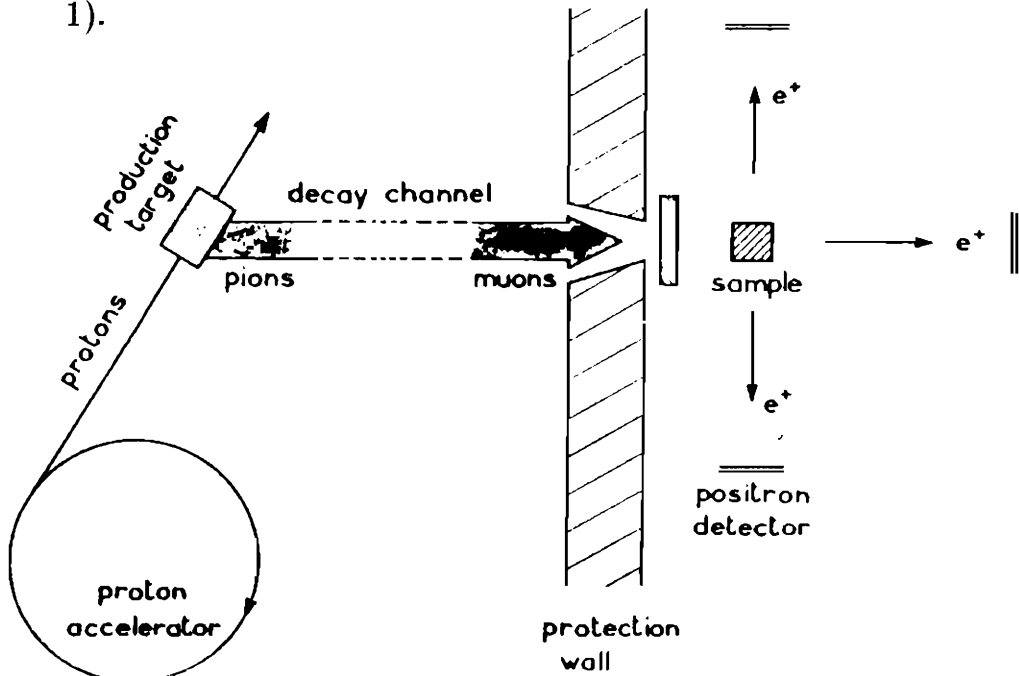


Fig. 1 Visione schematica della produzione di muoni e del loro uso in μ^+ SR

Al fine di ottimizzare la "stopping rate" nel materiale e' conveniente selezionare i μ^+ derivati dal decadimento dei π^+ da fermo. In questo caso si ricava, partendo dalle leggi di conservazione presenti in questa interazione, che il muone emesso ha un' energia di $4.1MeV$, un momento di $29MeV/c$ e una direzione di moto antiparallela al proprio spin (Fig. 2). Se adesso si vanno a prelevare i μ^+ collimati lungo una particolare direzione del loro moto si può ottenere un fascio di muoni con una polarizzazione di

spin vicino al 100%. È di fondamentale importanza che il fascio di muoni entranti nel campione presenti la maggiore polarizzazione di spin possibile in quanto la sensibilità della misura è proporzionale a tale polarizzazione. La possibilità di polarizzare a priori gli spin delle sonde microscopiche usate è un notevole vantaggio in quanto tale polarizzazione è presente indipendentemente dalla temperatura del campione, al contrario di altre tecniche microscopiche, quali l' NMR, dove la polarizzazione degli spin nucleari decresce con una legge di Curie all' aumentare della temperatura. Oltre al vantaggio di una elevata polarizzazione i muoni emessi "da fermi" presentano la peculiarità di avere un basso momento, il che comporta una termalizzazione del μ^+ nel campione su distanze relativamente brevi (ideale per campioni sottili).

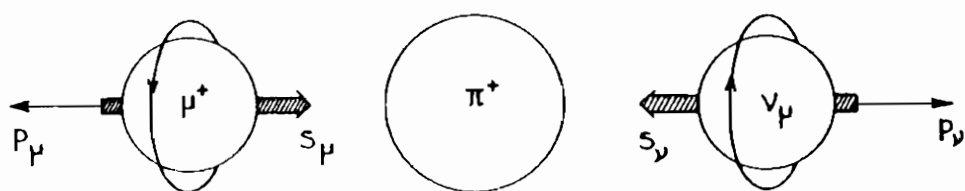


Fig. 2 Decadimento del pione da fermo

Nel caso di muoni emessi da π^+ in volo, la distribuzione in termini di momento e la distribuzione angolare lungo la quale vengono emessi i μ^+ comporta una forte perdita della polarizzazione di spin, recuperabile però tramite l' uso di campi magnetici che permettono di selezionare lungo particolari direzioni solo i muoni con un certo momento. Con l' ausilio di questi magneti si possono raggiungere valori di polarizzazione del 60 – 80% [1].

Il μ^+ nella materia

I muoni polarizzati vengono iniettati all' interno del campione

e termalizzano, principalmente tramite gli urti con gli elettroni, in tempi inferiori al picosecondo; ben più brevi dei $2.2\mu s$ di vita media del muone. Durante il processo di termalizzazione il muone non è soggetto a nessuna interazione magnetica così forte (iperfine per esempio) da provocare una sua depolarizzazione [4]. Il muone passa quindi quasi tutta la sua vita in un sito ben definito del campione, oppure diffondendo a partire da esso; ma comunque lontano dai siti eccessivamente perturbati all'inizio della sua termalizzazione, durante la quale il fascio di muoni può aver creato dei difetti reticolari.

Se il campione è immerso in un campo magnetico esterno B_{ext} allora lo spin del μ^+ evolverà nel tempo secondo la precessione di Larmor attorno al campo locale B_μ con una frequenza di precessione $\nu_\mu = \gamma_\mu B_\mu$ ($\gamma_\mu = 135.5 \text{ MHz/T}$); B_μ in generale può essere espresso come:

$$B_\mu = B_{ext} - B_{demag} + B_{Lor} + B_{hyp} + B_{dip} \quad (1)$$

essendo B_{ext} il campo esterno applicato, B_{demag} è il campo di demagnetizzazione del campione, B_{Lor} è il campo della cavità di Lorentz all'interno della quale si trova il muone e B_{hyp} e B_{dip} sono rispettivamente i campi di origine iperfine e dipolare. Dopo un tempo dell'ordine di $\tau_\mu = 2.2\mu s$ il muone decadrà per interazione debole emettendo un positrone, un neutrino e un antineutrino:

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu$$

La sezione d'urto di tale interazione è asimmetrica rispetto alla direzione dello spin del μ^+ , ed in particolare la probabilità di avere un e^+ con energia E emesso lungo la direzione formante un'angolo θ con lo spin del muone è [5]:

$$W(\theta, E) = K(3 - 2E)[1 + (1 - 2E)\cos\theta/(3 - 2E)]E^2 \quad (2)$$

se si sommano i contributi alle diverse energie si ottiene la seguente distribuzione angolare:

$$W(\theta) = 1 + A\cos\theta \quad (3)$$

dove A è una costante che assume il suo valore massimo se si selezionano solo i positroni a più alta energia (Fig. 3). Si capisce dalla Eq. (3) che si ha una maggiore probabilità di emettere il positrone lungo la direzione dello spin del μ^+ , e che si può avere quindi una nozione della direzione dello spin muonico all'istante t in cui decade tramite la rivelazione del positrone. Rivelando gli e^+ emessi in ogni istante di tempo con degli scintillatori disposti in un'opportuna geometria attorno al campione si può studiare il moto di precessione del μ^+ nel tempo.

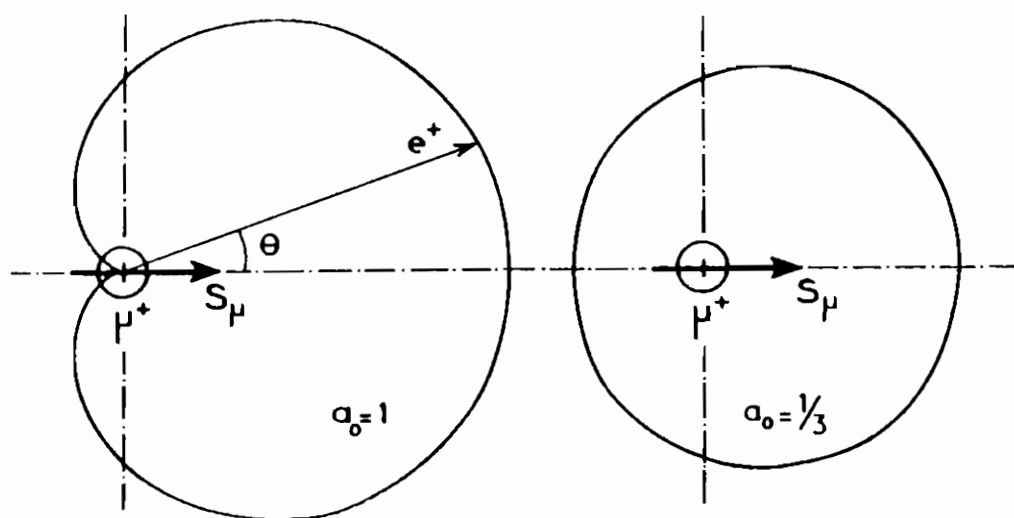


Fig. 3 Distribuzione angolare $W(\theta)$ del decadimento dei positroni quando solo i positroni a più alta energia sono rivelati ($a_0 = 1$) e quando sono tutti rivelati ($a_0 = 1/3$).

Saranno presi in esame adesso i diversi esperimenti tipici che si svolgono in μ^+ SR: in campo trasversale, in campo longitudinale e in campo nullo.

Esperimenti in campo trasversale

Con il termine trasversale si intende dire che il campo magnetico esterno viene applicato perpendicolarmente alla polarizzazione del fascio di muoni entrante nel campione. Consideriamo

un' esperimento in cui i muoni arrivano in pacchetti, cioè sotto forma di impulsi di circa $10^4 - 10^5$ muoni alla volta, piuttosto che in continua, dove i muoni vengono analizzati uno alla volta.

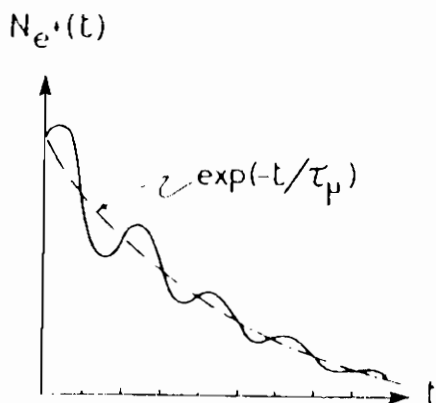


Fig. 4 Istogramma risultante dalla rivelazione degli e^+ emessi dai muoni al variare del tempo.

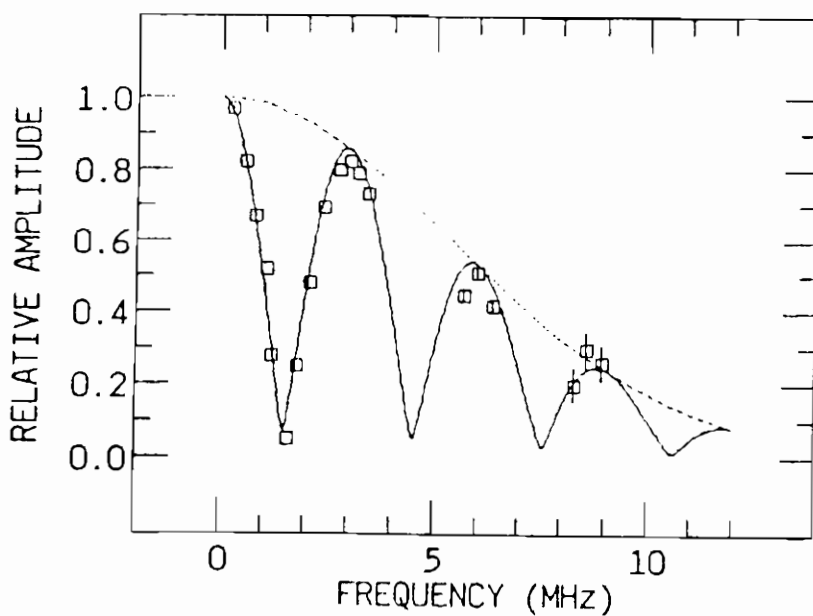


Fig. 5 Ampiezza relativa del segnale al variare di ν_μ nel caso di esperimenti in pulsata al RAL con un solo pacchetto largo 70ns (curva tratteggiata), o con due pacchetti distanziati di 330ns (con-

tinua)

Quando il pacchetto arriva in prossimità del campione, attraverso un rivelatore genera un segnale di "start" comune a dei TDC (time to digital converter) e ad un opportuno "orologio" che viene fermato quando un positrone è rivelato da uno dei telescopi situati ai vari angoli nel piano di precessione. Tale informazione temporale una volta istogrammata permette di ricostruire il numero di positroni emessi in una particolare fetta dell'angolo solido (uno scintillatore) al variare del tempo. Tale istogramma ha la forma indicata in Fig. 4. La larghezza temporale Δ dell'impulso di μ^+ entranti pone dei limiti alla finestra di frequenze osservabili; in particolare ci sarà un taglio nella finestra spettrale per campi locali $B_\mu > \frac{1}{\gamma\Delta}$ (Fig. 5). È opportuno, infine, che i diversi pacchetti siano distanziati fra di loro di un tempo ben più lungo di τ_μ per evitare di sovrapporre esperimenti relativi a pacchetti diversi.

Consideriamo adesso l'interpretazione analitica dell'andamento di questo istogramma. Il numero di positroni emessi nell'angolo solido al tempo t è:

$$N^+(t) = W(\theta)N(t), \quad N(t) = N_0 \exp(-t/\tau_\mu) \quad (4)$$

$N(t)$ è il numero di muoni ancora presenti all'istante t . Consideriamo un fascio di muoni di polarizzazione pari a P_μ , allora, facendo uso della Eq. (3), possiamo riscrivere la Eq. (4) come:

$$N^+(t) = K \exp(-t/\tau_\mu)(1 + AP_\mu \cos\theta) \quad (5)$$

dove K è una costante dipendente dal numero iniziale di muoni. Siccome il muone è immerso in un campo magnetico esterno trasversale la direzione della polarizzazione non sarà costante nel tempo e in generale il suo moto può essere espresso come [6]:

$$\mathbf{P}_\mu(t) = [P_x(0)\cos(\omega_\mu t + \varphi), P_y(0)\sin(\omega_\mu t + \varphi), P_z(0)] \quad (6)$$

dove $\omega_\mu = 2\pi\gamma_\mu B$ e φ è la fase iniziale della polarizzazione dei muoni quando entrano nel campo magnetico. Siccome stiamo considerando un esperimento in geometria trasversale la componente z (lungo \mathbf{B}) ed y della polarizzazione iniziale sono nulle; quindi possiamo riscrivere la Eq. (5) come:

$$N^+(t) = K \exp(-t/\tau_\mu)(1 + AP_x(0)\cos(\omega_\mu t + \varphi)) \quad (7)$$

Il muone precede quindi nel piano xy perpendicolare al campo magnetico; è per questo che negli esperimenti in geometria trasversale gli scintillatori per gli e^+ vengono disposti attorno al campione in questo piano.

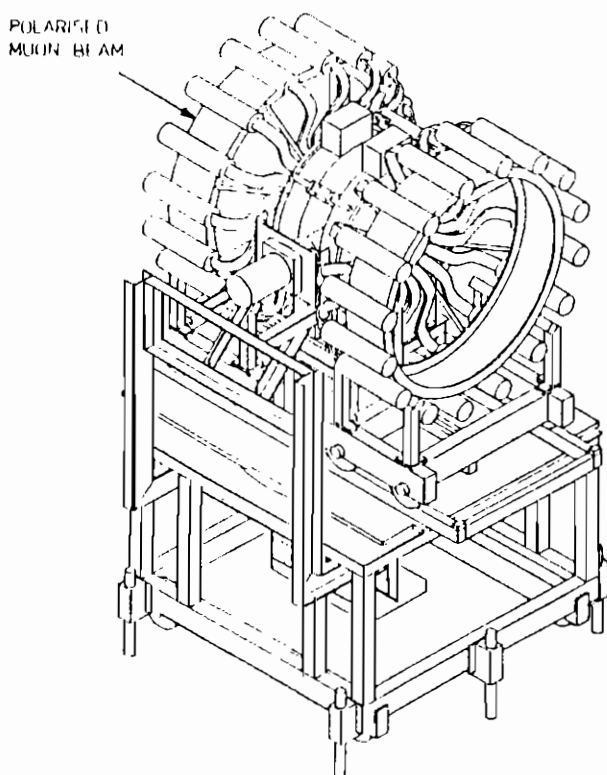


Fig. 6 Spettrometro DIZITAL (RAL) in geometria longitudinale

In generale, a causa dell'interazione dei μ^+ con una distribuzione di campi locali, di dipolo nucleare ad esempio, la polarizzazione dei muoni non rimarrà costante nel tempo ed uguale a $P_x(0)$ ma decadrà con una funzione di depolarizzazione caratteristica $G_x(t)$. Introducendo questa ultima informazione nella Eq. (7) possiamo arrivare all'espressione analitica che rispecchia l'istogramma trovato sperimentalmente, come quello di Fig. 4. Abbiamo quindi che il numero di positroni emessi su un particolare scintillatore al tempo t sono:

$$N^+(t) = K \exp(-t/\tau_\mu) (1 + AP_x(0)G_x(t) \cos(\omega_\mu t + \varphi)) \quad (8)$$

Siccome il primo fattore rappresenta il semplice decadimento dei muoni e non dà alcuna informazione sul sistema in esame, è utile estrarre e rappresentare graficamente solo l'ultimo termine $AP_x(0)G_x(t)\cos(\omega_\mu t + \varphi)$ come si vede in Fig. 7, dove la funzione di depolarizzazione e la frequenza di precessione di Larmor rendono conto dell'interazione del muone con il reticolo nel quale è stato impiantato. Tramite l'uso delle trasformate di Fourier si può analizzare tale interazione nel dominio delle energie (frequenze) (Fig. 8).

