

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

— o —

# SCIENTIFICA ACTA

## QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME IX

ANNO IX

NUMERO 2

15 NOVEMBRE 1994

ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

— o —

CENTRO STAMPA - DIPARTIMENTI FISICI  
via Bassi, 6 27100 Pavia

## INDICE

- 1 - PROPRIETÀ FISICHE DI CLUSTER METALLICI - Vittorio Bellani pag. 1
- 2 - APPLICAZIONI DI RETI NEURALI ALLA FISICA DELLE ALTE ENERGIE - Paolo Vitulo pag. 18
- 3 - CRITTOGRAFIA QUANTISTICA - Chiara Macchiavello pag. 47
- 4 - IL "PARADOSSO" DEI GEMELLI - Matteo Cacciari pag. 64
- 5 - TRANSIZIONI DI FASE NEL PRIMO UNIVERSO - Simona Rolli pag. 77
- 6 - SULLA STABILITÀ DINAMICA DELLA BICICLETTA - Matteo Paris pag. 102

**Vittorio Bellani**

**Dipartimento di Fisica "A. Volta"  
Università di Pavia  
e  
Gruppo Nazionale di Struttura della Materia  
Sezione di Pavia**

**PROPRIETA' FISICHE DI CLUSTER METALLICI**

**Seminario tenuto l' 1 dicembre 1992**

## Introduzione

Come cambiano le proprietà di una unità costituita da pochi atomi man mano che si aumenta il loro numero ? Si può studiare un aggregato di atomi abbastanza grande da non poter più essere chiamato molecola ma ancora troppo piccolo per avere la struttura del cristallo. Un anello di otto atomi di zolfo o un tetraedro di atomi di fosforo non è ancora un cluster. Le molecole esistono nelle fasi di vapore, liquida e solida. Un cluster è un aggregato di atomi che non si trova in numero apprezzabile in un vapore all'equilibrio. Una domanda frequente è, quanti atomi di un metallo occorrono per formare un cluster con le proprietà del metallo bulk ? I metalli hanno una risposta ottica caratteristica. Un singolo atomo di Li ha come spettro di assorbimento una semplice riga nel visibile. Un cristallo di litio ha invece uno spettro di assorbimento completamente diverso; l'assorbimento è grande nell'infrarosso, ha un minimo nel visibile e cresce nell'ultravioletto. I fotoni di energia molto bassa eccitano gli elettroni dal continuo di stati al di sotto del livello di Fermi a stati giusto al di sopra del livello di Fermi dando origine all'assorbimento nell'infrarosso. Il forte assorbimento nell'ultravioletto è dovuto alle transizioni interbanda. Un insieme di 50 atomi di Li ha un largo spettro di assorbimento ottico nel visibile, dovuto a eccitazioni collettive degli elettroni esterni chiamate plasmoni. Anche un cristallo di Li ha eccitazioni di plasmoni ma hanno un carattere longitudinale e non si accoppiano con la radiazione e.m. che è trasversale. Nel microcristallo un plasmone è una eccitazione collettiva degli elettroni da una parte all'altra del cristallo che ha un grande momento di dipolo e un forte assorbimento ottico nel visibile. L'approssimazione a un elettrone spiega l'assorbimento ottico dell'atomo di Li ma non descrive nemmeno qualitativamente lo spettro ottico dell'insieme di 50 atomi. Per un cluster con un insieme di atomi minore di 50 la risposta ottica è ancora diversa e la recente possibilità tecnica di produrli in maniera controllata ci permette di studiare questa e altre proprietà fisiche.

Gran parte del lavoro fatto sulla fisica dei cluster riguarda la misura della stabilità dei cluster in funzione della loro grandezza, e la misura di proprietà fisiche come i potenziali di ionizzazione e la polarizzabilità. Si sono sviluppati dei modelli teorici per spiegare i

risultati ottenuti.

Lo sviluppo di tecniche a fascio molecolare ha permesso di produrre fasci di cluster nel vuoto di identica massa. Si è trovato che il potenziale di ionizzazione di cluster sodio è maggiore della funzione di lavoro del bulk. Tramite assorbimento di raggi x (EXAFS) si è mostrata una riduzione del valore della costante reticolare per cluster di rame su un substrato di carbonio. Cluster d'oro contenenti poche migliaia di atomi aventi un diametro di pochi nanometri presentano già una struttura cristallina. Esperimenti di diffrazione di elettroni su cluster di Pb e In mostrano strutture cristalline per cluster di circa 2000 atomi e una variazione della costante reticolare con la dimensione. Possiamo distinguere i cluster in base alla loro dimensione come piccoli, medi e grandi rispettivamente per  $< 10$ ,  $< 100$  e  $> 100$  atomi per cluster. Noi studieremo in particolare cluster di metalli.

### Modelli teorici per i cluster metallici

Sperimentalmente per cluster di certi metalli la dipendenza della stabilità, di potenziali di ionizzazione, delle polarizzabilità statiche e di altre proprietà in funzione della dimensione del cluster mostrano distinte strutture a shell. Le prime osservazioni riguardano cluster di sodio e di potassio [1]. La struttura a shell è stata osservata anche nel rame, nell'argento, nell'oro, nel cadmio e nello zinco [2].

Le proprietà elettroniche dei solidi vengono simulate usando metodi *ab initio* nello schema autoconsistente alla Hartee-Fock, e per manipolare sistemi infiniti si sfrutta la simmetria traslazionale del solido e il teorema di Bloch. Si applica il medesimo schema ai cluster, costruendo una supercella come un singolo cluster circondato da una regione di spazio vuoto ripetendo poi periodicamente la supercella. Così si usano i metodi standard per il calcolo della struttura a bande nei solidi. A causa del grande tempo di calcolo richiesto da talo metodo, questo è stato applicato a cluster con pochi atomi .

La struttura elettronica del sodio metallico bulk puo' essere studiata usando un modello di elettrone quasi libero. L'elettrone 3s di valenza interagisce con un potenziale effettivo a una particella risultante dagli pseudopotenziali ionici e dal potenziale di

interazione elettrone-elettrone. Questo modello è stato applicato ai cluster di sodio [1] con il potenziale effettivo:

$$U(r) = -\frac{U_0}{\exp[(r-r_0)/\epsilon]+1} \quad (1)$$

dove  $U_0$  è la somma delle energie di Fermi (3.23 eV) e della funzione lavoro  $2.7 \text{ (eV)}^2$  del bulk,  $r_0$  è il raggio effettivo del cluster sferico assunto uguale a  $r_s N^{1/3}$  dove  $r_s$  è il raggio di una sfera che contiene un elettrone nel bulk ( $r_s = 3.93$  a.u. per il sodio). Il parametro  $\epsilon$  determina la variazione del potenziale al bordo della sfera ( $\epsilon = 1.5$  a.u. per il sodio). L'equazione di Schrödinger è poi risolta numericamente per ogni  $N$ . L'energia elettronica totale è la somma delle autoenergie degli stati occupati. Definendo  $\Delta(N)$  la differenza dell'energia elettronica tra due clusters adiacenti,  $E(N) - E(N-1)$ , un picco nello spettro di  $\Delta(N+1)$  indica che il cluster con  $N$  elettroni ha un orbitale pieno, e che con  $N+1$  elettroni si comincia a riempire un nuovo orbitale. Nella Fig. 1 vi è lo spettro di massa sperimentale per cluster di sodio e lo spettro teorico calcolato. Quando l'equazione a una particella è risolta in un sistema di coordinate sferico gli autostati sono classificati con il numero quantico principale  $n$ , dove  $n-1$  è il numero dei nodi della funzione radiale, e dai numeri quantici di momento angolare  $l$  e  $m_l$ . Si usa la convenzione seguente per denominare il momento angolare s, p, d, f, g ... per  $l = 0, 1, 2, 3, 4 \dots$ . Si vede dalla figura che i numeri corrispondenti a shell chiuse (la posizione dei picchi) danno la posizione di discontinuità nelle energie di legame, e sperimentalmente corrispondono a picchi nello spettro sperimentale di distribuzione di abbondanza. I picchi teorici a  $N = 18, 34, 68$  e  $70$  sono assenti nello spettro sperimentale perché molto sensibili ai parametri del potenziale. Nel cluster reale il campo cristallino dovrebbe parzialmente rimuovere la degenerazione in  $l$  di grado  $2(2l+1)$ . La buona corrispondenza tra spettro teorico e sperimentale indica che le perturbazioni (tra le quali il campo cristallino) sono piccole. Si conclude che la struttura a shell sperimentale nel sodio è dovuta alle proprietà elettroniche.

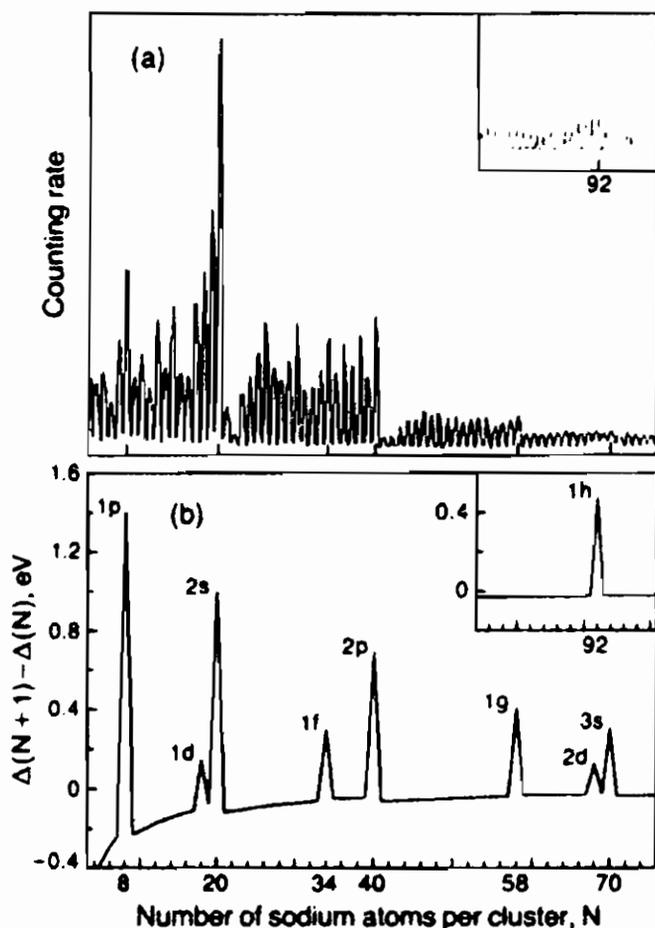


Fig. 1. Spettro di massa per cluster di Na; (a) Spettro sperimentale. (b) Spettro calcolato [3] .

Nel formalismo del funzionale densità l'energia totale di un gas di elettroni interagenti é :

$$E_{el} = E_{kin} + E_{xc} + E_{coul} + E_{ext} \quad (2)$$

somma dei termini energetici cinetico, di scambio correlazione, Coulombiano e di campo esterno. In un modello a Jellio sferico l'effetto degli ioni di core è simulato da una sfera positivamente

carica e il termine energetico  $E_{ext}$  tiene conto del potenziale elettrostatico generato da questa sfera. La forma del potenziale di scambio-correlazione per il potenziale effettivo a un elettrone non è determinabile, e si usano delle approssimazioni [4]. Con un metodo variazionale dalla (2) si ottiene un set di equazioni di Schrödinger che vengono risolte in maniera autoconsistente. L'approssimazione del funzionale densità è accurata per lo stato fondamentale non lo è per gli stati eccitati. Nella Fig. 2 è riportata l'energia totale per atomo calcolata con un modello a jellio sferico nel formalismo del funzionale densità sempre per cluster di sodio.

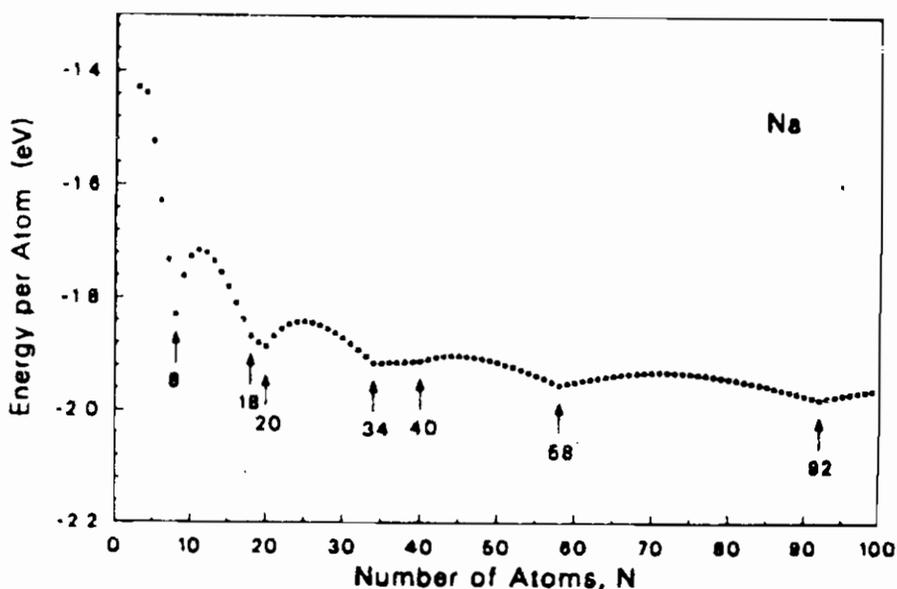


Fig. 2. L'energia calcolata per atomo con un modello a jellio sferico nel Na [2].

Nella Fig. 3 è riportato  $\Delta_2(N) = \Delta(N+1) - \Delta(N) = E(N+1) + E(N-1) - 2E(N)$  in funzione di N per cluster di litio, sodio e potassio [5, 6] ( $r_s = 3.25$  e  $4.86$  per Li e K). Per il litio e il potassio i picchi sono nella stessa posizione del sodio, l'intensità dei picchi diminuisce dal litio al potassio. Questo si spiega così: per un certo N (ad es.  $N = 40$ ), il raggio dei cluster di Li, Na e K è dato da  $r_s N^{1/3}$  e dall'elettrostatica

sappiamo che piu' il raggio di una sfera carica è piccolo piu' è profondo il potenziale all'interno della sfera.

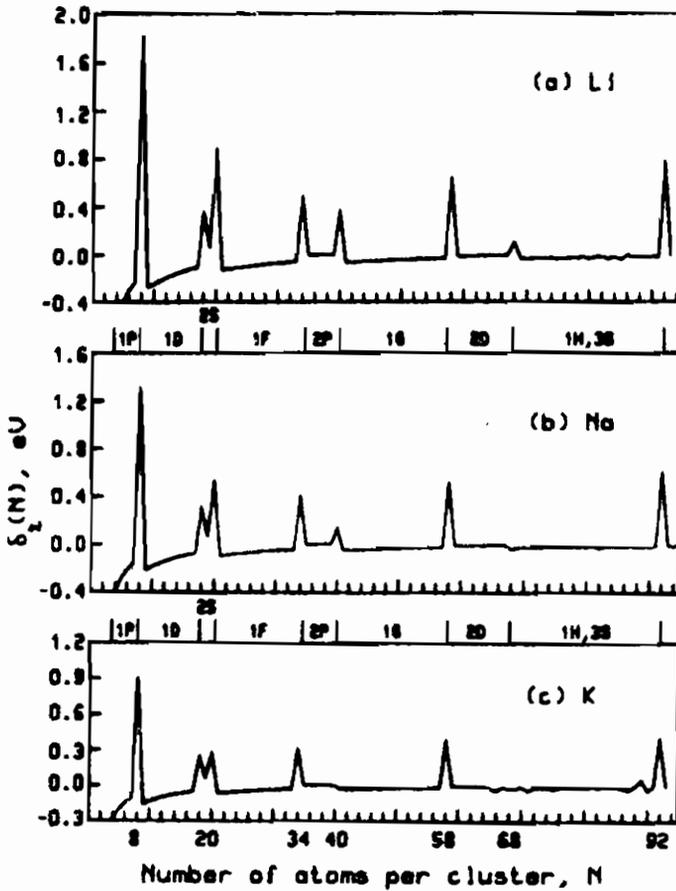


Fig. 3.  $\Delta_2(N)$  in funzione di  $N$  per cluster di Li, Na e K [5].

Nel potassio il potenziale effettivo è il meno profondo, così la distanza tra i livelli energetici è minore e anche i gap e  $\Delta_2(N)$  sono più piccoli. Dal formalismo del funzionale densità per piccoli cluster di sodio (usando una combinazione lineare di orbitali atomici Gaussiani) risulta che il legame nel cluster è debole, non localizzato e non direzionale. Non vi sono segni di legame covalente; gli orbitali molecolari calcolati possono essere classificati come "s-like", "p-like", "d-like" in accordo con la forma globale; se si tiene conto dell'effetto

Jahn-Teller la struttura elettronica è il principale fattore nel determinare le geometrie di equilibrio dei clusters. Nel caso del  $\text{Na}_3$ ,  $\text{Na}_4$ ,  $\text{Na}_4^+$  e  $\text{Na}_5^+$  sono occupati un orbitale s-like e un orbitale p-like. I cluster  $\text{Na}_7$ ,  $\text{Na}_8$  e  $\text{Na}_8^+$  con tre orbitali p-like occupati ( $p_x$ ,  $p_y$  e  $p_z$ ) hanno una configurazione tridimensionale con distanze uguali tra i primi vicini.

Uno studio tramite pseudopotenziale col metodo della supercella [7] con un set di onde piane e con strutture fcc e bcc per il  $\text{Na}_{13}$  e  $\text{Na}_{15}$  mostra che la densità di carica autoconsistente è delocalizzata. Gli autovalori elettronici risultano uguali a quelli ottenuti con un modello a jellio (la differenza è minore del 10 %. Con un modello a jellio sferico si sono studiati anche cluster metallici della terza linea della tavola periodica degli elementi (sodio, magnesio, alluminio). Per cluster con lo stesso numero di elettroni di valenza,  $Z$ , il numero di atomi per cluster  $N$  è diverso a causa della differente valenza degli atomi costituenti. Il magnesio è un metallo divalente con  $N$  uguale a  $Z/2$  e la posizione dei picchi in  $\Delta_2(N)$  è shiftata di un mezzo rispetto a quella del sodio (i.e. le strutture a  $N = 20, 34, 40 \dots$  del sodio nel magnesio sono a  $N = 10, 17, 20\dots$ ). Vi è in più un picco anche a  $N = 34$  ( $Z = 68$ ).

### Produzione e rivelazione

Negli anni recenti vi è stato un grande sviluppo delle sorgenti di cluster in fase gassosa. In particolare la vaporizzazione laser e le sorgenti a ioni secondari (SIMS, Secondary Ion Mass Spectrometry) hanno prodotto cluster anche per la maggior parte dei metalli refrattari. Le sorgenti ad espansione ad aggregazione di gas sono affidabili e frequentemente usate in particolare per i metalli a basso punto di fusione. La Fig. 4 mostra la camera principale di una sorgente ad espansione. La camera viene riempita di metallo ultrapuro e di gas inerte di trasporto alla pressione di circa 5-10 atm. in seguito è riscaldata rapidamente in modo da ottenere la pressione di vapore desiderata (in genere 50-300 Torr). In seguito l'espansione adiabatica del gas nel vuoto porta alla formazione di un fascio di cluster con una distribuzione di velocità molto piccola. Le condizioni della sorgente (temperatura e pressione) non influenzano la

struttura fine del fascio. Nella sorgente ad espansione il vapore del metallo esiste in una fase supersatura per un tempo relativamente breve e si formano in generale cluster piccoli e medi.

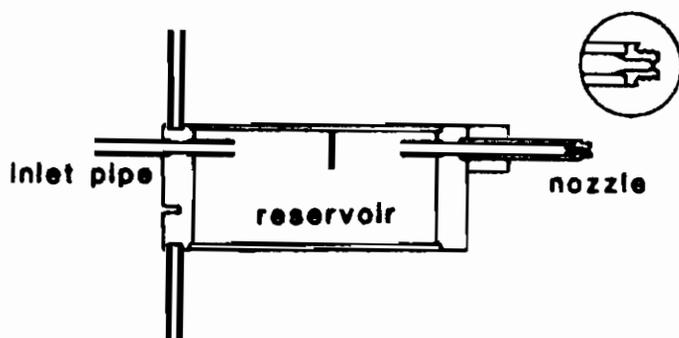


Fig. 4. Camera principale di una sorgente a espansione.