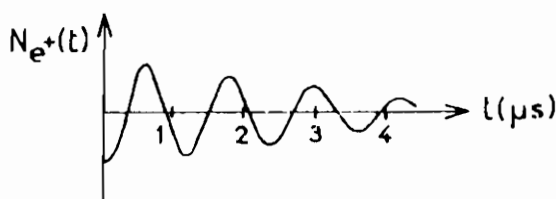


Fig. 7 Decadimento della polarizzazione del muone nel tempo

La funzione di depolarizzazione del muone può assumere forme diverse a seconda dei tempi di correlazione caratteristici dei campi locali al μ^+ . Fluttuazioni dei campi locali che possono originare indipendentemente o dal moto del muone in campi che fluttuano lentamente o dalle fluttuazioni di tali campi al sito di un muone statico. Si possono distinguere tre situazioni modello [6]: moti lenti, ovvero il tempo di correlazione di tali fluttuazioni è ben più lungo dell'inverso della distribuzione di frequenze di precessione dei muoni ($\tau_c \gg (\Delta\omega_\mu)^{-1} = (2\pi < \Delta B^2 >^{\frac{1}{2}} \gamma_\mu)^{-1}$, dove $< \Delta B^2 >$ è il momento secondo della distribuzione di campi al muone), moti veloci ($\tau_c \ll (\Delta\omega_\mu)^{-1}$) e moti intermedi ($\tau_c \simeq (\Delta\omega_\mu)^{-1}$). Mentre per i due casi limite di moti veloci e moti lenti l'espressione della funzione di depolarizzazione è nota con esattezza, per i moti intermedi bisogna fare uso di un'espressione approssimata per la funzione di depolarizzazione. In particolare, nel caso di moti lenti la funzione di depolarizzazione ha un'andamento di tipo Gaussiano:

$$G_x(t) = \exp\left(-\frac{< \Delta B^2 > \gamma_\mu^2 t^2}{2}\right) = \exp(-\sigma_G^2 t^2)$$

Nel caso di moti veloci ha un' andamento di tipo esponenziale:

$$G_x(t) = \exp(-\langle \Delta B^2 \rangle \gamma_\mu^2 \tau_c t) = \exp(-\sigma_L t)$$

Mentre per il caso di moti intermedi è stata ricavata la seguente espressione approssimata:

$$G_x(t) = \exp(-\langle \Delta B^2 \rangle \gamma_\mu^2 \tau_c^2 [\exp(\frac{-t}{\tau_c}) - 1 + \frac{t}{\tau_c}])$$

Man mano che le fluttuazioni dei campi al muone diventano più veloci non solo si osserva un cambiamento da una forma di riga Gaussiana a una Lorentziana per quello che concerne la riga di assorbimento, ma anche un restringimento di tale riga rispetto alla configurazione statica in quanto le fluttuazioni veloci dei campi locali tendono a mediare la distribuzione statica di campi; si parla in questi casi, come in NMR, di "motional narrowing" [6].

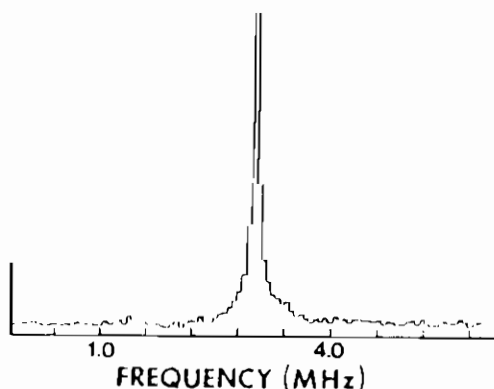


Fig. 8 Tipico spettro di assorbimento in μ^+SR

Esperimenti in campo longitudinale e in campo nullo

Se il campo viene applicato lungo la direzione z del fascio di muoni allora i muoni rimarranno completamente polarizzati lungo tale direzione senza precedere. Di fatti, considerando che $P_x(0) = P_y(0) = 0$, partendo dalle Eq. (5) e (6) si può ottenere

una equazione analoga alla Eq. (8) per il numero di positroni emessi al variare di t in una fetta di angolo solido:

$$N^+(t) = K \exp(-t/\tau_\mu)(1 + AP_z(0)G_z(t)\cos\varphi) \quad (9)$$

Se si vanno a rivelare i positroni emessi in direzione parallela (F) e antiparallela (B) al fascio incidente si può estrarre direttamente la funzione di depolarizzazione longitudinale (Fig. 9):

$$\frac{N^+(t, 0)}{N^+(t, 180)} = R \frac{[1 + AG_z(t)]}{[1 - AG_z(t)]} \quad (10)$$

dove R è un fattore sperimentale che tiene conto della differente sensibilità dei due rivelatori F e B; si può quindi ricavare direttamente:

$$G_z(t) = \frac{1}{A} \frac{N^+(t, 0) - RN^+(t, 180)}{N^+(t, 0) + RN^+(t, 180)} \quad (11)$$

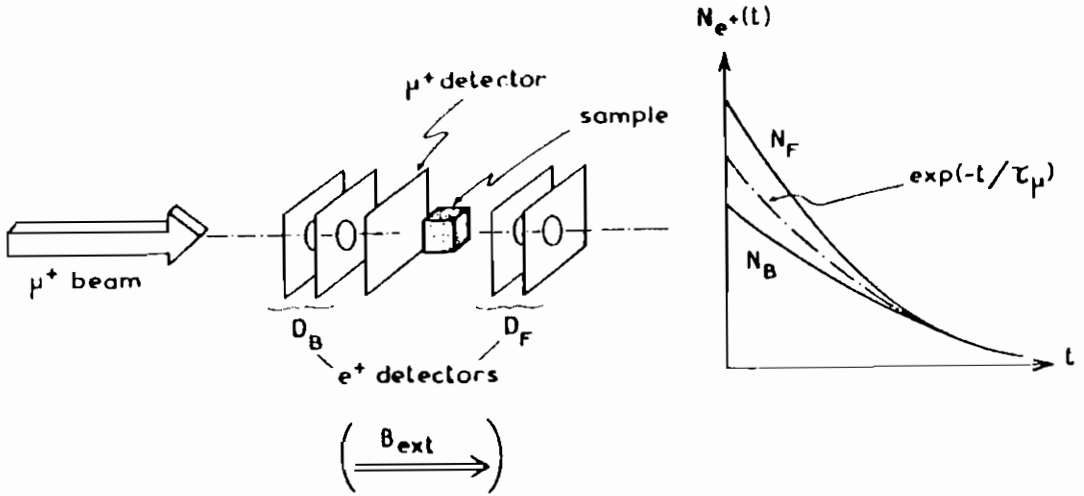


Fig. 9 Rappresentazione schematica di un esperimento in geometria longitudinale. N_F e N_B sono i conteggi dei rivelatori D_F e D_B rispettivamente.

Distinguiamo due situazioni per quello che concerne l' andamento della funzione di depolarizzazione longitudinale $G_z(t)$: la prima in cui i campi locali che danno luogo alla depolarizzazione sono più grandi del campo esterno applicato, la seconda in cui il campo esterno è ben più grande di questi campi di depolarizzazione. Supponiamo in prima approssimazione di svolgere un' esperimento in campo nullo (ZF); l' evoluzione temporale della polarizzazione del μ^+ in un campo locale \mathbf{B}_μ formante un angolo δ con la direzione del fascio di muoni entrante è (Fig. 10):

$$P_z(t) = P_z(0)(\cos^2 \delta + \sin^2 \delta \cos \omega_\mu t) \quad (12)$$

Se si va a considerare la media di tale polarizzazione su tutte le possibili orientazioni α dei campi al muone si ha che:

$$\langle P_z(t) \rangle_\alpha = P_z(0) \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \langle \cos \omega_\mu t \rangle \right) \quad (13)$$

Se supponiamo adesso che per quello che riguarda la distribuzione in intensità dei campi locali statici si abbia una distribuzione di forma Gaussiana, otteniamo per l' espressione della funzione di depolarizzazione longitudinale $G_z(t)$ [7]:

$$G_z(t) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} (1 - \gamma_\mu^2 \langle \Delta B^2 \rangle t^2) \exp(-\frac{1}{2} \gamma_\mu^2 \langle \Delta B^2 \rangle t^2) \quad (14)$$

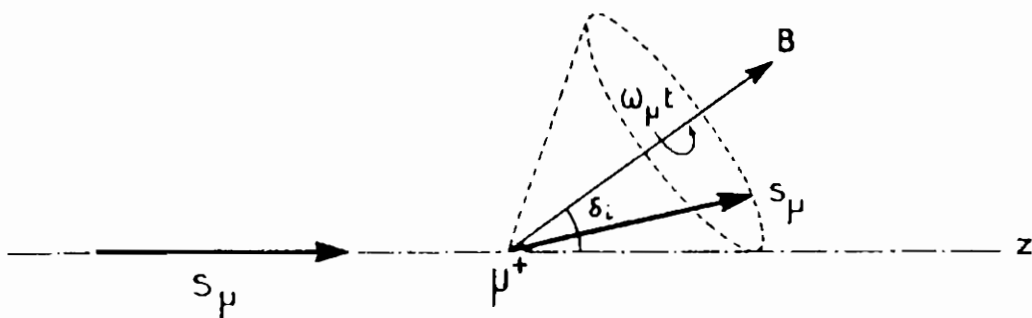


Fig. 10 Precessione dello spin del muone attorno al campo locale \mathbf{B}

L'andamento della $G_z(t)$ è illustrato in Fig. 11. Mentre per tempi brevi si osserva un'andamento di tipo Gaussiano come per la $G_x(t)$, a tempi lunghi si osserva il recupero di quel terzo di polarizzazione media angolare presente lungo la direzione z .

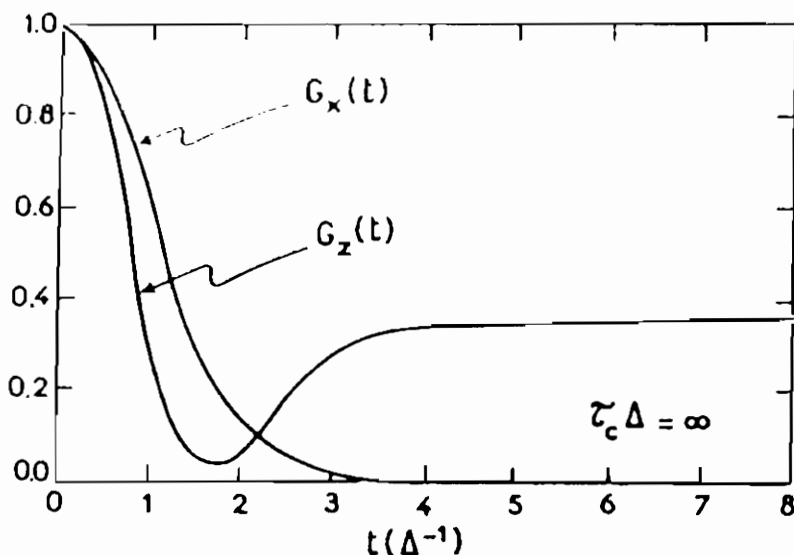


Fig. 11 Andamento tipico della funzione di depolarizzazione longitudinale

È da notare che tale coda di polarizzazione a $\frac{1}{3}$ è sensibile anche a fluttuazioni estremamente lente dei campi locali (Fig. 12). Si osserva che già per tempi di correlazione più lunghi di $10(<\Delta B^2 >^{\frac{1}{2}} 2\pi\gamma_\mu)^{-1}$ si ha un crollo della polarizzazione per $t \rightarrow \infty$ da $\frac{1}{3}$ a meno di $\frac{1}{5}$.

Se consideriamo adesso la configurazione in cui il campo esterno è ben più grande dei campi di depolarizzazione interni, si osserva che la polarizzazione del muone si mantiene praticamente costante vista la presenza di una forte componente longitudinale del campo al μ^+ e di trascurabili componenti trasversali dovute ai campi locali (Fig. 13). In questo limite quindi $G_z(t) = 1$.

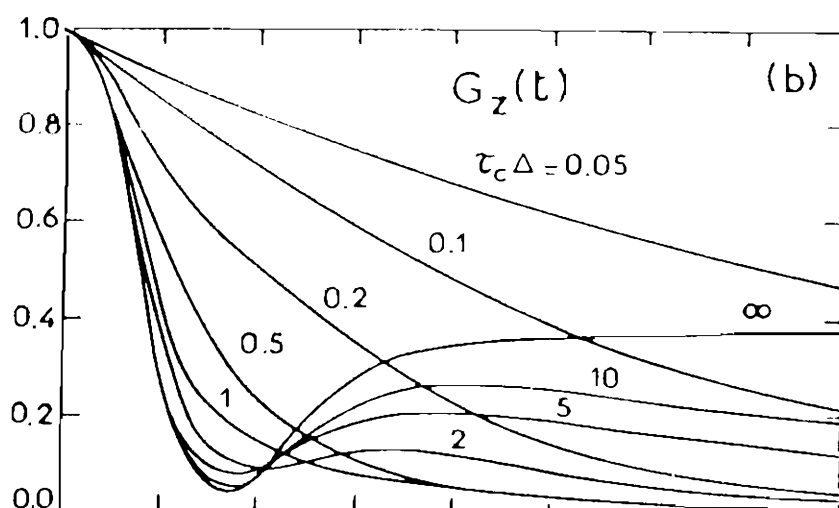


Fig. 12 Andamento della $G_z(t)$ al variare dei tempi caratteristici τ_c delle fluttuazioni di campo magnetico

Di fatti, sperimentalmente si osserva che facendo esperimenti in campi esterni di diversa intensità si ha un passaggio da una condizione in cui la $G_z(t)$ rispecchia quella dell' Eq. (14) per ZF a condizioni in cui si osservano depolarizzazioni sempre minori (Fig. 14).

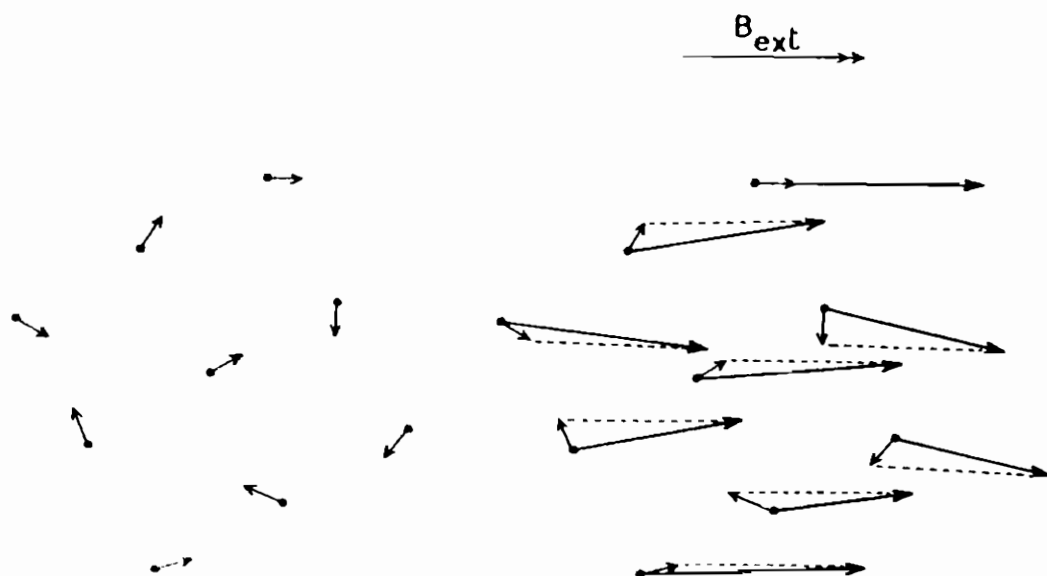


Fig. 13 Effetto di un forte campo esterno sulla distribuzione di campi locali

In generale però si possono avere processi che danno luogo a una variazione della polarizzazione del muone che non hanno origini statiche ma dinamiche. Quando si svolge un' esperimento in geometria longitudinale il sistema di muoni è idealmente 100% polarizzato lungo il campo come se la sua temperatura di spin fosse nulla. Una volta all' interno del campione, tramite le interazioni con il reticolo (fluttuazioni di spin, elettroni di conduzione, etc...), il sistema di muoni termalizza verso la temperatura del reticolo stesso con una conseguente variazione della polarizzazione dei muoni. Il tempo caratteristico di tale processo è detto, per analogia con l' NMR, T_1 ; spesso si usa esprimere il processo di rilassamento in termini del suo inverso λ che dà la probabilità di rilassamento nell' unità di tempo tra i livelli Zeeman del muone. Nella maggior parte dei casi tale rilassamento origina da fluttuazioni

magnetiche; in questi casi λ é direttamente correlata con le componenti fluttuanti dei campi al μ^+ perpendicolari all' asse z del campo esterno [8]: $\lambda = \frac{\gamma_\mu^2}{2} \int_0^\infty \langle B_+(0)B_-(t) \rangle e^{-i\omega_\mu t} dt$

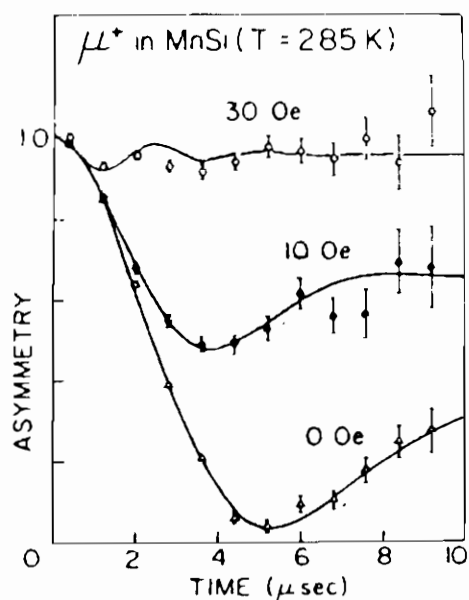


Fig. 14 $G_z(t)$ in campi dell' ordine di quello di dipolo nucleare nel MnSi

ALCUNI ESEMPI:

1) La μ^+ SR nei metalli

Consideriamo l' Hamiltoniana di interazione del muone con gli elettroni di conduzione di un metallo; in generale la si può suddividere in tre contributi principali [9]:

$$\mathcal{H} = \frac{16\pi}{3} \mu_B \gamma_\mu \hbar \mathbf{I} \cdot \mathbf{S}(\mathbf{r}) \delta(r) - 2\mu_B \gamma_\mu \hbar \mathbf{I} \cdot \left[\frac{\mathbf{S}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{r})}{r^5} \right] - \gamma_\mu \hbar \frac{e}{mc} \left[\mathbf{I} \cdot \frac{\mathbf{r} \times \mathbf{p}}{r^3} \right] \quad (15)$$

dove μ_B è il magnetone di Bohr, \mathbf{I} ed \mathbf{S} sono rispettivamente lo spin del μ^+ e quello dell' elettrone ed $\mathbf{r} \times \mathbf{p}$ è il momento orbitale dell' e^- .

Il primo termine origina dall' interazione di contatto di Fermi al sito del muone, il secondo rappresenta l' interazione dipolare tra gli spin del μ^+ e quelli degli elettroni di conduzione, mentre l' ultimo rappresenta l' interazione tra lo spin del muone e il momento orbitale elettronico. Mentre il primo termine dà luogo a un campo isotropo al μ^+ gli altri due danno luogo a campi anisotropi. In particolare, il termine dipolare si annullerà in cristalli dove le funzioni d' onda elettroniche presentano una simmetria sferica, a meno di particolari effetti dovuti all' interazione spin-orbita.

I primi due termini dell' Eq. (15) possono essere riscritti esprimendo tali interazioni in termini di un tensore di accoppiamento iperfine \mathcal{A} tra lo spin elettronico e quello muonico.

$$\mathcal{H} = \mathbf{I} \cdot \mathcal{A} \cdot \mathbf{S} + \mathcal{H}_{orb} \quad (16)$$

essendo $\mathcal{A} = \mathcal{A}_{con} + \mathcal{A}_{dip}$, il quale potrebbe essere calcolato a priori se fossero note le funzioni d' onda elettroniche dello stato fondamentale in presenza del μ^+ .

Quindi, se $\langle S \rangle \neq 0$, o perchè il materiale presenta un'ordine magnetico, o perchè è presente un campo esterno applicato vi sarà un campo iperfine statico al sito del μ^+ . In particolare, se il materiale non è magneticamente ordinato, ma si applica un campo esterno vi sarà una variazione del campo al muone rispetto alla condizione in cui si ha completa assenza di interazioni tra il muone e il suo circondario:

$$\Delta K = \frac{B_\mu - B_{Lor}}{B_{Lor}} = \mathcal{A}\chi_s + \mathcal{A}_{orb}\chi_L + \mathcal{A}_{dia}\chi_{dia} \quad (17)$$

dove il primo termine è il contributo iperfine che origina dalla polarizzazione di spin, il secondo origina dal momento orbitale elettronico indotto dal campo esterno e l'ultimo termine origina dallo schermo diamagnetico dovuto agli elettroni di conduzione. Va notato che la variazione di campo è riferita al campo B_{Lor} all'interno della cavità di Lorentz dove si trova il muone.

La quantità $K_s = \mathcal{A}\chi_s$, relativa alla polarizzazione di spin elettronico, prende il nome di shift di Knight. Esso origina dalla risposta del sistema di spin elettronici a un campo magnetico statico, quindi è proporzionale alla suscettività di spin $\chi(\vec{q}=0, \omega=0)$. In molti metalli gli elettroni di conduzione sono in onda s ; in queste condizioni il termine dominante allo shift di Knight è quello che origina dall'interazione di contatto di Fermi. Allora si può scrivere lo shift di Knight come [6]:

$$K_s = \frac{8\pi}{3} \langle |\psi_{K_F}(r_\mu)|^2 \rangle \frac{\chi_s}{n_o} = \frac{8\pi}{3} \rho_s(r_\mu) \chi_s \quad (18)$$

dove $\langle |\psi_{K_F}(r_\mu)|^2 \rangle$ è la densità elettronica media degli e^- sulla sfera di Fermi al sito del muone, n_o è la densità elettronica di spin del sistema imperturbato, cioè in assenza del μ^+ . $\rho_s(r_\mu)$ è la densità di spin elettronica al sito del muone normalizzata per n_o ; questa quantità rende conto dell'innalzamento della densità locale di spin a causa della presenza del muone. Il muone difatti crea una ridistribuzione di carica nelle sue immediate vicinanze rivestendosi di una nuvola elettronica di schermo. Le misure di K_s costituiscono quindi un'informazione rilevante per la comprensione della struttura elettronica di impurezze di tipo idrogenoide e per la comprensione della distribuzione elettronica interstiziale.

Lo studio della distribuzione elettronica attorno a un impurezza di tipo idrogenoide è stata affrontata sia a partire da modelli tipo jellium, sia, più recentemente sulle basi di approcci di schermo non lineare usando funzionali di densità di spin [10]. Tramite questi modelli è stato possibile calcolare il fattore di innalzamento di densità di spin sia al variare della distanza elettronica media $r_s = (3/4\pi n)^{1/3}/a_B$, dove a_B è il raggio di Bohr, che al variare della distanza dal muone. Questi risultati (vedi Fig. 15) possono essere confrontati con i dati sperimentali ottenuti attraverso misure parallele di suscettività di spin, di r_s e di shift di Knight al muone (vedi Tab. II). Si può vedere come per molti dei metalli riportati in Tab. II i valori calcolati e quelli ottenuti sperimentalmente per ρ_s sono in buon accordo.

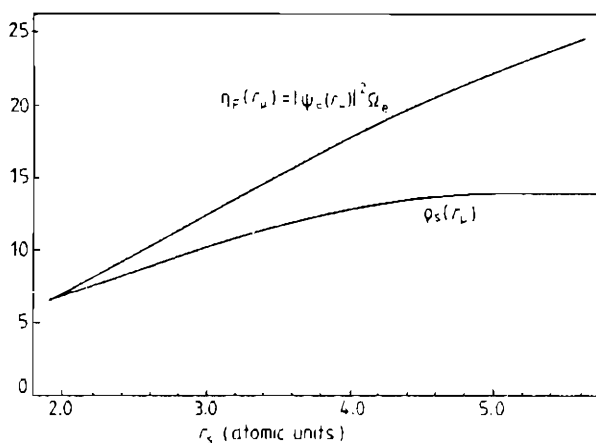


Fig. 15 Andamento del fattore di innalzamento della densità di spin $\rho_s(r_\mu)$ al variare della distanza media tra gli e^-

Fino a questo momento non ci si è preoccupati di quale sia la possibile localizzazione del muone all'interno del reticolo; se esso si va a localizzare in un sito a circondario tetraedrico o in un sito a circondario ottaedrico di un reticolo cubico a corpo centrato ad esempio. Un possibile modo di risalire a tale localizzazione è tramite lo studio della funzione di depolarizzazione del muone.

Metal	r_s	$10^6 \chi_s$ (emu cm ⁻³)	K_{iso} (ppm)	K_{ax} (ppm)
Li	3.25	2.10	8.6 ± 4.0	
Na	3.93	1.09	76.5 ± 5.0	
K	4.86	0.90	63.2 ± 4.5	
Rb	5.20	0.86	66.1 ± 4.3	
Cs	5.63	0.81	31.0 ± 4.0	
Cu	2.67	1.36	60.0 ± 2.5	
Ag	3.02	0.88	94.0 ± 3.5	
Au	3.01	0.99	64.0 ± 10	
Be	1.88	~ 0.2	- 9.0 ± 1.6	- 3.0 ± 1.9(?)
Mg	2.65	~ 1.58	43.3 ± 3.5	0.0 ± 2.0
Ca	3.27	~ 1.58	21.2 ± 6.2	
Sr	3.56	≥ 2.69	- 18.4 ± 6.8	
Ba	3.69	~ 0.99	29.6 ± 5.0	
Zn	2.31	~ 0.99	60.0 ± 5†	3.0 ± 1.3†
Cd	2.59	~ 0.73	55.0 ± 5†	- 3.3 ± 1.3†
Hg	2.75	~ 1.73	117.0 ± 11†	
Al	2.07	1.77	79.6 ± 4.0	
Ga	2.19	~ 0.7	- 17.0 ± 3.5	
Pb	2.30	~ 2.36	105.2 ± 3.5	
Sb		~ 0.082	8700§	2200§
Bi		~ 0.014	- 276	9 ± 6

† 20 K. ‡ - 50 °C. § 1.5 K. || 4.2 K (preliminary data).

Tab. II Dati di shift di Knight per diversi metalli assieme ai valori di suscettività di spin e a quelli di r_s

Nei metalli il contributo dominante alla depolarizzazione origina dall' interazione dipolare tra i nuclei e il muone; il contributo degli elettroni di conduzione é trascurabile perché essendo i tempi di correlazione dei campi magnetici elettronici in prima approssimazione dell' ordine di $\frac{a}{v_F}$ (a é una distanza dell' ordine del passo reticolare e v_F é la velocità dell' e^- sulla superficie di Fermi), sono troppo brevi rispetto a τ_μ e quindi danno luogo a depolarizzazioni inapprezzabili. Se consideriamo quindi una distribuzione statica (come può avvenire alle basse temperature) di

campi di dipolo nucleare attorno al muone con un momento secondo $\langle \Delta B^2 \rangle = \frac{1}{3} I_n(I_n+1) \gamma_\mu^2 \gamma_n^2 \hbar^2 \sum \frac{(1-3\cos^2\theta_i)}{r_i^6}$, si può calcolare a priori il fattore di depolarizzazione $\sigma_G = 2\pi\gamma_\mu \sqrt{\frac{\langle \Delta B^2 \rangle}{2}}$ per i diversi siti possibili del muone. Tale studio ha permesso di identificare con sufficiente precisione la localizzazione del muone alle basse temperature in diversi metalli: in un sito ottaedrico nel Cu (cubico a facce centrate), in un sito ottaedrico nell' Al ad esempio [11] (Fig. 16). A tali conti andrebbe fatta una non trascurabile correzione dovuta alle distorsioni introdotte dal muone nel suo circondario.

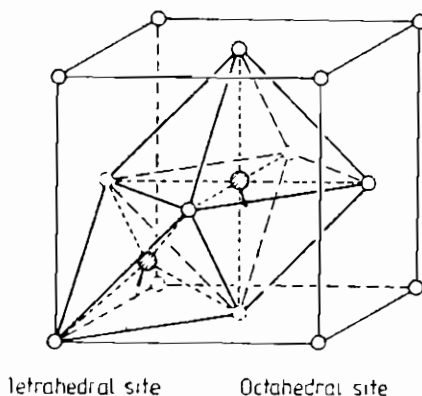


Fig. 16 Siti ottaedrico e tetraedrico in un reticolo cubico a facce centrate

Alle temperature più elevate si può avere una attivazione termica del moto del muone, il quale comincia a diffondere tra i diversi siti possibili (tetraedrici o ortorombici). Tale diffusione porta associata con se una deformazione del reticolo che corrisponde alla creazione di un polarone [12]. Questo moto diffusivo fa sì che i campi al muone vengano mediati nel tempo, dando luogo a un fenomeno di "motional narrowing"; di fatti si osserva che all' aumentare della temperatura si ha una graduale diminuzione della funzione di depolarizzazione σ [13] (Fig. 17).

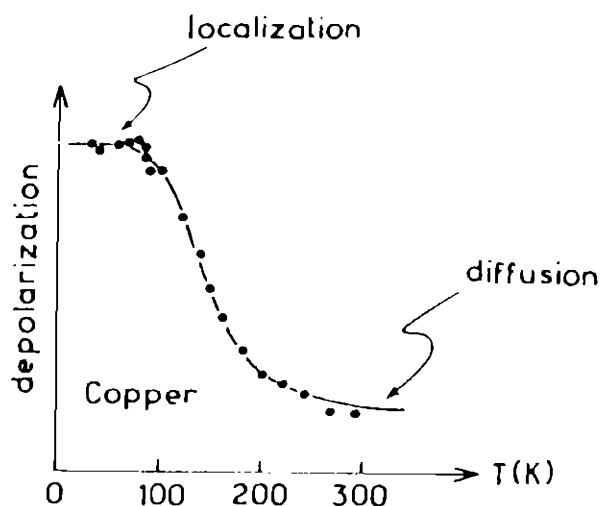


Fig. 17 Andamento della funzione di depolarizzazione del μ^+ nel rame metallico al variare della temperatura

2) La μ^+ SR nei materiali magnetici

Lo studio di materiali magneticamente ordinati costituisce uno dei punti di forza di una tecnica di indagine magnetica microscopica quale la μ^+ SR. Il muone impiantato all' interno del materiale magnetico è sottoposto, in assenza di un campo esterno

applicato, a un campo locale di origine sia iperfine che dipolare:

$$B_{\mu} = \sum_i T_i S_i \quad (19)$$

dove T_i è il tensore di accoppiamento tra lo spin i -esimo S_i e il μ^+ , che può avere un origine sia di carattere dipolare che iperfine. In particolare, il contributo iperfine in alcuni sistemi magnetici risulta trascurabile e ciò dipende dal sito in cui si localizza il muone e dalla assenza di un legame chimico con gli ioni circostanti, mentre assumerà maggiore rilevanza in sistemi metallici dove la delocalizzazione delle funzioni d'onda elettroniche ai siti interstiziali aumenta.

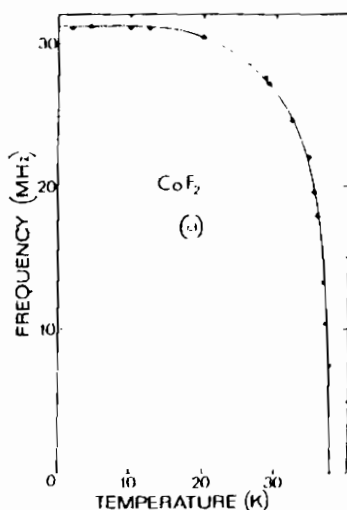


Fig. 18 Andamento della frequenza di precessione libera del muone nella fase magneticamente ordinata del CoF_2

Se si va a studiare l'andamento della frequenza di precessione libera del muone $\nu_{\mu} = \gamma B_{\mu}$ al variare della temperatura nella fase magneticamente ordinata si ha una informazione diretta sull'andamento della magnetizzazione con la temperatura, $M(T)$, visto che $B_{\mu} = k \langle S \rangle$. Un' esempio caratteristico è dato dallo studio della frequenza di precessione del muone in un isolante magnetico quale il CoF_2 (Fig. 18) [14]. Alle basse temperature lo studio dello scostamento di $M(T)$ dal valore assunto per $T \rightarrow 0$ ha permesso di verificare l'accordo tra il risultato sperimentale e le predizioni della teoria delle onde di spin.

Viceversa, lo studio di $M(T) = M(0)(1 - \frac{T}{T_N})^\beta$ (Fig. 19), vicino alla temperatura critica ha permesso di ricavare l'esponente critico caratteristico del sistema magnetico; in particolare nel CoF_2 è stato ricavato $\beta = 0.33 \pm 0.02$, che è in buon accordo con il valore che ci si aspetta per un sistema di Ising 3D come d'altronde è plausibile visto che il CoF_2 è un sistema antiferromagnetico tridimensionale con uno ione magnetico che presenta una forte anisotropia di ione singolo.