Nella sorgente a aggregazione, il metallo del vapore proveniente dal forno entra nella camera di condensazione fredda dove si mescola con un flusso di gas inerte alla pressione di  $\sim 1$  Torr e alla temperatura di 77 K. La formazione dei cluster continua fino a quando la miscela gas-cluster viene scaricata dalla sorgente nella camera a vuoto dove vengono effettuate le misure sui cluster [8]. La distribuzione delle dimensioni dei cluster è controllata dalla temperatura del forno e della camera e dal flusso del gas inerte. Si sono usate temperature di fusione fino a 3000 K. Con questa sorgente si possono produrre cluster molto grandi (fino a  $10^5$  atomi).

Altre sorgenti utilizzano fasci di fotoni [9], ioni, elettroni o di atomi neutri che vaporizzano localmente piccole quantità di metallo alla superficie del bulk. Ad esempio [10] con un laser pulsato Nd-YAG con impulsi della durata di 7 ns e energia di 25-35 mJ per impulso focalizzato su un bersaglio del materiale da vaporizzare, si ottengono circa  $10^{16}$  atomi per impulso. Il plasma ad alta temperatura che si produce viene raccolto in un canale sopra bersaglio e trasferito in una zona di pre-espansione dove ha luogo la clusterizzazione del materiale stesso e anche la parziale neutralizzazione della nube di plasma.

Bombardando un bersaglio metallico con ioni di gas rari (SIMS) si producono cluster ionizzati e neutri [11]. Usando ioni Xe si sono

prodotti cluster di argento con  $N \sim 200$ . Se si neutralizzano gli ioni del fascio primario del SIMS (questo è possibile tramite scambio di gas risonante in una camera che contiene il medesimo gas del fascio ionico) è possibile usare anche bersagli amorfi e non conduttori (la tecnica è detta FAB, Fast Atomic Bombardment) [12].

La spettrometria di massa è la tecnica più usata per determinare la distribuzione delle dimensioni dei cluster e per selezionare cluster di una determinata dimensione. L'ionizzazione, la separazione di massa e la rivelazione degli ioni devono essere effettuate con cura. Nella ionizzazione a impatto di elettroni un fascio di elettroni prodotto da una filamento caldo è accelerato a energie di 50-100 eV, con correnti di alcuni milliamper e attraversa il fascio neutro che è parzialmente ionizzato per impatto. L'efficienza di ionizzazione è  $\sim 10^{-4}$ . I metodi più usati per la selezione di massa sono l'analisi del tempo di volo (TOF, Time of Flight), la deflessione magnetica e l'analisi a quadrupolo di massa [13]. In Fig. 5 è riportato uno spettrometro di massa magnetico per l'analisi dei cluster.

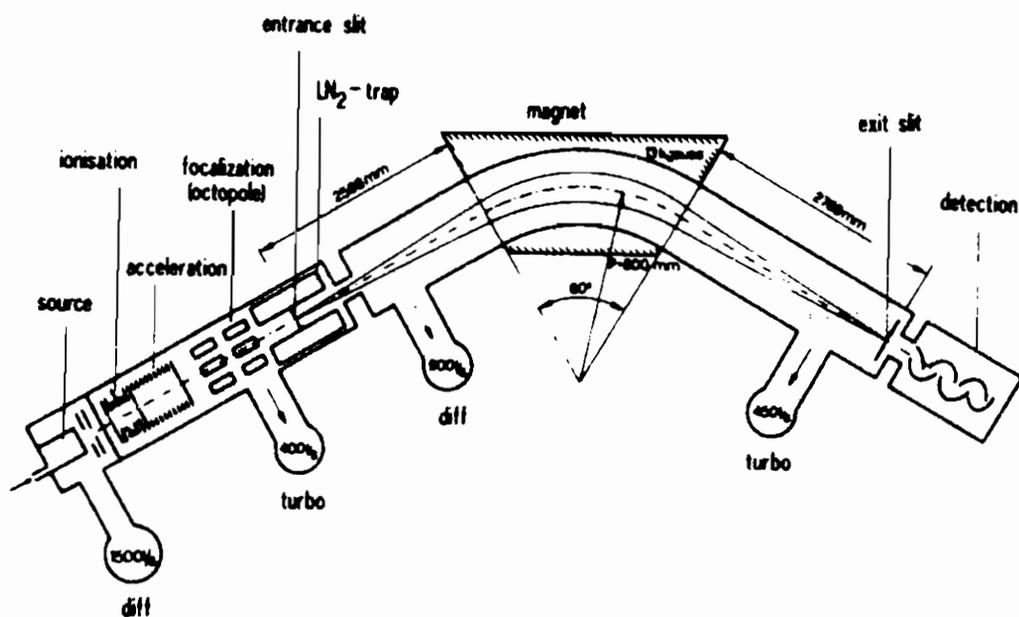


Fig. 5. Spettrometro di massa magnetico per l'analisi dei cluster [14].

Lo spettrometro a tempo di volo funziona in modo pulsato. Il fascio di cluster ionizzati è accelerato da un potenziale pulsato  $V$  in modo che tutti hanno la stessa energia. La velocità di ogni cluster dipenderà dalla massa  $v = (2qV/m)^{1/2}$  così che a differenti masse corrispondono differenti tempi di volo. La lunghezza tipica della regione di volo è 1 m. L'analisi TOF permette di studiare un intervallo di masse ampio ma ha una risoluzione relativamente bassa. Gli spettrometri di massa magnetici sono disponibili commercialmente. Hanno il vantaggio di una elevata risoluzione, ma l'intervallo spettrale è limitato e la trasmissione ridotta ( $<10^{-3}$ ). Per rivelare i cluster ionizzati generalmente si utilizzano rivelatori Daly: Come rivelatori vengono usati anche coppe di Faraday e moltiplicatori di elettroni.

### Misure di abbondanza dei cluster

Nella Fig. 6 sono riportati gli spettri di massa sperimentali per cluster di sodio e potassio. Osserviamo dei picchi per  $N = 2, 8, 20, 40, 58$ . La struttura fine diviene meno distinta al crescere di  $N$  ed è più debole nel potassio che nel sodio. In particolare il picco a  $N = 20$  è netto nel Na, molto più arrotondato nel K, mentre il picco a  $N = 8$  è molto più netto nel potassio. Gli spettri di massa per il sodio sono stati misurati anche a diverse pressioni del gas di trasporto mantenendo costanti le condizioni del forno [1]. Aumentando la pressione sia del vapore metallico sia del gas di trasporto la produzione di cluster aumenta soprattutto per i cluster più grandi.

Anche per cluster prodotti come ioni troviamo dei particolari valori di  $N$  (numero di atomi) in cui la stabilità è maggiore. Gli spettri di massa sperimentali per cluster positivi di rame mostrano maggiori abbondanze per  $9+$  e  $21+$ , che rappresentano il numero di atomi nel singolo cluster ionizzato e corrispondono a un numero di elettroni di valenza totale 8 e 20, che caratterizzano sistemi neutri altamente stabili. Per ioni argento si sono trovate maggiori abbondanze per  $3+$ ,  $9+$  e  $21+$ . In altre misure sull'argento si sono trovate alte abbondanze per  $7-$  e  $19-$ , che anche corrispondono a sistemi di 8 e 20 elettroni. Gli spettri di massa per il rame e l'argento mostrano strutture anche a  $35+$  [12].

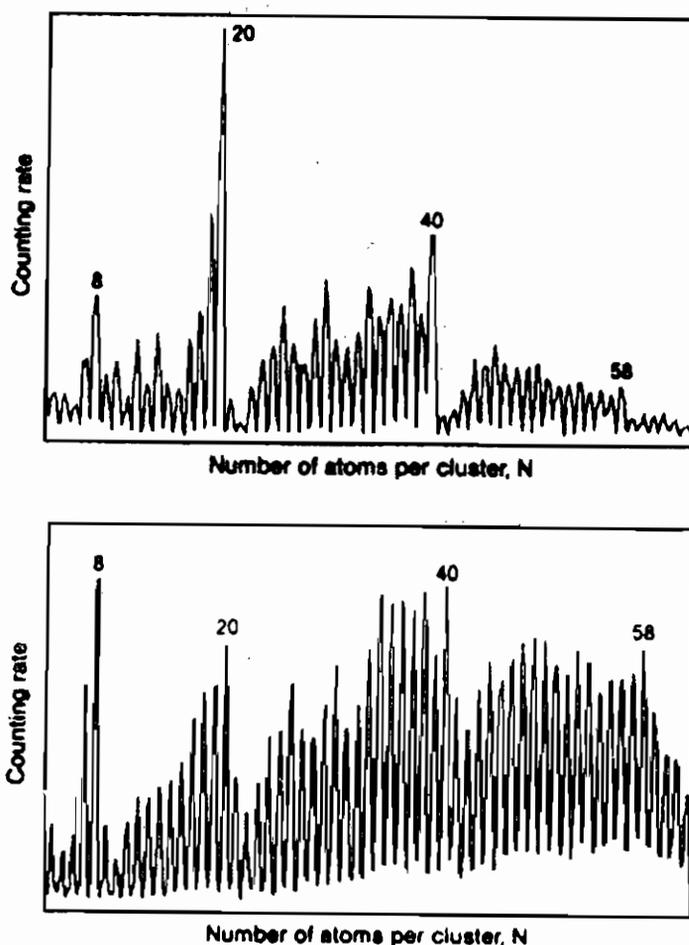


Fig. 6 Spettri di massa sperimentali per cluster di Na (a) e K (b) [2].