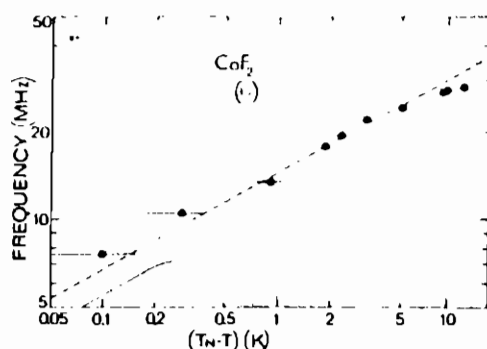


Fig. 19 Andamento della frequenza di precessione libera del muone vicino a T_N nel CoF_2 ; la retta tratteggiata rappresenta l'andamento critico di tale frequenza con un esponente $\beta = 0.33 \pm 0.02$

Lo studio dell'andamento del campo al muone nella fase ordinata di sistemi magnetici quali l' $\alpha\text{-Fe}_2\text{O}_3$ ha portato una chiara evidenza del riorientamento degli spin magnetici alla temperatura di Morin [15]. A tale temperatura il riorientamento degli spin fa cambiare drasticamente il campo dipolare creato dagli spin degli ioni magnetici al sito del muone facendo sì che si osservi una improvvisa diminuzione della frequenza di precessione del muone andando verso le alte temperature (Fig. 20).

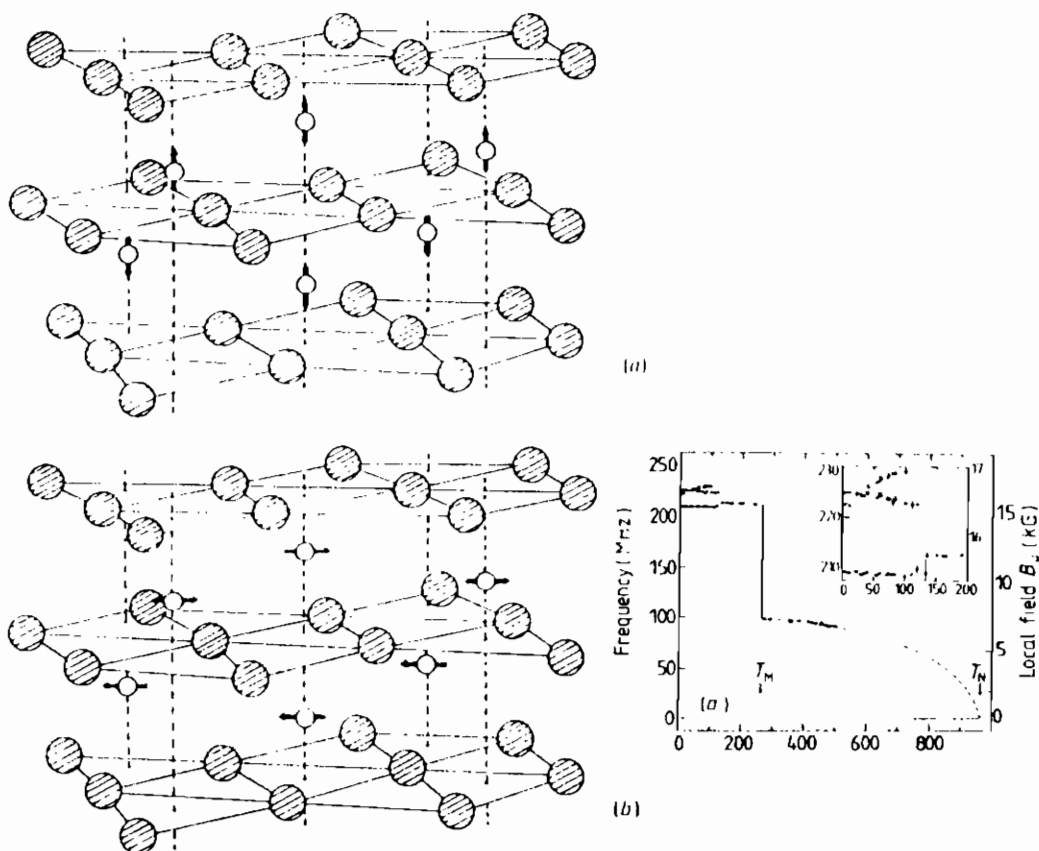


Fig. 20 Struttura magnetica dell' $\alpha\text{Fe}_2\text{O}_3$ sotto (a) e sopra (b) la temperatura di Morin, e rispettivo andamento della frequenza di precessione del muone sotto la temperatura critica

Comprendere la dinamica di spin ed in particolare il comportamento della stessa in vicinanza della temperatura critica di un sistema magneticamente ordinato è uno dei principali obiettivi dello studio dei sistemi magnetici. Le misure dei tempi di rilassamento in $\mu^+\text{SR}$ costituiscono una delle vie fondamentali per raggiungere tale scopo. La misura di λ (rilassamento spin reticolo) in geometria longitudinale ne è un' esempio. Consideriamo il muone immerso in un campo B_μ espresso come nell' Eq. (19), ricordando che:

$$\lambda = \frac{\gamma_\mu^2}{2} \int_0^\infty \langle B_+(0)B_-(t) \rangle e^{-i\omega_\mu t} dt \quad (20)$$

e che, facendo uso dell' espansione in termini delle variabili collet-

tive S_q , $S_i = \sum_q e^{iq\mathbf{r}_i} S_q$, possiamo riscrivere la Eq. (20) come:

$$\lambda = \frac{\gamma_\mu^2}{2} \sum_q \int_0^\infty [fa_q^2 < S_q^\pm(0) S_q^\pm(t) > + fb_q^2 < S_q^z(0) S_q^z(t) >] e^{-i\omega_\mu t} dt \quad (21)$$

dove gli fi_q corrispondono a dei fattori di forma che filtrano, a seconda delle simmetrie del reticolo magnetico, in maniera diversa le fluttuazioni ai diversi vettori d'onda q .

Si nota che nella Eq. (21) è possibile riscrivere i due integrali in termini dei fattori di struttura dinamici $S^{z,\pm}(q, \omega_\mu)$; possiamo quindi riscrivere la Eq. (21) come:

$$\lambda = \frac{\gamma_\mu^2}{2} \sum_q [fa_q^2 S_\pm(q, \omega_\mu) + fb_q^2 S_z(q, \omega_\mu)] \quad (22)$$

che può essere riscritta, sfruttando il teorema di fluttuazione e dissipazione nella versione semiclassica, in termini della parte immaginaria della suscettività dinamica di spin a ω_μ

$$\lambda = \gamma_\mu^2 K T \sum_q \frac{f1_q^2 \chi_\perp''(q, \omega_\mu) + f2_q^2 \chi_\parallel''(q, \omega_\mu)}{\omega_\mu} \quad (23)$$

visto che $\hbar\omega_\mu \ll KT$.

Si capisce quindi che la misura della λ permette di avere informazioni sulla densità spettrale alle basse frequenze dovuta alle diverse eccitazioni presenti nel reticolo, i magnoni ad esempio, e di verificare le teorie, come quella delle onde di spin appunto, tramite lo studio di tale grandezza alle diverse temperature [16]. Lo studio dei tempi di rilassamento vicino alla temperatura critica permette di avere informazioni sul rallentamento delle fluttuazioni magnetiche vicino a tale temperatura.

Essendo l'andamento della suscettività dinamica di spin esprimibile in termini della lunghezza di correlazione delle fluttuazioni magnetiche, la misura di λ permette di conoscere quale

è l' andamento critico di tale lunghezza in una transizione paramagnete-antiferromagnete ad esempio, ricavarne l' esponente critico e sapere se tale comportamento è caratteristico di un sistema di Heisenberg o Ising, 3D o 2D [17] (Fig. 21).

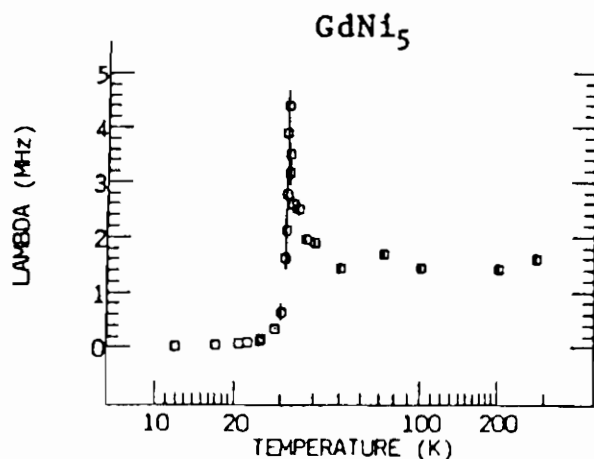


Fig. 21 Andamento di λ attorno alla temperatura di Curie nel $GdNi_5$

3) La μ^+ SR nei superconduttori del II° tipo

Già negli anni settanta, e ancora di più negli anni recenti il muone è stato usato come sonda della distribuzione dei campi magnetici all' interno del reticolo di vortici di un superconduttore di tipo II. La μ^+ SR permette, tramite l' analisi della riga di assorbimento di avere una mappa dei campi locali all' interno del reticolo di vortici stesso [18].

Un superconduttore fortemente del secondo tipo è caratterizzato da $\lambda \gg d \gg \xi$, dove ξ è la lunghezza di coerenza d la distanza tra i vortici e λ la lunghezza di penetrazione. Sotto queste condizioni l' approssimazione di London di considerare le linee di vor-

tici di raggio ξ delle entità deltofornli nel piano normale al campo esterno può essere considerata valida.

Secondo tale approssimazione, nell' assunzione che i vortici si dispongano secondo un ideale reticolo triangolare e che il libero cammino medio dei portatori superconduttori sia ben più grande della ξ , il momento secondo $\langle \Delta B^2 \rangle$ della distribuzione di campi all' interno del reticolo dei vortici é dato da:

$$\langle \Delta B^2 \rangle = k \frac{\Phi_0^2}{\lambda^4} \quad (24)$$

e la distribuzione di campi presenta l' andamento mostrato in Fig. 22.

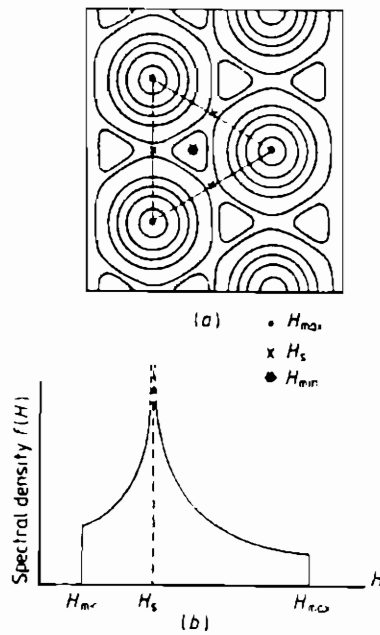


Fig. 22 Andamento della distribuzione di campo $n(B)$ in un reticolo di vortici triangolare secondo l' approssimazione di London

Sperimentalmente però le singolarità di Fig. 22 sono smussate a causa delle distorsioni introdotte dai centri di pinning nella distribuzione di campi (Fig. 23).

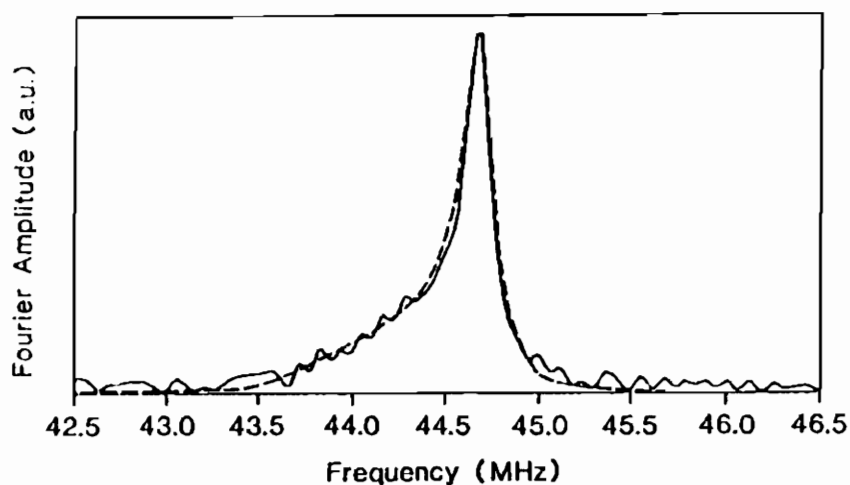


Fig. 23 Distribuzione sperimentale dei campi all' interno del reticolo di vortici da una riga di assorbimento μ^+SR

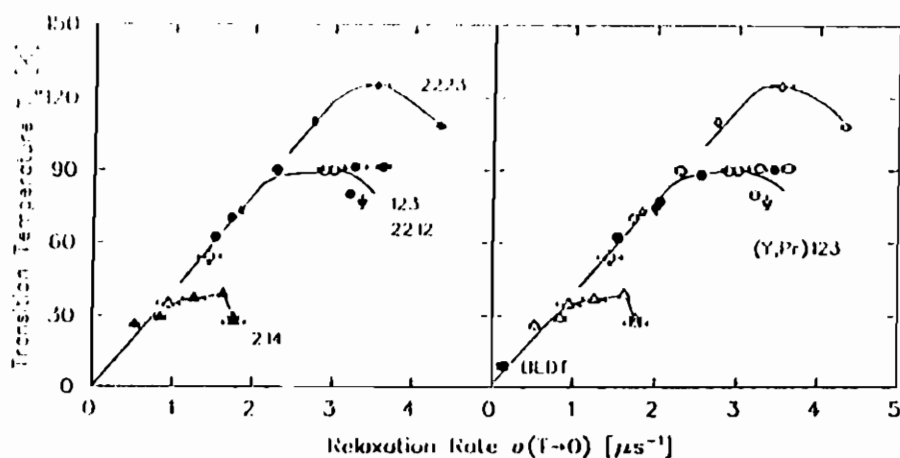


Fig. 24 Andamento di T_c in funzione di σ in composti superconduttori ad alta temperatura critica

Essendo la lunghezza di penetrazione direttamente correlata

alla densità di portatori superconduttivi e alla loro massa efficace ($\lambda \propto \sqrt{\frac{m^*}{n}}$) la μ^+ SR permette tramite lo studio della funzione di depolarizzazione σ_G in geometria trasversale di studiare l'andamento di $\langle \Delta B^2 \rangle^{\frac{1}{2}} \propto \frac{n}{m^*}$. Lo studio di tale grandezza (σ_G) in composti superconduttori ad alta temperatura critica (T_c) ha evidenziato una stretta correlazione tra T_c e $\frac{n}{m^*}$ (Fig. 24) [20], la cui spiegazione è tuttora un argomento di accesa discussione.

Lo studio della frequenza di precessione del muone al variare della temperatura nella fase superconduttiva consente di risalire all'andamento della demagnetizzazione sotto T_c (Fig. 25) visto che:

$$B_\mu = B_{ext} + 4\pi(1 - N)M \quad (25)$$

sempre che i campi interni siano trascurabili (N è il fattore di demagnetizzazione).

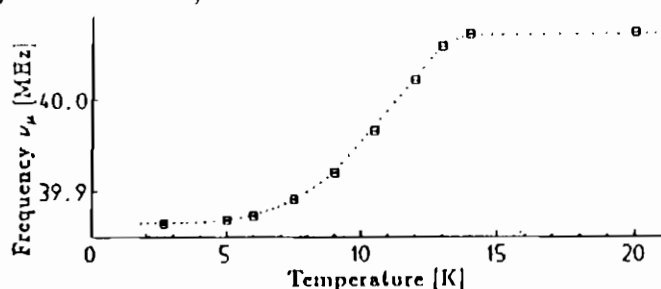


Fig. 25 Diminuzione di ω_μ sotto T_c a causa dell'andamento della demagnetizzazione nella fase superconduttrice

4) Il muonio nella materia

In diversi materiali il muone può presentarsi non sotto forma di semplice particella ma in uno stato legato con un elettrone, formando così un isotopo leggero dell'atomo di idrogeno, il muonio $(\mu^+)e^-$. La presenza di tale isotopo è utile sia per studi applicativi che per la comprensione di certi problemi di fisica di base, come per esempio verificare se l'approssimazione di Born-Oppenheimer che andava bene per calcolare gli orbitali molecolari in sistemi cos-

tituiti da "nuclei pesanti" va ancora bene per descrivere sistemi con "nuclei leggeri" come i muoni.

Il μ^+ e l' e^- interagiscono tra di loro tramite un' accoppiamento iperfine:

$$\mathcal{H} = \mathbf{IAS} \quad (26)$$

i cui autostati sono quelli di tripletto ($|++>$, $|-->$ e $\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> + |-+>)$ con $+$ e $-$ i valori di m_z del μ^+ e dell' e^-) e quello di singoletto ($\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> - |-+>)$); con autovalori $\frac{A}{4}$ per quelli di tripletto e $-\frac{3A}{4}$ per quello di singoletto. L' applicazione di un campo magnetico esterno risolve la degenerazione dei livelli di tripletto e gli autovalori dei quattro autostati di \mathcal{H} presentano un' andamento al variare dell' intensità del campo applicato caratteristica del diagramma di Breit-Rabi [21] (Fig. 26) con autovalori:

$$\begin{aligned} E_{|++>} &= \frac{A}{4} + \frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_\mu) \\ E_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> + |-+>)} &= \frac{-A}{4} + \left[\frac{A^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4}(\omega_e + \omega_\mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ E_{|-->} &= \frac{A}{4} - \frac{\hbar}{2}(\omega_e - \omega_\mu) \\ E_{\frac{1}{\sqrt{2}}(|+-> - |-+>)} &= \frac{-A}{4} - \left[\frac{A^2}{4} + \frac{\hbar^2}{4}(\omega_e + \omega_\mu)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (27)$$

dove $\omega_z = 2\pi\gamma_z B$ e dove si è assunto che A sia scalare o altersi che il campo magnetico sia diretto lungo l' asse principale del tensore iperfine di componente A .

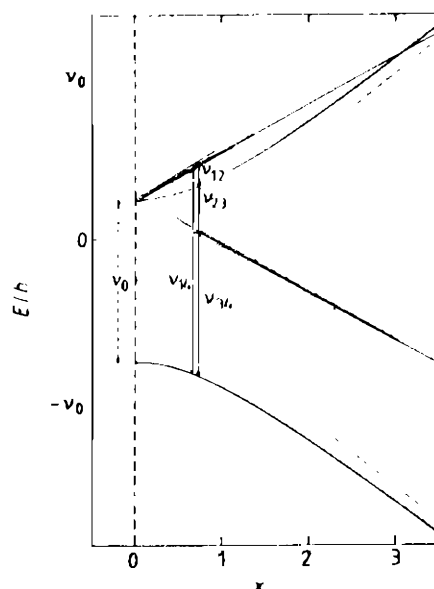


Fig. 26 Diagramma di Breit-Rabi al variare del campo magnetico x , assieme alle transizioni permesse tra gli stati i e j

Il valore di A nel vuoto può essere calcolato a priori essendo l'interazione iperfine esclusivamente di contatto di Fermi; tale valore risulta essere $\frac{A}{h} = 4.46$ GHz. Si capisce che per misurare tale quantità tramite l'osservazione in campo nullo della riga di assorbimento μ^+ SR relativa alla transizione tripletto-singoletto, di frequenza $\frac{A}{h}$, sono necessari spettrometri con un'ottima risoluzione temporale. Attualmente al PSI di Zurigo vi è un tale spettrometro il quale è stato ampiamente impiegato nello studio del muonio nei semiconduttori. È interessante notare che mentre il valore di A misurato nel quarzo è in ottimo accordo con quello ottenuto per il muonio nel vuoto i valori di A ricavati in materiali come il Ge, Si e diamante sono marcatamente più piccoli, mostrando risonanze in campo nullo a frequenze comprese tra i 2 e 3.5 GHz [22]. La ragione di questa discrepanza può essere compresa se si considera che il muonio non si comporta come un atomo libero, ma come un radicale circondato da funzioni d'onda non a simmetria sferica. Di fatti, lo studio del diagramma di Breit-Rabi in monocristalli di questi elementi ha evidenziato la

presenza di un tensore d' accoppiamento iperfine anisotropo [23] con l' asse principale diretto lungo le diagonali della cella cubica a facce centrate (Fig. 27), compatibilmente con la presenza di un contributo iperfine di tipo pseudodipolare che si va a sottrarre a quello di contatto di Fermi.

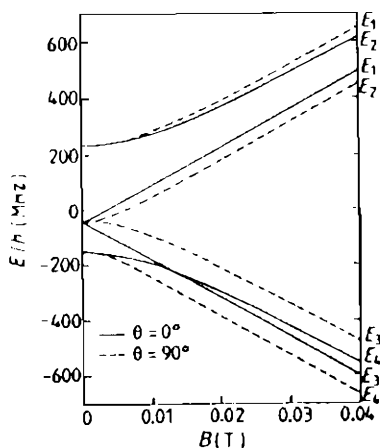


Fig. 27 Diagramma di Breit-Rabi per il muonio nel diamante per campi paralleli ($\theta = 0$) o perpendicolari alla direzione $\langle 111 \rangle$

Conclusioni

In questo lavoro si é cercato di fare assaporare le peculiarità di una tecnica di indagine microscopica quale la μ^+ SR, in particolare evidenziando alcune tra le sue più tipiche applicazioni. Vanno ricordati altri settori della Fisica della materia nei quali questa tecnica viene spesso impiegata quali lo studio degli spin-glass, lo studio dei materiali semiconduttori, dei materiali organici, dei cristalli liquidi e per finire nello studio delle più interessanti fasi aggregate del carbonio, i fullereni [23].

Bibliografia

- [1] A. Schenck, in "Muon Spin Rotation Spectroscopy" (Adam Hilger Ltd., 1985)
- [2] J. Chappert, in "Muons and Pions in Material Research" (Eds. J. Chappert and R. I. Grynszpan, Elsevier 1984), p. 35
- [3] D. C. Walker, in "Muon and Muonium Chemistry" (Cambridge University Press, 1983)
- [4] G. W. Ford and C. J. Mullin, Phys. Rev. 108, 477 (1957)
- [5] L. B. Okun, in "Weak Interactions of Elementary Particles", (Oxford, Pergamon 1965), p. 53
- [6] A. Abragam, in "Principles of Nuclear Magnetism" (Clarendon Press, Oxford 1965)
- [7] R. Kubo and T. Toyabe in "Magnetic Resonance and Relaxation" (Eds. R. Blinc, North Holland, Amsterdam, 1967) pp 810-823
- [8] T. Moriya, Prog. Theor. Phys. 28, 371 (1962)
- [9] G. C. Carter et al., Progress in Material Science Vol. 20 (Eds. B. Chalmers, J. W. Christian and T. B. Massalski, Pergamon Press)
- [10] W. Kohn and L. J. Shan, Phys. Rev. 140A, 1133 (1979)
- [11] H. Schilling et al., Phys. Lett. A 67, 231 (1982)
- [12] K. W. Kehr et al., Z. Phys. B 32, 49 (1978)
- [13] V. G. Grebinnik et al., Sov. Phys.-JETP 41, 777 (1975)
- [14] R. De Renzi et al., Phys. Rev. B 30, 197 (1984)
- [15] K. Rüegg et al., Hyperfine Interactions 6, 99 (1979)
- [16] S. W. Lovesey et al., RAL Bulletin 91-037 (1991)
- [17] P. Dalmas de Reotier, Doctoral thesis, Institut National Polytechnique de Grenoble (1990)
- [18] E. H. Brandt and A. Seeger, Adv. Phys. 35, 189 (1986)
- [19] E. H. Brandt, Phys. Rev. B 37, 2349 (1988)
- [20] Y. J. Uemura et al., Phys. Rev. Lett. 62, 2317 (1989)
- [21] G. Breit and V. W. Hugues, Phys. Rev. 106, 1293 (1957)
- [22] B. D. Patterson et al., Phys. Rev. Lett. 40, 1347 (1978)
- [23] Vedi Hyperfine Interactions 63-65 (1990) per una rassegna su diverse applicazioni della μ^+ SR

Enrico Giulotto

**Università degli Studi di Pavia
Dipartimento di Fisica "A. Volta"**

**EFFETTI FOTORIFRATTIVI
IN CRISTALLI IONICI**

Seminario tenuto il 29 Novembre 1991

1. INTRODUZIONE

Le variazioni di indice di rifrazione indotte dalla luce, o effetti fotorifrattivi, furono scoperti circa 25 anni fa in LiNbO_3 . A questa classe di fenomeni fu dato inizialmente il nome di "optical damage": le variazioni di indice fotoindotte danno luogo infatti a decollimazione e diffusione indesiderate dei fasci luminosi in dispositivi come modulatori ottici e duplicatori di frequenza. Poco più tardi si riconobbe la possibilità di utilizzare questi effetti per realizzare memorie ottiche olografiche ad alta densità di informazione. L'interesse per questo tipo di applicazioni fu di breve durata a causa del deterioramento che l'informazione subisce durante la lettura mediante illuminazione e, più lentamente, anche al buio. Per un certo tempo la ricerca fu indirizzata prevalentemente verso la comprensione dei meccanismi di base degli effetti fotorifrattivi, anche allo scopo di eliminare la distorsione del fronte d'onda nei dispositivi. Più recentemente i materiali fotorifrattivi si sono rivelati assai indicati per applicazioni nell'olografia dinamica, nella coniugazione di fase e nel trattamento dei segnali ottici, grazie alla possibilità di ottenere grandi non-linearità ottiche con basse potenze. In molte di queste applicazioni è richiesta

una memoria che possa essere rinnovata rapidamente: la proprietà che inizialmente aveva fatto cadere l'interesse verso le applicazioni degli effetti fotorifrattivi riveste ora, al contrario, un'importanza fondamentale.

L'effetto fotorifrattivo può essere sommariamente descritto nel modo che segue. Per mezzo di un'illuminazione non uniforme del cristallo con luce di lunghezza d'onda opportuna vengono generati portatori di carica; ciò avviene grazie all'eccitazione di elettroni o buche da centri donori rispettivamente in banda di conduzione o di valenza. I portatori così generati migrano, vengono nuovamente intrappolati da centri accettori, dai quali possono essere nuovamente eccitati e migrare finché escono dalla regione illuminata e rimangono intrappolati. Tra i donori ionizzati e le cariche intrappolate si stabilisce pertanto un campo di carica spaziale, che dà luogo ad una variazione di indice di rifrazione per effetto elettroottico. La modulazione di indice di rifrazione così prodottasi costituirà un reticolo di fase per la propagazione della luce. Al buio la densità di carica spaziale decadrà con la costante di tempo di rilassamento dielettrico e il cristallo tenderà perciò a tornare al suo stato originale. Per accelerare questo processo sarà sufficiente illuminare uniformemente il cristallo. Va sottolineato che, affinché si realizzi l'effetto fotorifrattivo, si devono rendere disponibili donori e trappole opportuni e un efficiente trasporto di carica.

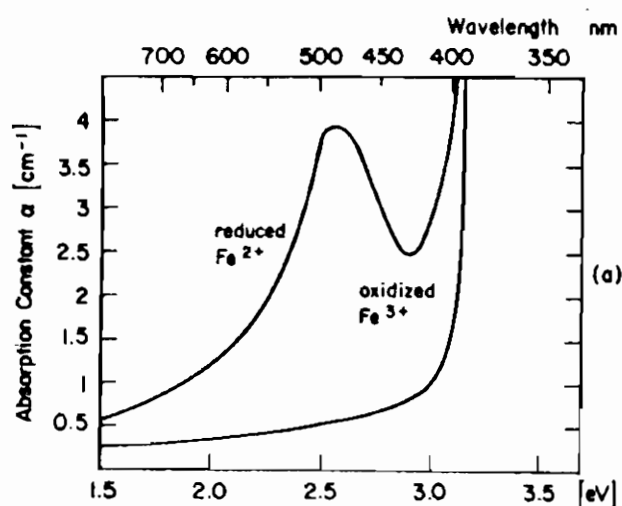


Fig.1 Costante di assorbimento α in KNbO_3 [3]

2. GENERAZIONE E TRASPORTO DEI PORTATORI DI CARICA

Nella maggior parte dei ferroelectrici a ottaedro di ossigeno, a cui ci riferiremo prevalentemente nel seguito, le impurezze di ferro costituiscono i più importanti centri donori e accettori. Queste impurezze risultano solitamente presenti in tracce nei cristalli non drogati e possono venire opportunamente dosate in sede di crescita per produrre cristalli drogati. In Fig.1 è mostrata la costante di assorbimento ottico di KNbO_3 drogato, in seguito a trattamenti di ossidazione e riduzione. La banda a 2.55eV, osservata accanto all'assorbimento intrinseco a 3.2eV nel campione sottoposto a riduzione, è attribuita alla fotoionizzazione dello ione Fe^{2+} , la quale dà luogo ad uno stato finale costituito da uno ione Fe^{3+} e un elettrone in banda di conduzione. La banda a 2.55eV si riduce fino a scomparire quando, in seguito ad ossidazione, tutte le impurezze risultano trivalenti: in questo caso il cristallo è trasparente alla luce visibile. Nel caso di KNbO_3 gli ioni Fe^{2+} agiscono dunque come donori di elettroni. Gli ioni Fe^{3+} sono pure assai importanti per l'effetto fotorifrattivo in quanto accettori di elettroni.

I meccanismi grazie ai quali può avvenire il trasporto dei portatori fotoeccitati sono tre: diffusione, deriva in un campo elettrico applicato ed effetto fotovoltaico. Sebbene nel caso più generale la descrizione del moto delle cariche dovrà tener conto di tutti questi effetti, in molte situazioni uno solo di essi risulta dominante. Analizziamo separatamente i tre casi.

2.1 Diffusione

In Fig.2a è illustrato schematicamente come un campo di carica spaziale si instaura a seguito di trasporto di carica per diffusione. La luce di intensità $I(z)$ modulata sinusoidalmente con passo Λ ionizza i centri donori e genera i portatori di carica (elettroni). Gli elettroni diffondono, cosicché l'ampiezza della modulazione di carica elettronica si riduce rispetto alla modulazione di carica dei centri ionizzati. Ne risulta una

distribuzione di carica spaziale di densità $\rho_{sc}(z)$ modulata in fase con l'intensità luminosa, che genera una distribuzione di campo $E_{sc}(z)$ sfasata di $\lambda/4$. E' chiaro che il campo $E_{sc}(z)$ tenderà ad opporsi allo smorzamento completo della modulazione di carica elettronica.

2.2 Deriva

Nel caso in cui un campo applicato dia luogo a trasporto di carica per deriva, se la distribuzione di carica dei centri ionizzati è proporzionale a $\cos(2\pi\lambda^{-1}z)$, si ha una modulazione di carica elettronica proporzionale a $\cos(2\pi\lambda^{-1}z + \Phi)$, come è mostrato in Fig.2b. Se lo sfasamento Φ è abbastanza piccolo, la

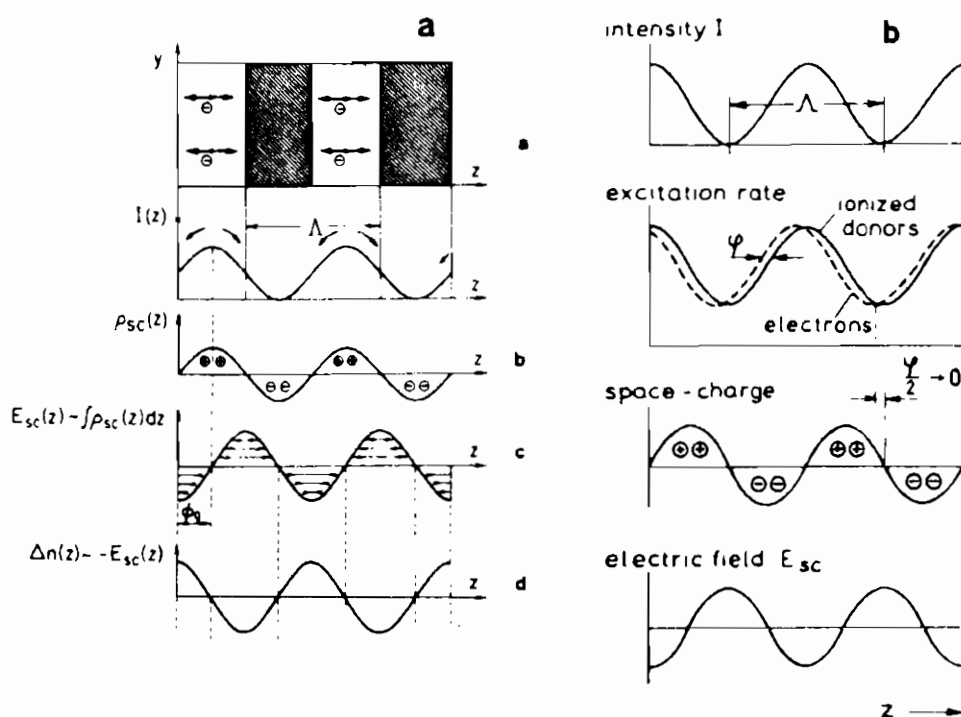


Fig.2 Insorgenza di un campo di carica spaziale E_{sc} per diffusione (a) e per deriva in campo esterno o per effetto fotovoltaico (b)

differenza tra queste quantità, cioè la densità di carica spaziale, sarà proporzionale a $\sin(2\pi\Lambda^{-1}z)$, mentre il campo che ne viene generato sarà proporzionale a $-\cos(2\pi\Lambda^{-1}z)$, che corrisponde, a parte il segno, alla modulazione di intensità luminosa. Diffusione e deriva sono sufficienti a spiegare l'effetto fotorifrattivo nei cristalli paraelettrici, come KTaNbO_3 , BSO, BGO, GaAs, e nei ferroelettrici ad alta fotoconducibilità come KNbO_3 , in cui l'effetto fotovoltaico di volume, discusso nel seguito, risulta trascurabile.