In cluster di rame, argento e oro prodotti mediante SIMS si sono trovati i valori di maggiore stabilità per  $N = 3+, 9+, 21+, 35+, 41+, 59+$ , nell'argento anche  $93+$  e  $139+$ , confermando che la struttura a shell è valida anche per i metalli nobili in un ampio intervallo di masse [15]. I picchi a  $N = 18$  e  $34$  previsti dalla teoria a shell sferica sono presenti con le seguenti intensità:

$$\begin{array}{ll}
 N = 18, \text{Cu} < \text{Ag} < \text{Au}; & N = 20, \text{Au} < \text{Cu} \sim \text{Ag} \\
 N = 34, \text{Cu} < \text{Ag} < \text{Au}; & N = 40, \text{Au} < \text{Cu} \sim \text{Ag}
 \end{array}$$

Questo comportamento non si spiega con una semplice dipendenza

da  $r_s$ , perchè è quasi uguale per i tre metalli; inoltre in questo modello non sono considerati gli pseudopotenziali per gli stati di core e gli stati d occupati.

### Misure di altre grandezze fisiche.

In alcuni esperimenti si è trovato che il potenziale di ionizzazione (IP) per piccoli clusters di sodio è più grande della funzione lavoro di bulk e che varia con la dimensione del cluster. In Fig. 7 è riportato l'IP per cluster di potassio in funzione di  $N$  ottenuto con una lampada a xenon per  $3 < N < 30$  e con un laser a colorante per  $26 < N < 101$ . Per  $N = 101$  l'IP è il 116 % della funzione lavoro di bulk. La curva ha delle discontinuità per  $N = 8, 18, 20, 40, 58$  e  $92$  corrispondenti ai valori delle strutture negli spettri di abbondanza e corrispondenti alle chiusure di shell.

Teoricamente la funzione lavoro è la somma di tre termini energetici che dipendono dal raggio di Wigner-Seitz  $r_s$ , il termine elettrostatico, quello di scambio correlazione e quello cinetico. Il primo  $E_{es}$  rappresenta la barriera superficiale all'estrazione di un elettrone dalle barriere del jellio, il secondo  $E_{xc}$  è il contributo di scambio correlazione del potenziale chimico per un gas uniforme di elettroni, e il termine cinetico è l'energia di Fermi del bulk  $E_f$ :

$$W = E_{es} + E_{xc} - E_f \quad (3)$$

dove tutti i contributi sono considerati positivi.

Classicamente il potenziale di ionizzazione è esprimibile come:

$$IP = W + A(e^2/R) \quad (4)$$

dove  $W$  è la funzione lavoro di bulk e  $R$  è il raggio classico del cluster (lavori teorici e sperimentali danno  $A \sim 0.3 - 0.5$ ). Questa espressione non è esatta ma fitta bene i dati sperimentali. La (4) fitta i dati sperimentali per il sodio con  $W = 2.52$ , e il valore di  $W$  da misure specifiche è 2.7. Nella Fig. 8 è riportato l'IP per il potassio in funzione di  $N^{-1/3}$  ricordando che  $R$  è legato a  $N$  dalla relazione:

$$R = r_s N^{1/3} \quad (5)$$

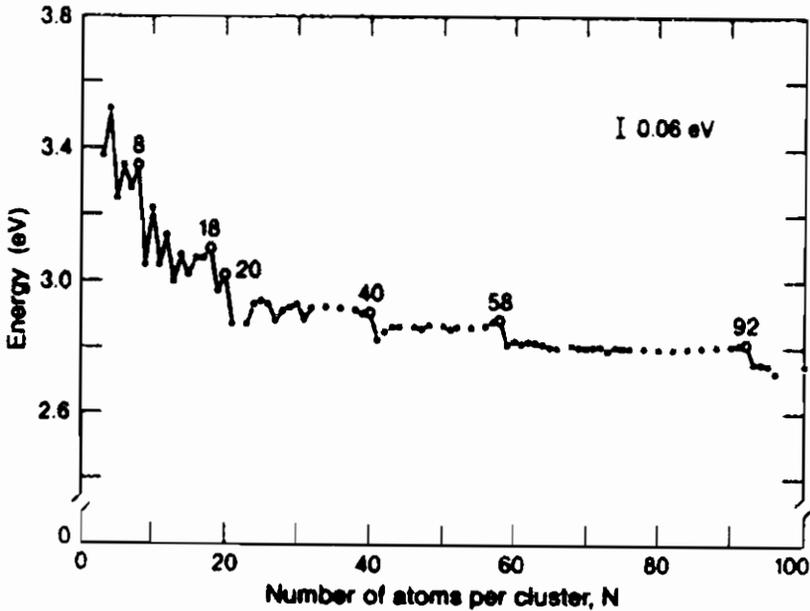


Fig. 7 Potenziale di ionizzazione sperimentale per il potassio [2].

Il valore estrapolato di  $W$  che si ottiene è 2.41 in accordo con il valore sperimentale della funzione lavoro  $W = 2.4$  eV ( $A = 0.33$ ). L'assorbimento e la re-emissione di un fotone di radiazione risonante da parte di atomi è associato allo scambio di momento tra campo di radiazione e atomo. Schieder et. al. [16] hanno misurato la deflessione di un fascio di cluster di sodio da parte di un raggio di un laser a colorante.

Un'altra quantità fisica che è stata misurata nei cluster è la polarizzabilità elettrica statica. Lang e Kohn [17] hanno calcolato la distribuzione della densità elettronica in presenza di un campo elettrico applicato osservando che questa si estende apprezzabilmente al di fuori della superficie del jellio. La posizione in cui il campo medio è zero è a una distanza  $d$  dalla superficie esterna del jellio, e per il sodio in cui il raggio di Wigner-Seitz  $r_s = 4$  a.u. risulta  $d_p = 1.3$  a.u. Classicamente si calcola che la polarizzabilità di un cluster metallico in presenza di un campo elettrico esterno  $\epsilon$  vale

$3\epsilon$  alla superficie e vale 0 all'esterno. Ne risulta una polarizzabilità  $\alpha = R^3$ , dove  $R$  è il raggio della sfera. Beck ha calcolato la densità elettronica in modo semiclassico nel formalismo del funzionale densità esprimendo l'energia cinetica con un'espansione gradiente [18]. La polarizzabilità vale  $\alpha = (R+\delta)$ , e il parametro di polarizzazione  $d$  per i cluster vale circa 30% meno dell'analogo nel bulk. Un cluster risponde a un campo elettrico come una sfera metallica con un raggio effettivo leggermente più grande del valore classico.  $\delta$  dipende solo dalla dimensione e non dalla struttura a shell. La polarizzabilità è sperimentalmente misurata dalla deflessione di un fascio di cluster in un campo elettrico disomogeneo [19]. Nella Fig. 8 è riportata la polarizzabilità sperimentalmente normalizzata alla polarizzabilità atomica per cluste di Na e K e la polarizzabilità teorica [20].

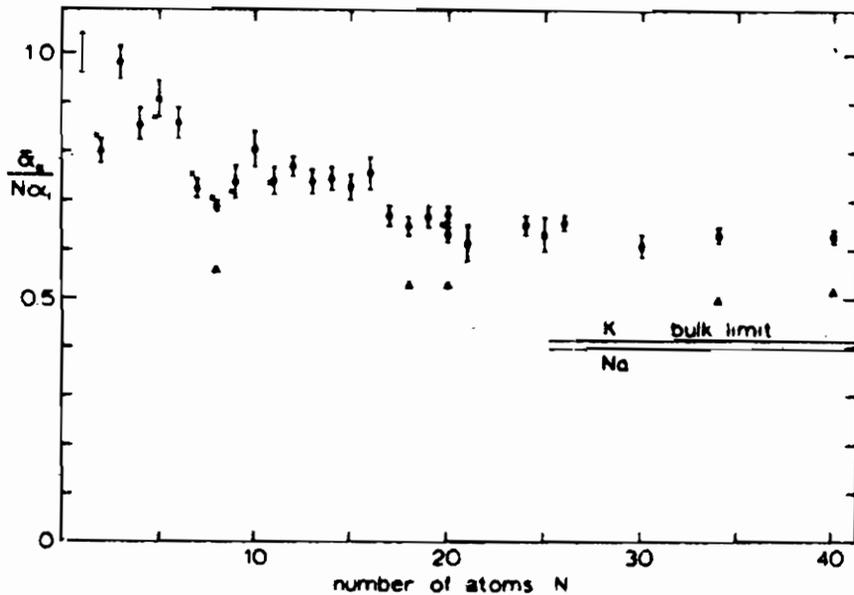


Fig. 8. Polarizzabilità sperimentalmente per cluster di Na (cerchi) e K (croci) e teorica (triangoli) [21].

I valori sono gli stessi per l'Na e il K. La polarizzabilità diminuisce gradualmente fino a  $N = 20$  e rimane pressoché costante per  $N = 20 - 40$ . Vi sono dei minimi locali per  $N = 2, 8, 18$  e  $20$  corrispondenti a chiusure di shell.

## Bibliografia

- [1] W.D. Knight, W.A. de Heer, K. Clemenger, and W.A. Saunders, *Solid State Comm.* **53**, 445 (1985).
- [2] W. de Heer, W. D. Knight, A. Y. Chou and M. Cohen, in "Solid State Physics" , vol. 40, ed. by H. Ehrenreich and D. Turnbull (Academic, Orlando, 1987), p. 93.
- [3] W.D. Knight, K. Clemenger, W.A. de Heer, W.A. Saunders, M.Y. Chou, and M.L. Cohen, *Phys. Rev. Lett.* **52**, 2141 (1984) .
- [4] J. Perdew and A. Zunger, *Phys. Rev. B* **23**, 5048 (1981).
- [5] M.Y. Chou, A. Cleland, and M.L. Cohen, *Solid State Comm.* **52**, 645 (1984).
- [6] M.Y. Chou and M.L. Cohen, *Phys. Lett. A* **113**, 420 (1986).
- [7] A. Cleland and M.L. Cohen, *Solid State Commun.* **55**, 35 (1985).
- [8] K. Sattler, J. Mühlbach and E. Recknagel, *Phys. Rev. Lett.* **45**, 821 (1980).
- [9] V. E. Bondybey and H. English, *J. Chem. Phys.* **76**, 2165 (1982).
- [10] P.J. Brucat, L.S. Zheng, C.L. Pettiette, S. Yang and E. Smalley, *J. Chem. Phys.* **84**, 3078 (1986).
- [11] P. Fayet, J.P. Wolf and L. Wöste, *Phys. Rev. B.* **33**, 6792 (1986).
- [12] F.M. Devienne and J.C. Roustan, *Org Mass. Spectrom.* **17**, 173 (1982).
- [13] P. Fayet, F. Granzer, G. Hegenbart, E. Moisar, B. Pischel and L. Wöste, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 3002 (1985).
- [14] R. Rechsteiner, doctoral thesis, Lausanne 1982.
- [15] I. Katakuse, T. Ichihara, Y. Fujita, T. Matsuo and H. Matsuda, *Int. J. Mass. Spectrom. Ion Proc.* **69**, 109 (1986).
- [16] R. Schieder, H. Walther and L. Wöste, *Opt. Comm.* **5**, 337 (1975).
- [17] N.D. Lang and W. Kohn, *Phys. Rev. B* **3**, 1215 (1971).

[18] D.E. Beck, *Phys. Rev. B* **30**, 6935 (1984).

[19] W. Hall, and J. Zorn *Phys. Rev. A* **10**, 1141 (1974).

[20] W. D. Knight, K. Klemenger, W. A. de Heer and W. A. Saunders, *Phys. Rev. B* **31**, 2539 (1985).

[21] W.D. Knight, K. Klemenger, W.A. de Heer, and W.A. Saunders, *Phys. Rev B.* **31**, 2539 (1985).



Paolo Vitulo

Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica  
Università di Pavia

# Applicazioni di reti neurali alla Fisica delle Alte Energie

Seminario tenuto il 17 Dicembre 1992



# 1 Introduzione

Una trattazione completa del funzionamento e delle applicazioni delle reti neurali (NN) richiederebbe ben altro tempo che non quello destinato ad un singolo seminario: per questo motivo si è ritenuto opportuno suddividere l'argomento in due seminari distinti, il primo dei quali si occupasse esclusivamente della parte teorica; il secondo invece tratterà alcune applicazioni delle NN nel campo della fisica delle alte energie.

Concetti basilari come "learning", "error back propagation", "learning rate", "momento" ... sono assunti in questo seminario.

L'utilizzo delle NN nella fisica delle alte energie apporta notevoli vantaggi derivati dalle caratteristiche intrinseche delle stesse:

- architettura e calcolo parallelo
- possibilità di implementazione hardware
- memoria associativa
- generalizzazione

Le potenzialità citate si inseriscono in un problema del tutto generale che si presenta con maggior rilievo ai fisici delle alte energie con l'avvento della nuova generazione delle macchine acceleratrici (SSC, LHC): alta molteplicità degli eventi da analizzare e necessità di gestire e processare grandi quantità di dati nel minor tempo possibile. A questo proposito si osservi che nelle NN il processamento e l'immagazzinamento delle informazioni è naturalmente distribuito attraverso tutta la rete piuttosto che in una specifica locazione di memoria. Si perde quindi la separazione tra CPU e unità di memoria tipiche dei calcolatori sequenziali tradizionali, in accordo con il modo in cui il processo di calcolo è implementato nella rete. Il risultato è che a parità di complessità di problema, le NN eseguono l'"algoritmo" più velocemente di un calcolatore tradizionale.

L'interesse rivolto alla possibilità di utilizzo delle NN nella fisica delle alte energie è solamente recente come prova la bibliografia riportata in appendice. Si osservi che la maggior parte degli esempi

citati si riferisce a implementazioni software di **NN** su computer di tipo generale o dedicato. Risultano invece ancora ridotte le implementazioni hardware. Sostanzialmente nell'ambito della fisica delle alte energie il loro utilizzo è legato a due tipi di problemi:

- **CLASSIFICAZIONE**: separazione  $e/\pi$ , discriminazione di jet di quarks, trigger, misure di larghezze di segnali.
- **OTTIMIZZAZIONE**: track-finding, pattern-recognition

con implementazioni su reti Feed Forward (**FF**) e di Hopfield.

Come risulta dalla letteratura sull'argomento, occorre comunque sottolineare che in realtà molte procedure non sono affatto standardizzate: cioè non esistono criteri univoci per determinare qual è il numero ottimale di neuroni da utilizzare, o quanti neuroni occorrono nello hidden layer, quale sia il rapporto ottimale tra configurazioni buone e non buone nella fase di apprendimento, o il numero di configurazioni da presentare alla rete.

Il primo esempio si soffermerà, partendo da un problema generale, sull'utilizzo delle **NN** come memorie associative per la ricostruzione on-line di tracce in un esperimento.

Occorre sottolineare a questo proposito che il concetto di memoria associativa rappresenta una caratteristica intrinseca delle reti neurali dovuta proprio alla struttura di queste ultime. La distribuzione delle connessioni, sedi esse stesse dell'informazione attraverso i pesi, permette il trasferimento di dati in modo parallelo ed unisce alla velocizzazione una importante caratteristica: la resistenza al degrado, cioè la possibilità di conservare intatta la capacità di funzionamento anche se alcune unità di processamento si rendono inutilizzabili. Memoria associativa è dunque la capacità che possiede una rete neurale di riprodurre correttamente un modello partendo da caratteristiche parziali (degradate o incomplete) del modello stesso ricevute come input.

Successivamente si descriverà un trigger per selezionare particelle contenenti il quark **b** implementato in una **NN** che riconosce i vertici secondari di un decadimento. Di questo esempio si sta sperimentando l'implementazione hardware. Il terzo esempio è costituito da una implementazione software, su un computer tradizionale (VAX/VMS), di una rete **FF** (**BP**) che impara a riconoscere

tracce formanti un certo angolo rispetto alla verticale ed il cui comportamento può quindi essere sfruttato per un trigger direzionale. L'ultimo esempio, che ha uno spiccato carattere didattico, tratta della implementazione di un calorimetro adronico a campionamento a gas, in una rete **FF (BP)** che possa riconoscere pioni e muoni.

## 2 Memorie Associative

Il primo esempio prende spunto da un argomento del tutto generale: il trigger. Un trigger è un segnale che decide se un evento è interessante o meno: in questo senso implementa una funzione binaria a più variabili (cioè i dati dei vari rivelatori in un tipico esperimento di fisica delle alte energie) in un 1 o uno 0, un "sì" o un "no".

Per dare un'idea delle caratteristiche che un trigger deve possedere al Solenoidal Superconducting Collider (**SSC**) si osservi la Fig.1 [1]. Essa schematizza le prestazioni dei tre livelli di trigger che verranno usati nell'esperimento **SDC**. In genere un trigger di primo livello deve essere molto veloce e basato su semplici caratteristiche dell'evento da considerare: energia totale, energia trasversa, momento mancante.

Solo in un secondo tempo, quando la frequenza di eventi è stata ridotta di un notevole fattore, si possono prendere in considerazione altre informazioni quali il parametro d'impatto delle tracce, la molteplicità, la molteplicità dei vertici secondari. Questi dati sono ricavabili dalla ricostruzione delle singole tracce nell'apparato. Con macchine e algoritmi tradizionali è impossibile ricostruire un evento completo in tempi dell'ordine di quello richiesto per i primi livelli di trigger. Una prestazione simile è invece probabilmente raggiungibile con le Memorie Associative (**AM**), cioè una griglia di unità operative collegate in parallelo che sfruttano una peculiarità delle reti neurali: la capacità di ricostruire modelli che si vogliono riconoscere basandosi su alcuni dei loro attributi (anche parziali). Ciò richiede una pesante ricerca in parallelo del modello che soddisfa la parziale descrizione. Dal punto di vista neurale questo significa che le sue caratteristiche attivano particolari connessioni nella rete determinando percorsi stabili di attività.

Supponiamo di avere un rivelatore formato da  $n$  piani con  $m$

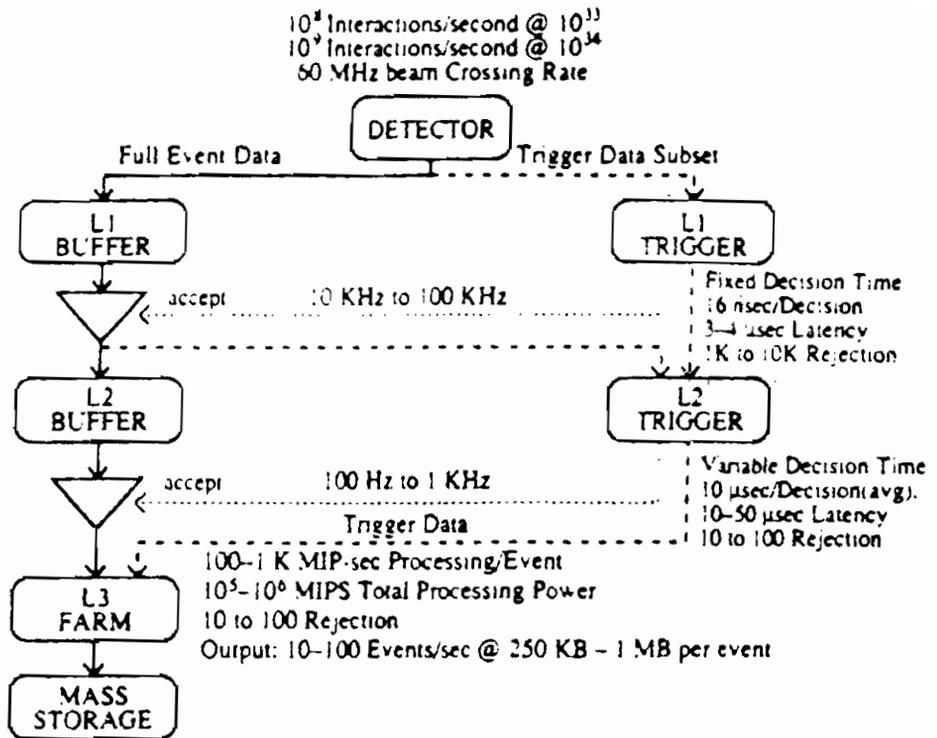


Figura 1: Rappresentazione schematica del passaggio dei dati dai rivelatori al sistema di acquisizione dati.