2.3 Effetto fotovoltaico

Nei cristalli privi di centro di inversione è possibile generare una fotocorrente anche in assenza di campo esterno applicato. La densità di corrente fotovoltaica è data da:

$$j^{ph} = \beta_{ijk} E_j E_k^* \quad (1)$$

dove β_{ijk} sono le componenti del tensore fotovoltaico del terzo ordine e E_j, E_k sono componenti complesse dell'ampiezza del campo elettrico dell'onda luminosa. Nella configurazione normalmente adottata per la realizzazione di reticoli di fase

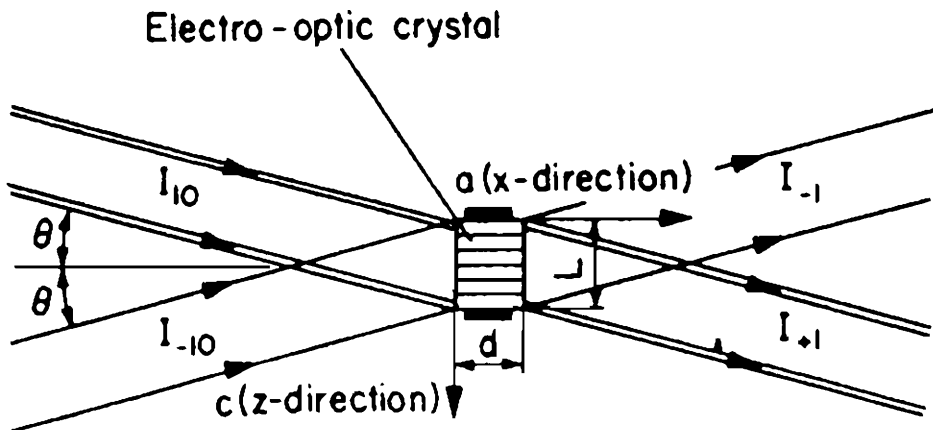


Fig.3 Registrazione di un reticolo di fase per mezzo di "Two-Wave Mixing"

(vedi Fig.3) si ha:

$$j^{\text{ph}} = \beta_{333} E_3 E_3^* = \kappa \alpha I \quad (2)$$

La seconda uguaglianza, in cui α è la costante di assorbimento ottico e κ una costante che dipende dal materiale, vale solo nel caso [4] di piccola lunghezza di trasporto degli elettroni (definita come la distanza media percorsa dagli elettroni prima che la velocità diventi aleatoria). L'effetto fotovoltaico di volume è stato spiegato in termini microscopici con modelli teorici [5] che considerano trasferimenti direzionali di carica elettronica e rilassamenti di Franck-Condon degli ioni in cristalli piroelettrici.

2.4 Equazione di trasporto

L'equazione di trasporto di carica per eccitazione monocromatica lungo l'asse polare z della configurazione di Fig.3 risulta dunque:

$$j(z,t) = [\sigma_0 + \mu b I(z,t)] \left[E_{\text{ac}}(z,t) - \frac{V}{L} \right] - D b \frac{dI(z,t)}{dz} + \kappa \alpha I(z,t) \quad (3)$$

dove V è la tensione tra gli elettrodi posti sulle facce c del cristallo, L la distanza tra di essi, μ la mobilità dei portatori, D la costante di diffusione; σ_0 rappresenta la conducibilità di buio, $\mu b I(z,t)$ la fotoconducibilità, con $b = e \eta \alpha / h \nu$. In quest'ultima espressione η è l'efficienza quantica per l'eccitazione di un portatore e $h \nu$ l'energia del fotone.

Si riconosce come i tre contributi presenti nella (3) siano dovuti rispettivamente a deriva, diffusione ed effetto fotovoltaico.

3. VARIAZIONE DI INDICE DI RIFRAZIONE

I campi di carica spaziale danno origine ad una variazione dell'indice di rifrazione del cristallo. La relazione

$$\Delta \left(\frac{1}{n^2} \right)_i = r_{ijk} E_k + R_{ijkl} E_k E_l \quad (4)$$

descrive il fenomeno, detto effetto elettroottico; r_{ijk} , identicamente nullo in un cristallo centrosimmetrico, è il tensore elettroottico lineare, responsabile dell'effetto elettroottico di Pockels (in breve, effetto Pockels), mentre il tensore elettroottico quadratico R_{ijkl} produce l'effetto Kerr. E' chiaro che la persistenza dei reticoli di fase è direttamente legata al tempo di decadimento del profilo del campo di carica spaziale E_{sc} . Esso è dato da $\tau = \epsilon/4\pi\sigma$, in cui ϵ è la costante dielettrica e σ la conducibilità. Questa quantità, detta tempo di rilassamento dielettrico, può raggiungere valori molto alti, fino ad alcuni anni in LiTaO_3 al riparo dalla luce. Grazie ad alcune tecniche, che qui non descriviamo, è possibile tuttavia fissare in modo permanente i reticoli di fase.

4. MATERIALI E PROPRIETÀ

Attualmente si conosce una grande varietà di materiali nei quali l'effetto fotorifrattivo è stato osservato, tanto che esso può essere considerato una caratteristica generale dei cristalli elettroottici. La Scienza dei Materiali può inoltre avvalersi della buona comprensione dei meccanismi di base del fenomeno nell'individuazione e nella preparazione di materiali con caratteristiche ottimali per le applicazioni. Alcune delle qualità principali che devono essere considerate nella scelta dei materiali elettroottici sono:

- Sensibilità fotorifrattiva
- Gamma dinamica (massima variazione di indice di rifrazione)

- Sfasamento tra modulazione di indice di rifrazione e distribuzione di intensità luminosa
- Tempo di registrazione e di cancellazione
- Lunghezza d'onda luminosa per indurre l'effetto fotorifrattivo.

Tra i materiali di maggiore interesse ricordiamo:

- I ferroelettrici ad ottaedro di ossigeno, in particolare KNbO_3 , LiNbO_3 , LiTaO_3 , K(NbTa)O_3 , BaTiO_3 .
- Le silleniti $\text{Bi}_{12}\text{SiO}_{20}$ (BSO), $\text{Bi}_{12}\text{GeO}_{20}$ (BGO), $\text{Bi}_{12}\text{TiO}_{20}$ (BTO).
- I semiconduttori III-V, come GaAs, InP, CdTe.
- Alcune ceramiche ferroelettriche della famiglia di $(\text{Pb}_{1-x}\text{La}_x)(\text{Zr}_y\text{Ti}_{1-y})\text{O}_3$, in breve PLZT.

5. DIFFRAZIONE DA RETICOLI FOTOINDOTTI

In questo capitolo discuteremo alcuni dei principali fenomeni che traggono origine dalla presenza di reticoli di fase fotoindotti nei cristalli fotorifrattivi.

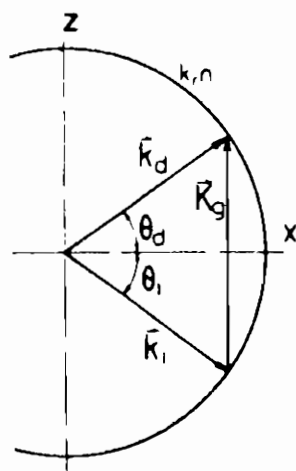
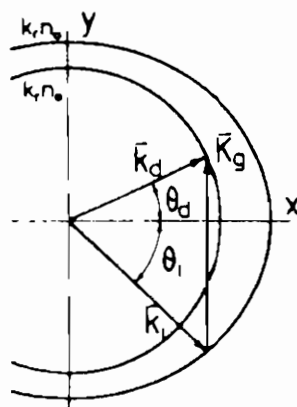


Fig.5 diagramma dei vettori d'onda per la diffrazione di Bragg anisotropa

Fig.4 Diagramma dei vettori d'onda per la diffrazione di Bragg isotropa



5.1 Diffrazione di Bragg

Affinché abbia luogo la diffrazione della luce da un reticolo di fase sufficientemente spesso, deve essere soddisfatta la condizione di Bragg [2: Cap.4]

$$\mathbf{k}_d = \mathbf{k}_i \pm \mathbf{K}_g \quad (5)$$

tra i vettori delle onde incidente e diffratta e il vettore d'onda del reticolo, rispettivamente \mathbf{k}_i , \mathbf{k}_d e \mathbf{K}_g .

Consideriamo dapprima un cristallo isotropo (Fig.4). Dalla condizione di Bragg e dalla conservazione dell'energia

$$\omega_d = \omega_i \quad (6)$$

si ricava:

$$\sin\theta_i = \sin\theta_d = \frac{\lambda_r K_g}{4\pi n} \quad (7)$$

dove λ_r è la lunghezza d'onda della luce nel vuoto; θ_i e θ_d sono misurati all'interno del cristallo.

Nel caso di un mezzo anisotropo, la condizione di Bragg (5) si riscrive:

$$k_r n_d \mathbf{d} = k_r n_i \mathbf{i} \pm \mathbf{K}_g \quad (8)$$

in cui $k_r = 2\pi/\lambda_r$, \mathbf{i} e \mathbf{d} sono i versori nelle direzioni dell'onda incidente e diffratta rispettivamente, mentre gli indici di rifrazione n_i e n_d possono assumere, per ogni direzione di propagazione, due valori corrispondenti alle onde ordinaria (n_o) e straordinaria (n_e). Nel caso in cui l'onda incidente sia straordinaria e l'onda diffratta ordinaria (o viceversa), si parla di diffrazione di Bragg anisotropa. La Fig.5 illustra il diagramma dei vettori d'onda nel piano ortogonale all'asse ottico (asse c) per la diffrazione di Bragg anisotropa in un cristallo uniassico, come ad es. LiNbO_3 o BaTiO_3 a temperatura ambiente. In questi cristalli la diffrazione anisotropa può avere luogo nella configurazione indicata grazie alle componenti non nulle del tensore elettroottico del tipo r_{232} , ovvero r_{42} nella

notazione con indici contratti [6]. Si osservi come, a differenza della diffrazione di Bragg isotropa, esiste un valore del modulo del vettore d'onda del reticolo K_g^{min} al di sotto del quale la diffrazione anisotropa non è possibile. Quando $K_g = K_g^{min}$, \mathbf{k}_i e \mathbf{k}_d sono paralleli e \mathbf{K}_g è antiparallelo (o parallelo) ad essi: le onde incidente e diffratta viaggiano nella stessa direzione ma hanno differenti polarizzazioni.

5.2 Autodiffrazione

Si riconosce facilmente che i due fasci che generano il reticolo di fase (Fig.3) soddisfano automaticamente la condizione per la diffrazione di Bragg isotropa. Ciascuno dei due fasci viene perciò parzialmente diffratto nella direzione dell'altro, dando origine all'effetto di accoppiamento dei fasci che verrà discusso nei Capp.6 e 7. L'autodiffrazione anisotropa richiede invece un ben definito valore di θ e una specifica polarizzazione dei fasci incidenti. La Fig.6 mostra il diagramma dei vettori d'onda per l'autodiffrazione anisotropa in un cristallo uniassico negativo (ad es. LiNbO_3 o BaTiO_3). Due fasci di polarizzazione straordinaria di vettori d'onda \mathbf{k}_1 e \mathbf{k}_{-1} creano un reticolo di fase di vettore d'onda \mathbf{K} . Se gli angoli d'incidenza $\pm\theta$ soddisfano la condizione

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{4n_e} \sqrt{(n_o - n_e)(n_o + n_e)} \quad (9)$$

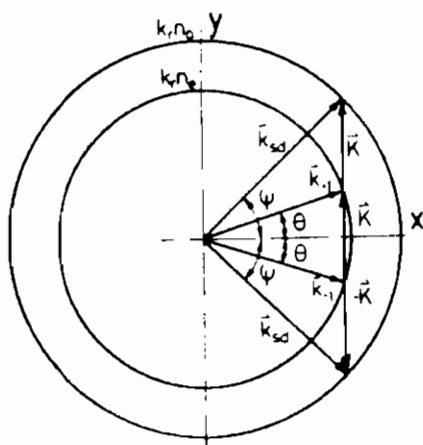


Fig.6 Autodiffrazione di Bragg anisotropa (\mathbf{k}_{sd} : vettori d'onda dei fasci autodiffratti)

Fig. 7 Diffusione anisotropa di luce laser polarizzata lungo l'asse c di un cristallo uniassico negativo

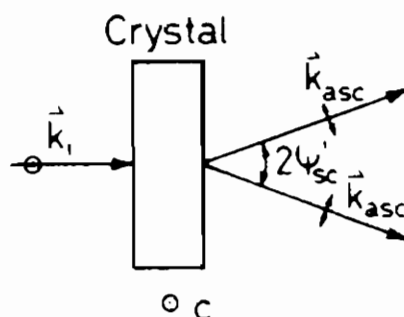
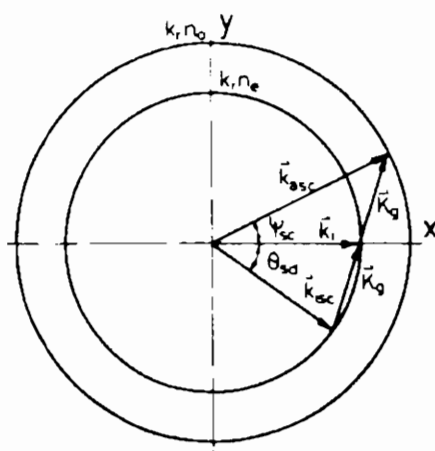


Fig.8 condizione di "phase-matching" per la diffusione anisotropa di luce da parte di un cristallo uniassico negativo

detta di sincronismo di fase ("phase-matching"), i vettori $\vec{k}_{+1} + \vec{K}$ e $\vec{k}_{-1} - \vec{K}$ terminano sulla superficie esterna dei vettori d'onda permessi, e l'autodiffrazione anisotropa può avere luogo. Le onde verranno diffratte ad angoli $\pm\psi$ dati da $\sin\psi = 3\sin\theta$.

5.3 Diffusione anisotropa di luce

Un fascio laser che attraversi un cristallo qualsiasi viene sempre in parte diffuso da disomogeneità e difetti di varia natura; la luce diffusa conserva per lo più la stessa polarizzazione del fascio laser. In un cristallo fotorifrattivo le onde luminose diffuse, interferendo col fascio principale, danno origine a reticoli di fase di piccola ampiezza, responsabili della decollimazione del fascio stesso per diffrazione isotropa. Alcune componenti \vec{K}_g di questi reticoli potranno inoltre produrre diffrazione anisotropa. Il fenomeno, detto diffusione anisotropa di luce, è illustrato schematicamente in Fig.7. La Fig.8 mostra il diagramma dei vettori d'onda nel piano ortogonale all'asse c di un cristallo uniassico negativo. Il fascio incidente di vettore

d'onda \mathbf{k}_i viene diffuso in tutte le direzioni, ma solo due dei fasci diffusi di vettori d'onda \mathbf{k}_{isc} sono in grado di produrre un reticolo \mathbf{K}_g che consente la diffrazione anisotropa del fascio principale. L'angolo di diffusione ψ_{sc} è dato da:

$$\sin \psi_{sc} = \left[1 - \frac{n_o^4 + 3n_e^4}{(4n_e n_o)^2} \right]^{1/2} \quad (10)$$

Nelle realizzazioni dell'esperimento di Fig.7 si osserva [7-9] un anello di luce diffusa di polarizzazione ortogonale a quella del fascio incidente, la cui intensità è massima in direzione ortogonale all'asse c , e nulla lungo c . L'assenza di luce diffusa lungo c trova spiegazione nel fatto che tutte le componenti di tipo r_{ij3} ($i \neq j$) sono nulle per ragioni di simmetria nei cristalli qui considerati. La diffusione di luce anisotropa è stata osservata anche in cristalli biassici, come KNbO_3 [10]; in questo caso la geometria di diffusione risulta più complicata.

6. CALCOLO DEL CAMPO DI CARICA SPAZIALE E SOLUZIONI DELLE EQUAZIONI D'ONDA ACCOPPIATE

Consideriamo un cristallo fotorifrattivo uniassico nel quale la diffusione agisca come unico meccanismo di trasporto di carica. L'asse c del cristallo sia parallelo a z e assumiamo che l'intensità luminosa all'interno del cristallo sia modulata secondo

$$I(z) = I_0 (1 + \text{Re}[m \exp(iK_g z)]) \quad (11)$$

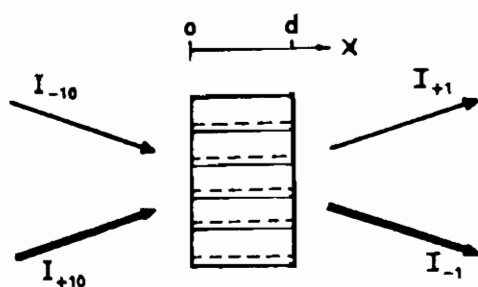


Fig.9 Accoppiamento di due fasci in un mezzo fotorifrattivo. Linee continue: massimi della variazione di indice; linee tratteggiate: massimi dell'intensità luminosa

grazie all'interferenza di due onde piane (Fig.9). Nella (11), $I_0 = I_{-1} + I_1$, $K_g = \mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_{-1}$, mentre $m = 2\mathbf{E}_{-1} \cdot \mathbf{E}_1^*$ rappresenta il rapporto di modulazione. All'equilibrio la densità di carica spaziale e il campo da essa generato dovranno soddisfare l'equazione di Poisson:

$$\rho_{sc}(z) = \frac{\epsilon}{4\pi} \frac{dE_{sc}(z)}{dz} \quad (12)$$

Combinando la (12) con l'equazione di trasporto (3) è possibile ricavare l'espressione per $E_{sc}(z)$. Nell'ipotesi in cui la lunghezza di trasporto sia piccola rispetto a $2\pi/K_g$ si ottiene:

$$E_{sc}(z) = \text{Re} \left[i m \Theta \exp(i K_g z) \right] \quad (13)$$

Per la definizione della costante Θ , assai complicata, si rimanda a [11, 2: Cap.5]. Ci limitiamo qui ad osservare come $E_{sc}(z)$ risulti sfasato di $\pi/2$ rispetto a $I(z)$. Ciò ha importanti conseguenze per l'amplificazione di luce coerente, come verrà chiarito nel seguito.