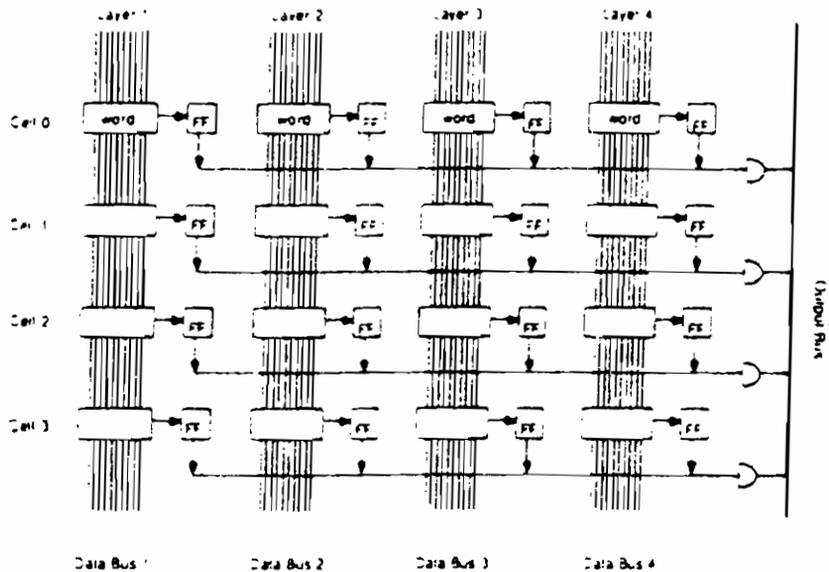


Figura 2: Architettura delle Memorie Associative.

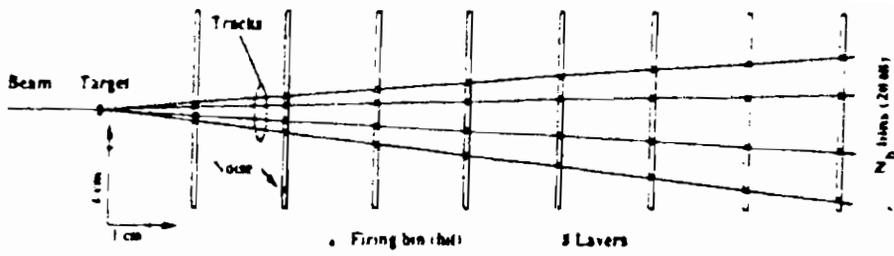


Figura 3: Rivelatore usato nella simulazione Monte Carlo.

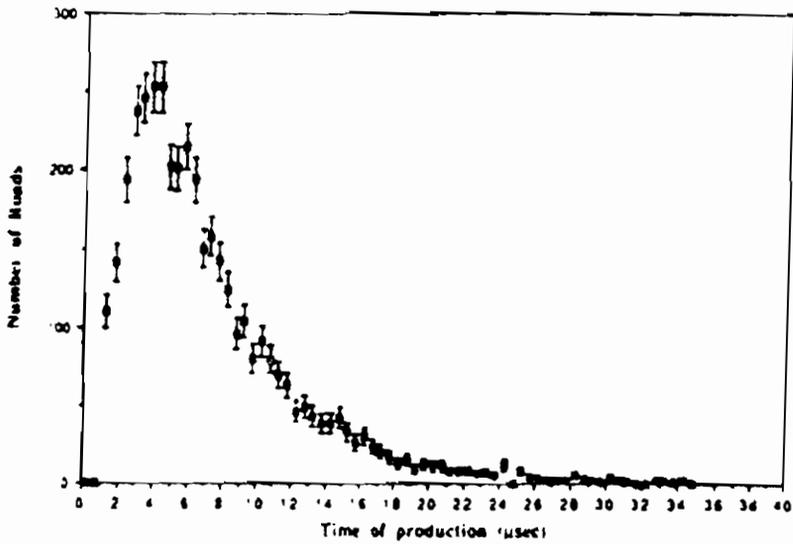


Figura 4: Tempo di uscita dell' ultima serie di tracce candidate dalle AM. Il tempo 0 corrisponde alla produzione dell' evento.

celle per piano. Una particella che lo attraversa accende una sequenza di celle per piano determinando un cammino. Si supponga inoltre che le informazioni delle celle accese siano inviate in una mappa binaria ad una architettura come quella rappresentata in Fig.2[2]. In essa ogni linea rappresenta una cella di memoria che carica più configurazioni possibili suddivise in parole. Ognuna di queste parole contiene l'indirizzo di una cella colpita nel corrispondente piano. Dei data-bus poi collegano simultaneamente ogni singola colonna, cioè tutte le possibili configurazioni in un singolo piano. Tutte le parole confrontano simultaneamente il loro contenuto, precedentemente immagazzinato, con quello presentato e se si verifica uguaglianza viene posto "alto" un flip-flop presente in ogni singola parola. In un clock tutto l'evento è passato e ogni cella che possiede tutti o parte (per tener conto delle inefficienze dei piani o del rumore) dei flip-flop nello stato "alto" costituisce, tramite gli indirizzi contenuti, una traccia candidata, perchè tutti i punti che definiscono la corrispondente configurazione sono presenti anche nell'evento.

Si osservi che questo tipo di comportamento risolve in tempo reale tutti i problemi combinatoriali che approcci tradizionali invece conservano e che sono dispendiosi dal punto di vista del tempo di calcolo di una macchina. Una architettura di questo tipo è implementata in un chip (**AM** chip) sviluppato da un gruppo dell'Università di Pisa e il cui comportamento è stato studiato simulando un esperimento a bersaglio fisso facente uso di 8 camere per il tracciamento con 2048 celle per piano (Fig.3)[3].

L'utilizzo di questo chip, unitamente ad un particolare algoritmo di ricerca implementato in una macchina tradizionale [4][5], ha dato notevoli risultati. Essi si possono riassumere nelle Fig.4-6.

Nella prima viene istogrammato lo spettro che corrisponde al tempo di uscita dell'ultima serie di tracce candidate (dovute al combinatorio ed alla risoluzione dello spettrometro) dalla Memoria Associativa; il peso di istogrammazione è dato dal numero totale di configurazioni possibili. La Fig.5 rappresenta lo stesso tipo di grafico ma riferito al numero di tracce ricostruite dalle 8 macchine sequenziali (Tree Search Processor **TSP**), poste in parallelo, con l'algoritmo di ricerca ad albero accennato.

Si osservi dalla Fig.4 che la maggior parte del calcolo combinatorio è risolto in 4-6  $\mu\text{sec}$ . La Fig.6 infine mostra come il tempo

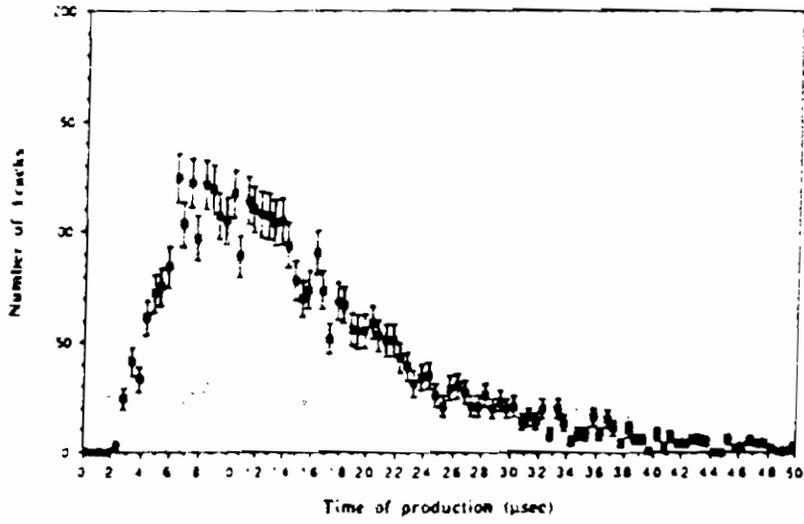


Figura 5: Tempo di uscita dell' ultima traccia ricostruita dalle TSP.

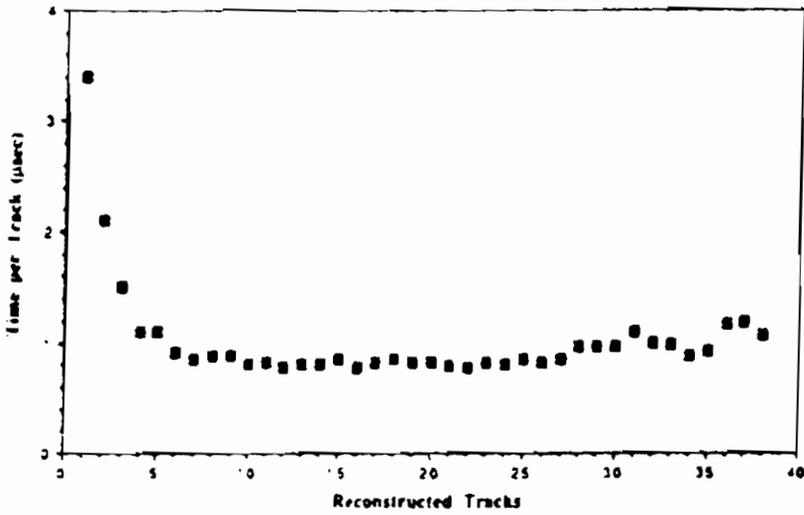


Figura 6: Tempo medio per traccia verso il numero di tracce ricostruite.

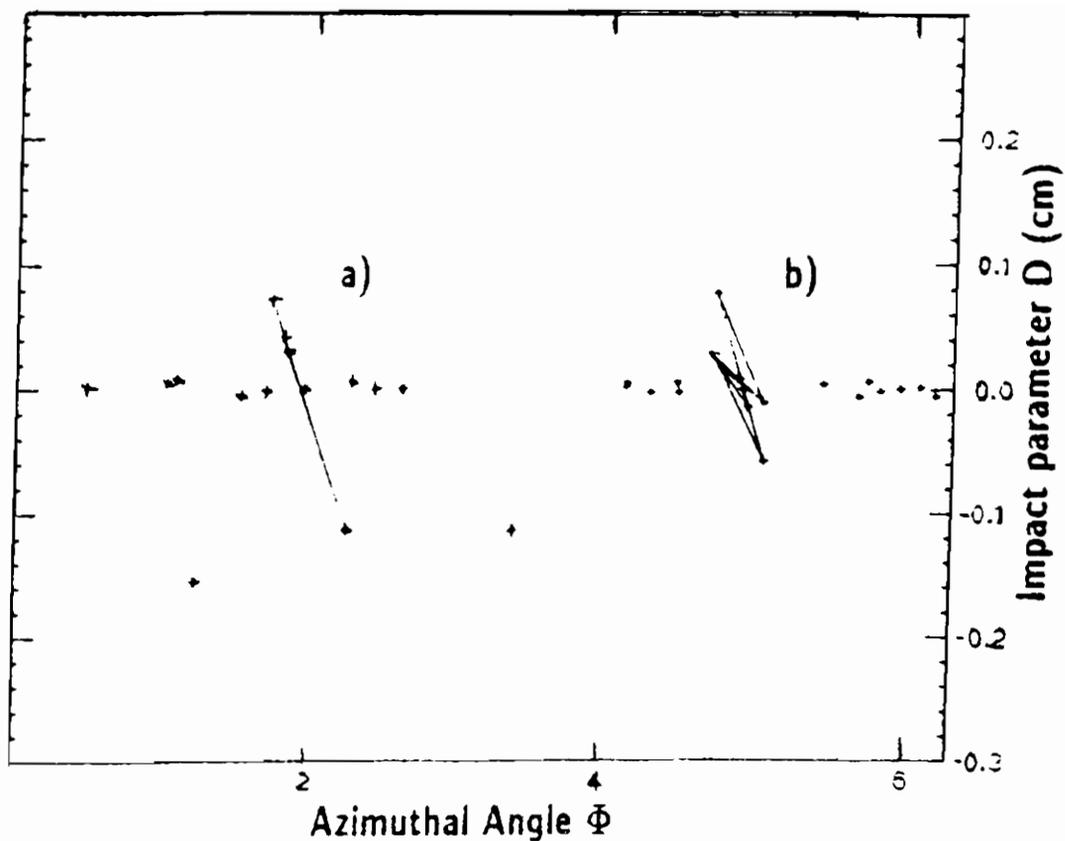


Figura 7: Parametrizzazione delle tracce nel piano  $D-\phi$ . Le tracce appaiono come punti in questo spazio; quelle provenienti dal vertice primario si raggruppano attorno al valore  $D=0$ .

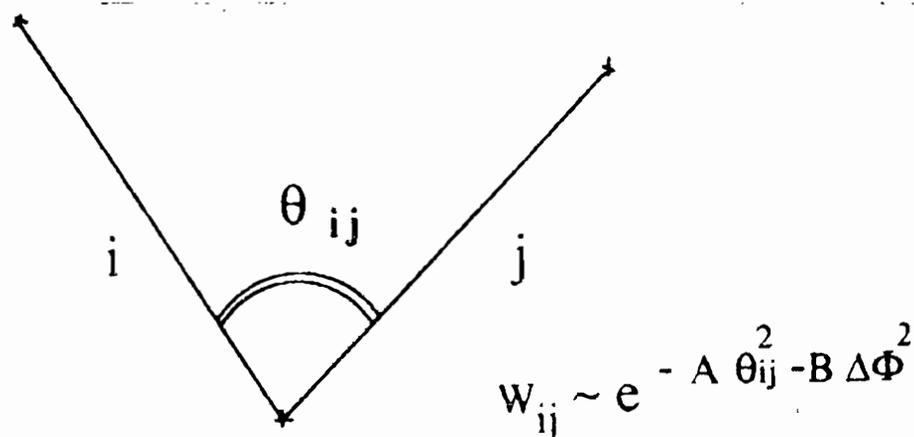


Figura 8: Descrizione geometrica della funzione peso con cui i neuroni si rinforzano reciprocamente.

Consideriamo allora la Fig.7[6]. Nel piano  $\mathbf{D}-\phi$  ogni traccia appare come un punto: quelle provenienti dal vertice primario giacciono su una linea orizzontale intorno a  $\mathbf{D} = 0$ . Tracce provenienti da un vertice secondario si dispongono invece su una linea ad un certo angolo con l'orizzontale. La tangente di tale angolo è proporzionale alla distanza del vertice dal primario. Ad ogni coppia di tracce (punti) si associa un neurone. I neuroni si rinforzano l'un l'altro (vd Fig.8) con un peso

$$W_{ij} \sim e^{-A\theta_{ij}^2 - B\Delta\phi^2} \quad A, B > 0.$$

Questa funzione favorisce segmenti di retta che giacciono lungo la stessa direzione e quindi dal punto di vista topologico tutte le tracce appartenenti allo stesso vertice secondario. La Fig.7a e la Fig.7b mostrano due eventi simulati. Nella Fig.7b si osservi come la rete riconosca anche le tracce provenienti dai vertici secondari di decadimento del charm (In questo caso particelle contenenti charm costituiscono il fondo del segnale).

Con una richiesta di trigger di almeno due neuroni "on" alla fine dell'evoluzione una tale rete è al momento in corso di test nell'esperimento CDF a Fermilab.

Le simulazioni di tale trigger sono state eseguite con il programma montecarlo **ISAJET** generando eventi  $b\bar{b}$ , con un fondo di jets provenienti da quarks più leggeri. Esse hanno fornito un'efficienza dell'ordine di 70% - 80% secondo il taglio in momento trasverso con un'accettazione trascurabile del fondo.

## 4 Un esempio di simulazione: Trigger di puntamento

Si consideri un telescopio di rivelatori formato da 4 piani ognuno dei quali di 33 celle da 3 cm (Fig.9)[7].

Quando una particella attraversa il rivelatore accende una cella per piano determinando così un segmento di retta avente un certo angolo con la verticale. L'esempio seguente riguarda la simulazione software, su una macchina VAX/VMS, di una rete **FF (BP)** che impara a riconoscere tracce generate in un rivelatore ideale (Fig.9) e con direzione definita rispetto alla verticale.



La configurazione di rete che ha fornito i migliori risultati è stata di 3 strati con 132 neuroni nello strato di input, 50 nello strato nascosto ed 1 neurone di output (132x50X1).

Percorriamo brevemente lo schema generale di implementazione software di una rete neurale applicando via via le considerazioni al caso specifico.

## 4.1 Le classi

Occorre innanzitutto scegliere le classi di configurazioni che si intendono far riconoscere alla rete. In questo esempio, per comodità, sono state scelte la classe delle tracce "a 45°" (rispetto la verticale) e quella complementare delle tracce "non a 45°".

Si osservi che è necessario presentare alla rete entrambe le configurazioni che si vogliono classificare.

## 4.2 I "pattern"

A questo punto è bene chiedersi in quale modo si presenteranno alla rete le varie configurazioni: in generale questo viene fatto attraverso una sequenza di file ognuno contenente un certo numero di esempi. Nel caso specifico una singola configurazione è generata da una matrice 33x4 che codifica i piani del rivelatore e le celle colpite in una serie di 1 e 0 (Fig.10).

Occorre sottolineare che le informazioni di input alla rete non subiscono in questo caso alcun precedente processamento permettendo così un tempo di risposta molto breve a vantaggio della velocizzazione dell'intero processo che può essere implementato in un trigger.

## 4.3 Il learning

Una volta stabiliti il numero totale di neuroni, connessioni e strati comincia la fase di apprendimento della rete.

Si osservi comunque, come già precedentemente sottolineato, che la scelta del numero di strati e di neuroni per strato non è banale e quest'ultimo viene ottimizzato attraverso numerose simulazioni. Nell'esempio considerato sono state simulate 8 architetture (2 reti

Input	I hidden layer	II hidden layer	Output layer	N of Connections
132	7	3	1	948
32	0		1	1330
132	40	10	1	5690
32	50		1	1980
132	50	20	1	12190
132	100	30	1	16230
132	132	20	1	20084
132	132	50	1	24074

Tabella 1: Struttura delle 8 architetture usate nella simulazione.

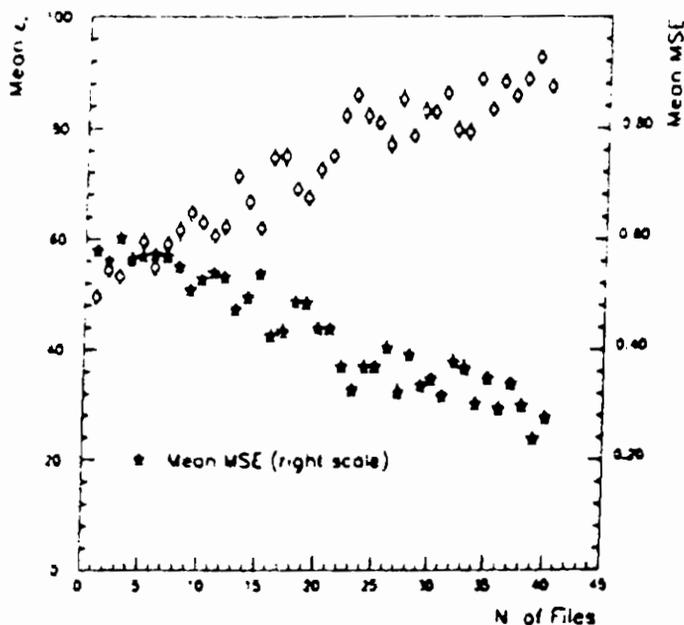


Figura 11: Curva di efficienza di apprendimento e dell'errore quadratico medio in funzione del numero di files per la rete 132x50x1.