Il campo $E_{sc}(z)$ produce una variazione di indice di rifrazione $\Delta n(z) \sim E_{sc}(z)$, che può essere calcolata a partire dalla formula (4); tale variazione di indice produce effetti non lineari sulla propagazione stessa della luce che l'ha creata. Essi possono essere descritti introducendo opportune suscettività non lineari, in modo formalmente analogo all'ottica non lineare "classica". Tuttavia, mentre nell'ottica non lineare ordinaria la risposta è istantanea, la risposta del materiale fotorifrattivo mostra un'inerzia che dipende dal tempo necessario all'instaurarsi del campo di carica spaziale. Inoltre la non-linearità fotorifrattiva è non-locale, come risulta evidente dallo sfasamento presente, in generale, tra la modulazione di indice di rifrazione e la distribuzione di intensità luminosa.

Le equazioni d'onda accoppiate per le onde luminose che si propagano in un mezzo fotorifrattivo possono essere ottenute dall'equazione di Maxwell per il campo elettrico luminoso totale $E \exp(-i\omega t)$:

$$\nabla^2 \mathbf{E} + (n\omega/c)^2 \mathbf{E} = \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \chi' \cdot \mathbf{E} \quad (14)$$

dove χ' è il tensore di suscettività non lineare, dato da

$$\chi' = \varepsilon \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}_\kappa) \cdot \varepsilon \quad (15)$$

Esso dipende dal campo di carica spaziale, il quale a sua volta dipende dalle ampiezze dei campi ottici. Da ciò risulta un accoppiamento non lineare tra i campi ottici stessi. Poiché le equazioni accoppiate non sono lineari, è possibile ricavarne le soluzioni analitiche solo in alcuni casi. Consideriamo la configurazione di "Two-Wave Mixing" (TWM) illustrata in Fig.9. Sia dunque $\mathbf{E}(\mathbf{x}) = \mathbf{E}'_{-1}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}'_1(\mathbf{x})$ e scriviamo i campi ottici individuali in forma di prodotto di un'onda piana di vettore d'onda \mathbf{k}_i e un'ampiezza lentamente variabile $\mathbf{E}_i(\mathbf{x})$:

$$\mathbf{E}'_i(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_i(\mathbf{x}) \exp(i\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{x}) \quad (16)$$

Le equazioni d'onda accoppiate possono essere ricavate sostituendo la (16) nella (14), uguagliando i termini recanti lo stesso vettore d'onda e trascurando le derivate spaziali seconde delle ampiezze $\mathbf{E}_i(\mathbf{x})$. Quest'ultima è detta "approssimazione di involuppo lentamente variabile" (SVEA). Se inoltre ci restringiamo a considerare onde che si propaghino quasi parallelamente lungo x , possiamo scrivere $\mathbf{E}_i(\mathbf{x}) = \mathbf{E}_i(x)$ e risolvere esattamente le equazioni accoppiate per le ampiezze e per le fasi. In definitiva si ricavano le intensità $I_i(z)$:

$$I_{-1}(z) = I_{-10} e^{-\alpha z} \frac{I_0}{I_{-10} + I_{10} \exp[-2\text{Re}(\gamma)z]} \quad (17)$$

$$I_1(z) = I_{10} e^{-\alpha z} \frac{I_0}{I_{10} + I_{-10} \exp[2\text{Re}(\gamma)z]} \quad (18)$$

dove I_{-10} e I_{10} sono le intensità incidenti, $I_0 = I_{-10} + I_{10}$, α è la costante d'assorbimento ottico, γ è una costante di accoppiamento. Se $\text{Re}(\gamma) > 0$, il fascio -1 è amplificato a spese del fascio 1.

7. AMPLIFICAZIONE DI LUCE COERENTE E OSCILLATORI OTTICI

Il trasferimento di energia tra due fasci interagenti in un reticolo di fase è possibile se il profilo di interferenza dei fasci è sfasato rispetto al reticolo di una quantità $\Phi \neq n\pi$ ed è massimo per $\Phi = \pi/2$, come nel caso appena considerato. Ciò si spiega qualitativamente con lo sfasamento di $\pi/2$ presente tra le onde diffratte da un reticolo di fase, di ordine zero e del primo ordine. Poiché va considerato anche uno sfasamento addizionale di $\pm\pi/2$, il cui segno dipende da quello dello sfasamento spaziale del reticolo di fase, risulta che nella direzione di uno dei fasci

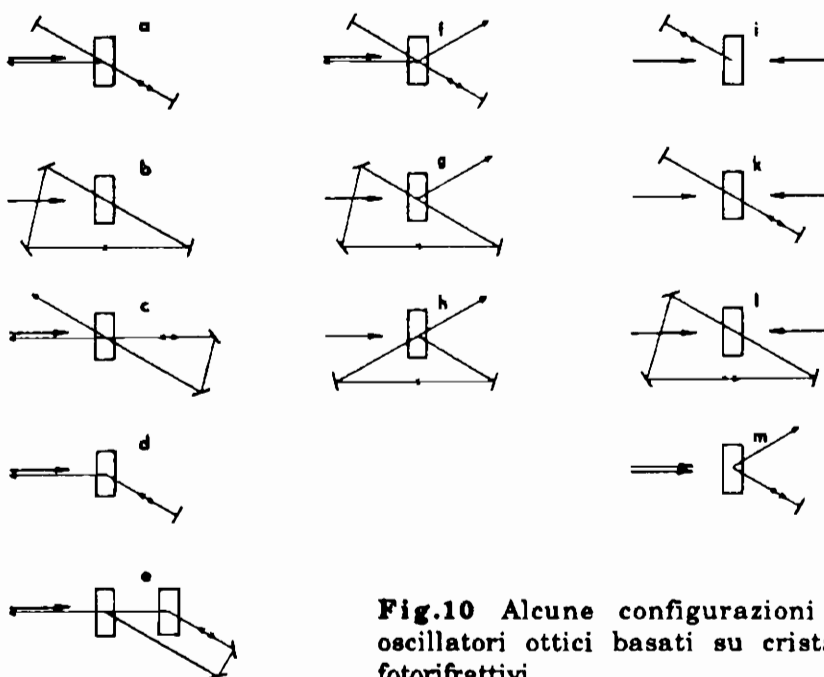


Fig.10 Alcune configurazioni di oscillatori ottici basati su cristalli fotorifrattivi

trasmessi entrambe le componenti, cioè il fascio trasmesso di ordine zero e il fascio diffratto del primo ordine, sono in fase, mentre nell'altra direzione sono sfasate di π . Si ha dunque interferenza costruttiva nel primo caso, interferenza distruttiva nel secondo caso.

Se si introduce un "feedback" positivo in un sistema in cui l'amplificazione supera le perdite, si ottiene autoeccitazione e oscillazione: pertanto si possono realizzare "laser" basati sull'amplificazione ottica per "mixing" di onde in cristalli fotorifrattivi. Mentre negli ordinari sistemi laser la sorgente della radiazione che dà inizio al processo è costituita dalla luminescenza, negli oscillatori ottici basati sui cristalli fotorifrattivi essa è fornita dalla diffusione del fascio (o dei fasci) di pompa da parte delle disomogeneità del mezzo. In condizioni stazionarie questi fasci luminosi di rumore acquisteranno un incremento di intensità proporzionale all'intensità iniziale [2: Cap.2]:

$$I_1 - I_{10} = (\Gamma d) \quad (19)$$

nel caso di TWM. Se il cristallo viene posto opportunamente in una cavità ottica risonante, analogamente al mezzo attivo di un laser, parte della radiazione di rumore rientrerà tra i modi ad alto Q della cavità. A causa della non-linearità del processo, i reticoli corrispondenti ai modi ad alto Q della cavità si svilupperanno più rapidamente degli altri e nello spettro angolare della radiazione apparirà un picco in corrispondenza dell'asse della cavità. Questo stadio avrà termine quando la radiazione nei modi ad alto Q avrà raggiunto un'intensità confrontabile a quella della pompa, tale da far perdere validità all'approssimazione di "pompa non svuotata" in cui vale la (19). Nello stesso tempo la radiazione di rumore verrà soppressa a causa della cancellazione dei corrispondenti reticoli da parte dell'intenso fascio di radiazione oscillante. La Fig.10 mostra alcune configurazioni nelle quali si possono realizzare oscillatori ottici basati su cristalli fotorifrattivi.

8. CONIUGAZIONE DI FASE

Nell'olografia tradizionale, dimostrata per la prima volta da Gabor nel 1949 [12, 13], il disegno di interferenza prodotto

dall'onda piana di riferimento e dall'onda luminosa diffusa dall'oggetto (onda oggetto) viene registrato su lastra fotografica. In seguito essa deve essere sviluppata, fissata e asciugata. Ne risulta un ologramma che, illuminato da un'onda piana viaggiante antiparallelamente all'onda di riferimento, permette di ricostruire un'immagine reale dell'oggetto (vedi Fig.11). L'onda così ricostruita è una replica viaggiante a ritroso o, come si usa dire, coniugata in fase dell'onda originale.

La registrazione su lastra o pellicola fotografica si rivela tuttavia inadatta per la maggior parte delle applicazioni della coniugazione di fase. Infatti sulla pellicola può essere registrato un solo ologramma e inoltre deve trascorrere molto tempo tra l'esposizione e la lettura. L'olografia in tempo reale, proposta per la prima volta nel 1976 [14, 15], è stata resa possibile solo dallo sviluppo dei materiali ottici non lineari, che possono rispondere istantaneamente e ripetutamente alle onde luminose che li attraversano. La Fig.12 illustra lo schema di "Four-Wave Mixing" (FWM) per l'olografia in tempo reale in un mezzo non lineare. Le prime realizzazioni richiedevano l'impiego di fasci laser impulsati di alta potenza. Nel 1980 [16] fu realizzato il primo coniugatore di fase basato sull'effetto fotorifrattivo. Questo "specchio a coniugazione di fase", che realizza uno schema di FWM avvalendosi del grande coefficiente di Pockels r_{42} di BaTiO_3 , offre una riflettività maggiore dell'unità. Se si pone uno specchio vicino al coniugatore di fase si ottiene un oscillatore ottico corrispondente allo schema *i* di Fig.10: la cavità è formata dallo specchio ordinario e dallo specchio a coniugazione di fase.

WRITING THE HOLOGRAM : READING THE HOLOGRAM :

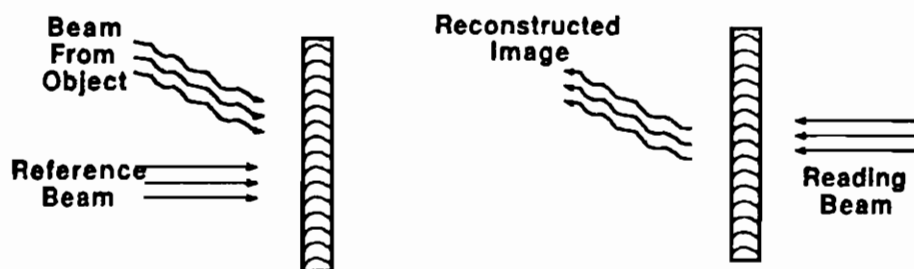


Fig.11 Olografia. La diffrazione del fascio di lettura, propagantesi in direzione opposta all'onda di riferimento, forma un'immagine reale dell'oggetto

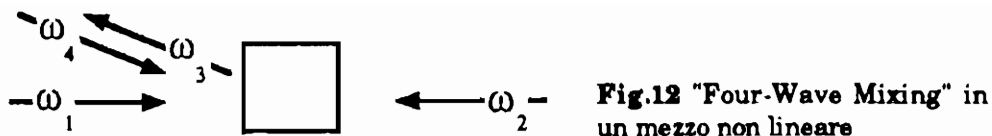


Fig.12 "Four-Wave Mixing" in un mezzo non lineare

Essendo quest'ultimo in grado, per sua natura, di correggere le eventuali aberrazioni del fronte d'onda, il dispositivo può impiegare anche uno specchio di qualità scadente, o addirittura una spatola da cucina. Poiché la non-linearità fotorifrattiva in BaTiO_3 satura a fluenze dell'ordine di 100mW/cm^2 , gli esperimenti possono essere eseguiti con laser di bassa potenza.

8.1 Autoconiugazione di fase

Nel 1982 venne realizzato [17] il primo coniugatore di fase passivo o "autopompato". Lo schema del dispositivo è rappresentato in Fig.10a: esso costituisce infatti anche un oscillatore ottico. Nella descrizione del suo funzionamento come specchio ad auto-coniugazione di fase, l'onda in ingresso svolge il ruolo di onda oggetto, mentre i fasci luminosi autogenerati all'interno della cavità servono come onde di pompa per generare la replica coniugata in fase dell'onda oggetto tramite FWM. Per avviare il dispositivo può rendersi necessaria la presenza di entrambi gli specchi [18, 19], ma in seguito uno di essi può essere rimosso senza che il funzionamento cessi (Fig.10d). Nello stesso anno venne anche realizzato [20] uno specchio ad autoconiugazione di fase costituito solamente da un cristallo di BaTiO_3 . Anche in questo dispositivo i fasci di pompa di FWM vengono generati automaticamente, ma essi sono contenuti completamente all'interno del cristallo fotorifrattivo per riflessione totale interna da parte delle facce del cristallo stesso. In seguito è stato dimostrato il funzionamento di altri coniugatori di fase passivi basati sull'effetto fotorifrattivo; alcuni prevedono l'utilizzo di specchi [21], in altri le onde interagenti sono tutte contenute all'interno del cristallo [22]. Caratteristica comune a quasi tutti questi dispositivi è di produrre un'onda coniugata in fase di frequenza leggermente diversa ($\sim 1\text{Hz}$) rispetto all'onda in ingresso: è tuttora aperto il dibattito

sull'origine fisica di questo comportamento, che può presentare alcune complessità relativamente al segno e alla dipendenza dal tempo della differenza in frequenza.

La maggior parte degli specchi ad autoconiugazione di fase è relativamente insensibile alle vibrazioni. Inoltre la lunghezza di coerenza della luce può essere abbastanza corta, cosicché è possibile impiegare laser di banda spettrale non molto stretta. Queste caratteristiche rendono gli specchi ad autoconiugazione di fase particolarmente indicati per molte applicazioni.

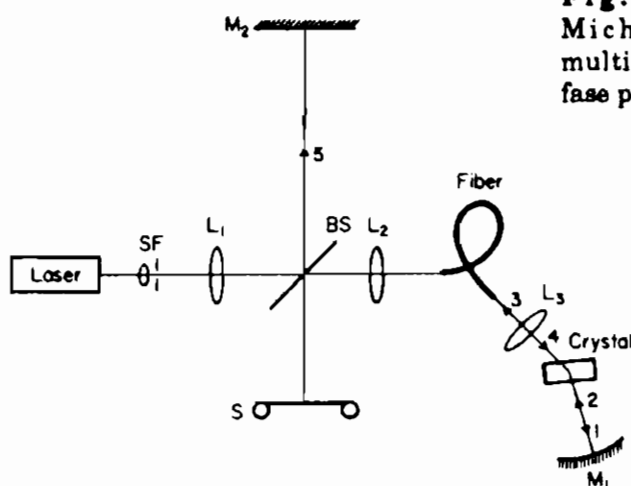
9. APPLICAZIONI DELLA CONIUGAZIONE DI FASE

Numerose applicazioni della auto-coniugazione di fase sono state proposte e realizzate [2: Capp.5 e 6]. Qui ne verranno presentate con qualche dettaglio solo due: l'interferometria con auto-coniugazione di fase e la memoria associativa.

9.1 Interferometria

L'interferometria con luce visibile consente la misura di variazioni di distanze sub-micrometriche. Per questi scopi risulta indicato il ben noto schema di interferometro di Michelson. Grazie ad esso possono essere misurate le variazioni di posizione dello specchio mobile posto all'estremità di uno dei due bracci, mentre lo specchio fisso all'estremità dell'altro braccio serve come riferimento. Tuttavia possono nascere serie difficoltà qualora tra specchio mobile e schermo sia interposto un mezzo che distorce il fronte d'onda come, ad esempio, un'atmosfera turbolenta o una fibra ottica multimodale. Il problema può essere eliminato sostituendo lo specchio mobile con un coniugatore di fase passivo: l'onda coniugata in fase, ripercorrendo a ritroso il mezzo distorcente, giungerà indistorta allo schermo. Poiché il coniugatore di fase passivo non compensa cambiamenti di fase uniformi del fronte d'onda, l'informazione sulla distanza risulterà conservata. Sono stati realizzati con successo interferometri con coniugatore di fase passivo per la correzione delle distorsioni nella propagazione nello spazio libero [23] e in fibra ottica [19]. La Fig.13 mostra lo schema di quest'ultimo esperimento.

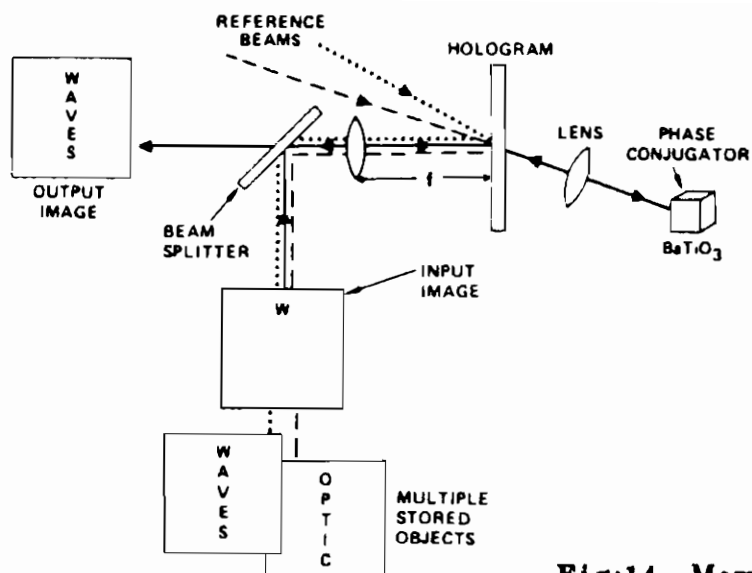
Fig.13 Interferometro di Michelson con fibra multimodale e coniugatore di fase passivo [19]



A causa della piccola variazione di frequenza introdotta dai coniugatori di fase passivi, in questi dispositivi la differenza di fase tra l'onda riflessa dallo specchio di riferimento e quella proveniente dal coniugatore di fase varia nel tempo, cosicché le onde stesse, ricombinandosi sullo schermo, interferiscono alternativamente in modo costruttivo e distruttivo. Questo può essere un inconveniente in vista di un utilizzo pratico di questi interferometri.

9.2 Memoria associativa

L'idea di utilizzare tecniche ottiche parallele, in particolare quelle basate sui principi dell'olografia, per ricostruire in modo associativo un'informazione complessa con un "input" parziale, risale agli anni '60 [24, 25]. I primi tentativi ebbero scarso successo a causa essenzialmente del "cross-talk" esistente quando diverse immagini venivano registrate sullo stesso ologramma, che impediva una ricostruzione fedele dell'informazione. Una rinascita delle ricerche sulle memorie associative olografiche si è avuta con l'introduzione degli specchi a coniugazione di fase. Grazie alla non-linearità fotorifrattiva, essi forniscono infatti il "feedback" e il guadagno necessari al miglioramento della selettività e della stabilità della memoria.



Fig;14 Memoria associativa olografica [26]

Tra i vari sistemi proposti, illustriamo quello [26] sperimentato da Owechko e altri (Fig.14). Dapprima un insieme di immagini viene registrato su ologramma di Fourier [13], ciascuna con la propria onda piana di riferimento distinta angularmente dalle altre. Quando un'immagine parziale viene inviata all'ologramma, il fascio di riferimento viene ricostruito. Quest'ultimo raggiunge un coniugatore di fase, posto nel dominio di correlazione della memoria, che rimanda nuovamente l'onda di riferimento all'ologramma, ricostruendo così l'immagine originale. Le non-linearità del coniugatore di fase riducono il "cross-talk" e il rumore di correlazione, enfatizzando l'onda di riferimento corretta rispetto alle altre, inevitabilmente presenti ma di ampiezza inferiore. Lo specchio a coniugazione di fase utilizza uno schema di FWM; il cristallo è pompato dall'esterno con due fasci contropropaganti e può pertanto fornire una riflettività di coniugazione di fase maggiore dell'unità, da cui il guadagno. In definitiva avremo in uscita l'immagine registrata che presenta il più alto grado di correlazione con l'immagine in ingresso. Grazie all'utilizzo di ologrammi di Fourier, il sistema è parzialmente "shift-invariante", cioè l'oggetto può essere traslato ortogonalmente all'asse ottico della lente permettendo ancora la ricostruzione dell'immagine completa. Il funzionamento del sistema come

oscillatore chiuso con l'aggiunta di un secondo coniugatore di fase introdurrebbe un'ulteriore non-linearità sotto forma di soglia per la risonanza. Non ci risulta che quest'ultima versione dell'esperimento sia stata, a tutt'oggi, ancora realizzata.

BIBLIOGRAFIA

- 1 "Photorefractive Materials and Their Applications I", ed. P.Günter, J.P.Huignard, Topics in Applied Physics, Vol.61, (Springer 1988). In particolare si veda il Cap.2 di P.Günter, J.P.Huignard.
- 2 "Photorefractive Materials and Their Applications II", ed. P.Günter, J.P.Huignard, Topics in Applied Physics, Vol.62, (Springer 1989). In particolare si vedano il Cap.2 di S.G.Odoulou, M.S.Soskin; il Cap.4 di J.O.White, Sze-Keung Kwong, M.Cronin-Golomb, B.Fischer, A.Yariv; il Cap.5 di J.Feinberg, K.R.MacDonald; il Cap.6 di J.P.Huignard, P.Günter.
- 3 P.Günter, F.Micheron: *Ferroelectrics* **18**, 27 (1978)
- 4 M.G.Moharam, T.K.Gaylord, R.Magnusson: *J. Appl. Phys.* **50**, 5642 (1979)
- 5 A.M.Glass, D. von der Linde, T.J.Negran: *Appl. Phys. Lett.* **25**, 233 (1974)
- 6 Vedi ad es. J.F.Nye: "Physical Properties of Crystals", (Oxford 1957)
- 7 S.Odulov, K.Belabaev, I.Kiselva: *Opt. Lett.* **10**, 31 (1985)
- 8 D.A.Temple, C.Warde: *J. Opt. Soc. Am.* **B3**, 337 (1986)
- 9 R.A.Rupp, F.W.Drees: *Appl. Phys.* **B39**, 223 (1986)
- 10 E.Voit: in "Electro-optic and Photorefractive Materials", ed. P.Gunter: *Proc. Phys.*, Vol.18, (Springer 1987)
- 11 J.Feinberg, D.Heiman, A.R.Tanguay Jr., R.W.Hellwarth: *J. Appl. Phys.* **51**, 1297 (1980)
- 12 D.Gabor: *Proc. Phys. Soc.* **A197**, 454 (1949)
- 13 Vedi ad es. G.S.Landsberg: "Ottica", Vol.1, (Mir 1979)
- 14 A.Yariv: *Appl. Phys. Lett.* **28**, 88 (1976)
- 15 A.Yariv: *J. Opt. Soc. Am.* **66**, 301 (1976)
- 16 J.Feinberg, R.W.Hellwarth: *Opt. Lett.* **5**, 519 (1980); errata 6, 257 (1981)
- 17 J.O.White, M.Cronin-Golomb, B.Fischer, A.Yariv: *Appl. Phys. Lett.* **40**, 450 (1982)

- 18 M.Cronin-Golomb, B.Fischer, J.O.White, A.Yariv: Appl. Phys. Lett. **41**, 689 (1982)
- 19 B.Fischer, S.Sternklar: Appl. Phys. Lett. **46**, 113 (1985)
- 20 J.Feinberg: Opt. Lett. **7**, 486 (1982)
- 21 M.Cronin-Golomb, B.Fischer, J.O.White, A.Yariv: Appl. Phys. Lett. **42**, 919 (1983)
- 22 T.Y.Chang, R.W.Hellwarth: Opt. Lett. **10**, 408 (1985)
- 23 J.Feinberg: Opt. Lett. **8**, 569 (1983)
- 24 R.J.Collier, K.S.Pennington: Appl. Phys. Lett. **8**, 44 (1966)
- 25 D.Gabor: IBM J. Res. Develop. **13**, 156 (1969)
- 26 Y.Owechko, G.J.Dunning, E.Marom, B.H.Soffer: Appl. Opt. **26**, 1900 (1987)

Volume I - n. 1 4/3/1986	CINQUANTA ANNI DI INTERAZIONI DEBOLI: DALLA TEORIA DI FERMI ALLA SCOPERTA DEI BOSONI PESANTI - Marcello Conversi	pag. 1
Volume I - n. 2 1/7/1986	EFFECTS OF DIOXINS ON NATURE AND SOCIETY - Opening talk, Sergio P. Ratti	pag. 3
	DIOXIN IN MISSOURI - Armon F. Yanders	pag. 11
	DEMONSTRATION OF INNOVATIVE REMEDIAL ACTION TECHNOLOGIES AT UNITED STATES MILITARY DIOXIN CONTAMINATED SITES - Terry L. Stoddard	pag. 23
	TIMES BEACH DIOXIN RESEARCH FACTTLY - Robert J. Schreiber	pag. 41
	E.P.A. RISK ASSESSMENT OF CHLORINATED DIBENZO-P-DIOXIN AND DIBENZOFURANS (CCDs/CDFs) - Donald G. Barnes, Patricia Roberts	pag. 51
	RECENT INTERNATIONAL COOPERATION IN EXCHANGE OF INFORMATION ON DIOXIN - Donald G. Barnes	pag. 63
Volume II - n. 1 15/9/1987	CHLORACNE AND THE AGENT ORAGE PROBLEM IN THE U.S.A. - B.Fischmann	pag. 69
	CONVEGNO SU "LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITA- ZIONALE" - MOTIVAZIONI DEL CONVEGNO - Sergio P. Ratti	pag. 3
	LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITAZIONALE: UN PROBLEMA APERTO - Sergio P. Ratti, Roberto Silvotti	pag. 5
	SVILUPPI RECENTI SULLA CONOSCENZA DELLA COSTANTE DI GRAVITA- ZIONE UNIVERSALE - Anna Grassi, Giuliano Strini	pag. 19
	LIMITI SPERIMENTALI SULLA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' - Roberto Cassinis	pag. 31
	CONSEGUENZE SPERIMENTALI DELLA IPOTESI DI ESISTENZA DI UNA QUINTA INTERAZIONE - Fabrizio Massa	pag. 43
	VERIFICA DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA E FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI - Bruno Bertotti	pag. 81
Volume II - n. 2 10/12/1987	TRANSIZIONE LIQUIDO SOLIDO - Mario Tosi	pag. 3
	EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - Emilio Zavattini	pag. 27
Volume III - n. 1 6/6/1988	METODI DI DILATAZIONE ANALITICA E RISONANZE IN SISTEMI QUANTISTICI NON RELATIVISTICI - Fausto Borgonovi	pag. 1
	CAMPO ELETTRICO ED EMISSIONI DA CARICHE IN UN MEZZO - Michele Spada	pag. 13
	SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE DI SUPERRETICOLI SEMICONDUTTORI - Luciano Colombo	pag. 29
	SOLITONI IN FISICA NUCLEARE - Marco Radici	pag. 51
	ASPETTI NON LOCALI DEL COMPORTAMENTO QUANTISTICO - Oreste Nicosini	pag. 83
Volume III - n. 2 4/7/1988	CARATTERIZZAZIONE OTTICA IN SITU DI FILMS SOTTILI - Alessandra Piaggi	pag. 1
	TRANSIZIONI DI WETTING - Tommaso Bellini	pag. 23
	FORZE A TRE CORPI NEI GAS RARI - Silvia Celi	pag. 49
Volume III - n. 3 15/12/1988	FLAVOUR PHYSICS - Luciano Maiani	pag. 1
	THE STANDARD ELECTROWEAK MODEL: PRESENT EXPERIMENTAL STATUS - Pierre Darriulat	pag. 27
	WHY BE EVEN-HANDED? - Martin M. Block	pag. 47
Volume IV - n. 1 6/4/1989	LA FISICA DEI COLLIDER - Paolo Bagnaia, Fernanda Pastore	pag. 1
Volume IV - n. 2 15/6/1989	SOLAR WIND AND PHYSICS OF THE HELIOSPHERE - Bruno Coppi	pag. 2
	THE IGNITOR PROJECT - Bruno Coppi, Francesco Pegoraro	pag. 32
Volume IV - n. 3 15/9/1989	SPETTROSCOPIA ELLISSOMETRICA NEI SOLIDI - Alessandra Piaggi	pag. 3
	UNA INTRODUZIONE AL SUPERCONDUCTING SUPERCOLLIDER - R. Diaferia	pag. 23
	FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI - Fausto Borgonovi	pag. 49
Volume V - n. 1 15/3/1990	MULTI-BODIED PHASE SPACE - A NEW APPROACH - Martin M. Bloch	pag. 1
	SCATTERING BRILLOUIN RISONANTE - Cristina Bosio	pag. 20
	METODO DI RINORMALIZZAZIONE PER LO STUDIO DELLA STRUTTURA ELET- TRONICA DI SUPPERRETICOLI - Saverio Moroni	pag. 40
	MECCANISMI DI CONDUCTIBILITA' IONICA MEDIATI DA DIFETTI ESTRINSECI - IL CASO DEL QUARZO - Alberto Paleari	pag. 57
	STATISTICHE QUANTISTICHE ED INDISTINGUIBILITA' - Gianluca Introzzi	pag. 69
Volume V - n. 2 15/6/1990	FISICA DELLE ALTE ENERGIE ALLE KOAN FACTORIES - Renato Diaferia	pag. 1
	NEUTRONI FREDDI E NEUTRONI ULTRAFREDDI - Gianluca Raselli	pag. 15
	TRANSIZIONI ORDINE-DISORDINE NELLE DISPERSIONI COLLOIDALI - Paolo Di Trapani	pag. 51
Volume VI - n. 1 p. I - 11/10/1991	LE UNITA' DI MISURA DELLA RADIOPROTEZIONE - Sergio P. Ratti	pag. 1
	L'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Giuseppe Belli	pag. 7
	NORMATIVA E PRINCIPI DI RADIOPROTEZIONE - Argeo Benco	pag. 17
	APPENDICE 1 - Pubblicazioni I.C.R.P. - Argeo Benco	pag. 56
	APPENDICE 2a) - Il regime giuridico dell'impiego pacifico dell'energia nucleare	pag. 59
	APPENDICE 2b) - Elenco di provvedimenti di interesse per le attività di impiego pacifico dell'energia nucleare e delle radiazioni ionizzanti	pag. 64
	APPENDICE 2c) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative all'utilizzazione delle sostanze radioattive e delle macchine radiogene	pag. 78

	APPENDICE 2d) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative al trasporto delle sostanze radioattive	pag. 85
	RADIOATTIVITA' AMBIENTALE E RADIOECOLOGICA - Arrigo Cigna	pag. 87
	EFFETTI BIOLOGICI DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI - Marco Caprotti	pag. 107
Volume VI - n. 1 p. II - 11/10/1991	MODELLO PREVISIONALE DELLA CONCENTRAZIONE DI ^{90}Sr , ^{134}Cs E ^{137}Cs NELLA CATENA ALIMENTARE - Arrigo Cigna	pag. 117
	L'AMBIENTE E LA RADIOPROTEZIONE IN RELAZIONE AD INCIDENTI NUCLEARI - Arrigo Cigna	pag. 131
	INCIDENTE NUCLEARE "CHERNOBYL" E SUE RIPERCUSSIONI SULLA CATENA ALIMENTARE - R. Cazzaniga, G. Dominici, A. Malvicini, E. Sangalli	pag. 157
	PRIMA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO RADIOLOGICO AMBIENTALE NELLA ZONA DI ISPIRA IN RELAZIONE ALL'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Argeo Benco	pag. 177
	APPROCCIO FRATTALE ALLA DESCRIZIONE DELLA RADIOATTIVITA' IN ARIA IN ITALIA DOPO CHERNOBYL - Gianfausto Salvadori	pag. 201
Volume VII - n. 1 15/3/1992	ELECTRON ENERGY LOSS SPECTROSCOPY - Marco Amioti	pag. 1
	LIVELLI ELETTRONICI PROFONDI IN SEMICONDUTTORI E LORO CARATTERIZZAZIONE - Adele Sassella	pag. 35
	LA RICERCA DEL BOSONE DI HIGGS AI FUTURI ACCELERATORI - G. Montagna	pag. 57
	SIMMETRIA CHIRALE E TEOREMA DI GOLDBERGER-TREIMAN - Carlo Gobbi	pag. 81
Volume VII - n. 2 15/10/1992	CRESCITA, CARATTERIZZAZIONE ED APPLICAZIONI DEI LANGMUIR-BLODGETT FILMS - Marco Amioti	pag. 1
	LA CATODOLUMINESCENZA - Vittorio Bellani	pag. 35
	CORRELAZIONI ELETTRONICHE IN OSSIDI DI METALLI DI TRANSIZIONE - Luigi Sangaletti	pag. 63
Volume VIII - n. 1 15/1/1993	TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA - Alberto Vancheri	pag. 1
	ROTTURA ESPlicita E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi	pag. 25
	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 39
	EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto	pag. 75