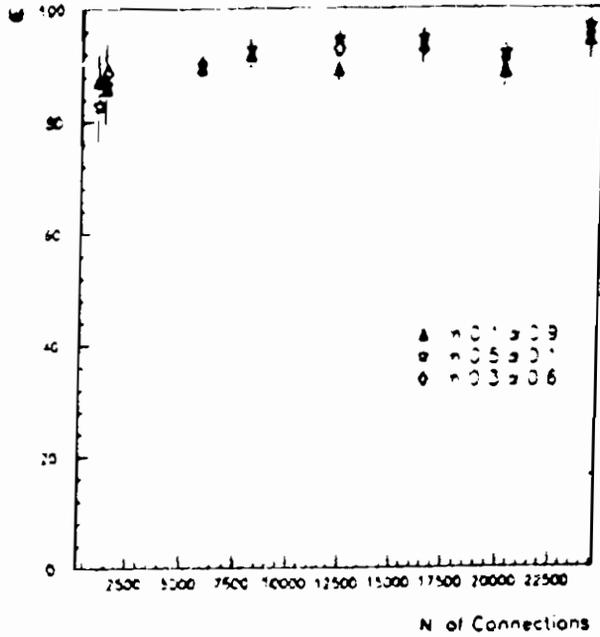


Figure 12: Curve di efficienza in fase di test per le diverse architetture e per diversi valori dei parametri. Tracce a  $45^\circ$

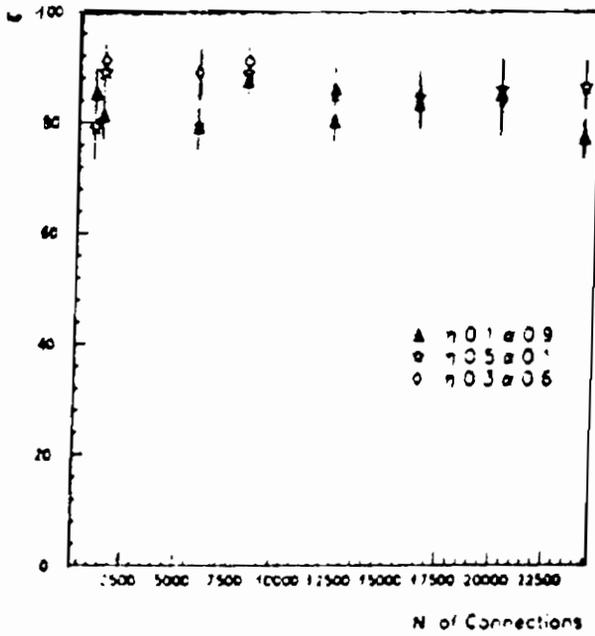


Figure 13: Curve di efficienza in fase di test per le diverse architetture e per diversi valori dei parametri. Tracce non a  $45^\circ$

a 2 strati e 6 a tre strati. vd. Tabella 1) ed i risultati che seguono si riferiscono al totale di queste 8 configurazioni, per ognuna delle quali sono state eseguite 10 simulazioni partendo da pesi diversi. (I numeri ottenuti si riferiscono alla media dei valori sulle 10 simulazioni.)

Scopo del "learning" è allora quello di configurare i pesi tra le connessioni della rete attraverso l' algoritmo di "error back propagation", presentando ad essa un certo numero di configurazioni "buone" e "non buone" con i rispettivi "target" ed in un rapporto dettato anch' esso dall'esperienza.

Nel caso specifico la generazione è costituita da 800 configurazioni con tracce doppie parallele a  $\pm 45^\circ$  e 800 con 1 ÷ 3 tracce "non" a  $45^\circ$  organizzate in 40 file con 40 configurazioni per file in un rapporto 1:1. Si osservi ulteriormente che il presentare tracce doppie a  $\pm 45^\circ$  introduce nella rete il concetto di parallelismo permettendo una generalizzazione dell' apprendimento. Nella fase successiva all' apprendimento vengono presentate alle reti configurazioni di tracce mai viste in precedenza: in questa fase di test si controlla l' efficienza della rete e la capacità di generalizzazione. Per la fase di test sono state usate 60 configurazioni di tracce singole a  $\pm 45^\circ$  e 300 configurazioni complementari.

Le curve di Fig.11 mostrano l' efficienza di apprendimento in funzione del numero di file ed il valore dell' errore quadratico medio per la rete che ha ottenuto il migliore comportamento. Esse mostrano che dopo circa 400 configurazioni la rete comincia ad apprendere le successive con una efficienza superiore al 75%.

Le fig.12-13 si riferiscono invece alla fase di test e rappresentano l'efficienza mediata su 10 simulazioni in funzione del numero di connessioni per tutte le 8 architetture. Per ognuna di queste inoltre sono stati variati i valori di learning rate e di momento. L' ultimo punto si riferisce alla architettura 132x50x1 che corrisponde a 24074 connessioni. In particolare la Fig.12 si riferisce alla classe delle tracce a  $\pm 45^\circ$ ; la fig.13 alla classe ad essa complementare. Si osservi come in entrambi i casi tutte le reti provate abbiano una buona efficienza ed in particolare per i valori di learning rate e momento rispettivamente di 0.5 e 0.1.

La fig.14, infine, mostra quale sia la bontà dell' apprendimento in funzione del numero di connessioni nella rete: per tutte le 8 architetture viene istogrammato il numero di cicli medi impiegati

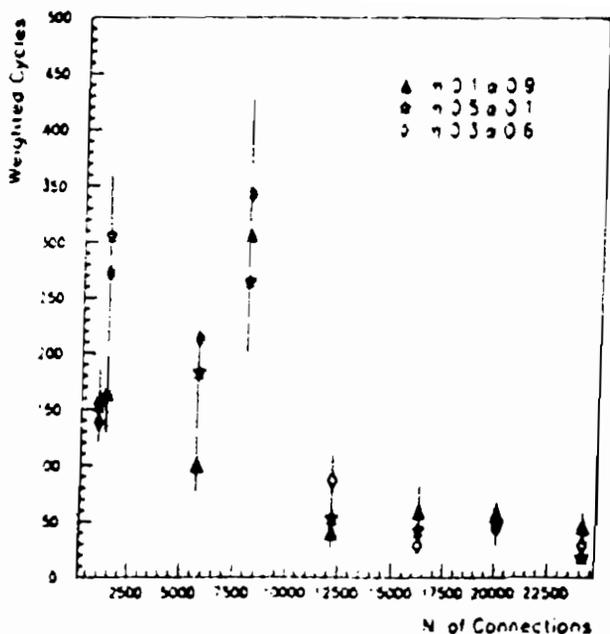


Figura 14: Numero di cicli medi impiegati per l'apprendimento in funzione del numero di connessioni e per diversi valori dei parametri della rete.

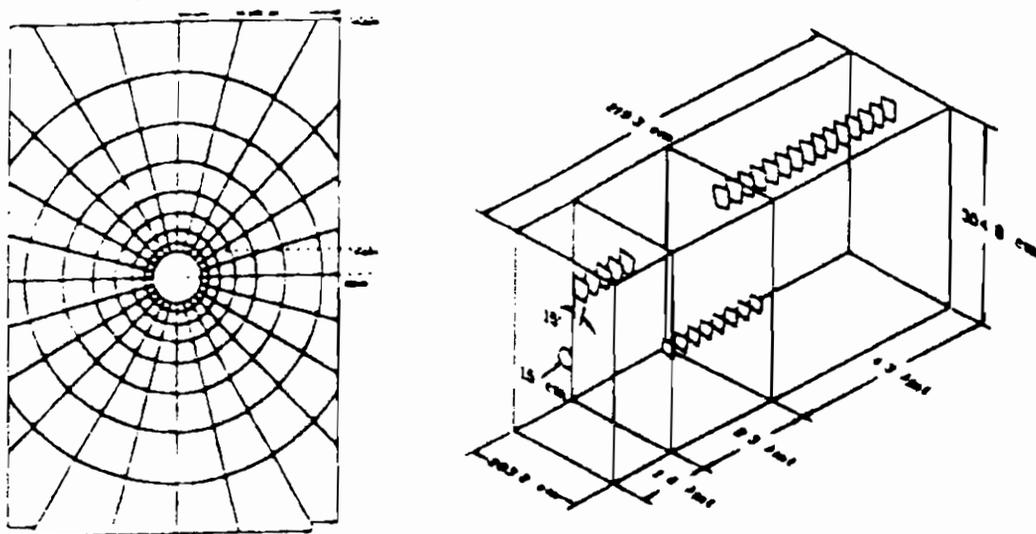


Figura 15: Vista frontale del calorimetro adronico di E687 e struttura a torri di lettura.

durante l' apprendimento in funzione del numero di connessioni. La rete cioè impara più velocemente se l' informazione introdotta può essere distribuita lungo il massimo numero di connessioni tra le unità di elaborazione e, a parità di numero di neuroni, in più strati. A questo riguardo si osservino infatti i due picchi che corrispondono alle due architetture che usano 2 strati di neuroni.

## 5 Applicazione alla calorimetria

La calorimetria offre un campo molto interessante per l' applicazione delle reti neurali: il funzionamento stesso dei calorimetri elettromagnetici e adronici si basa su una classificazione delle particelle in relazione alle ampiezze dei segnali (energia rilasciata) e sulla forma degli sciami generati da queste nell' interazione con la parte non sensibile del detector. È allora opportuno chiedersi se una data rete neurale possa operare la stessa classificazione. La risposta è positiva e la difficoltà di realizzazione dipende dalla configurazione del calorimetro nel quale si vuole implementare la rete e dalla scelta dei parametri significativi da fornire alla stessa. Ci chiediamo però se sia possibile costruire una rete che riesca a identificare determinate particelle basandosi solo sulla topologia dell' evento che queste "disegnano" sugli elementi di un calorimetro. Il problema allora si identifica nel riconoscimento di immagini una volta che l' evento è stato visualizzato.

L' esempio che segue si riferisce ad un calorimetro adronico di un esperimento a bersaglio fisso[8]. Si tratta di un calorimetro a campionamento a gas con piani sensibili nei quali la lettura del segnale viene eseguita tramite induzione capacitiva su delle regioni (pad) di varie dimensioni configurate in una geometria cilindrica come mostrato in Fig.15. Dal punto di vista della lettura, quindi, il calorimetro è diviso in tre sezioni ognuna delle quali composta da 8 anelli e 24 torri. Ogni singola torre è formata dal segnale di .OR. proveniente dal primo pad e da quelli omologhi ad esso successivi ed in numero dipendente dalla sezione ( 5 per la prima sezione, 8 per la seconda e 15 per la terza). Quando una particella incide sul calorimetro rilascia tutta o parte della propria energia generando un segnale indotto su uno o più pad. Se questi segnali superano una certa soglia predeterminata si dice che la torre corrispondente è

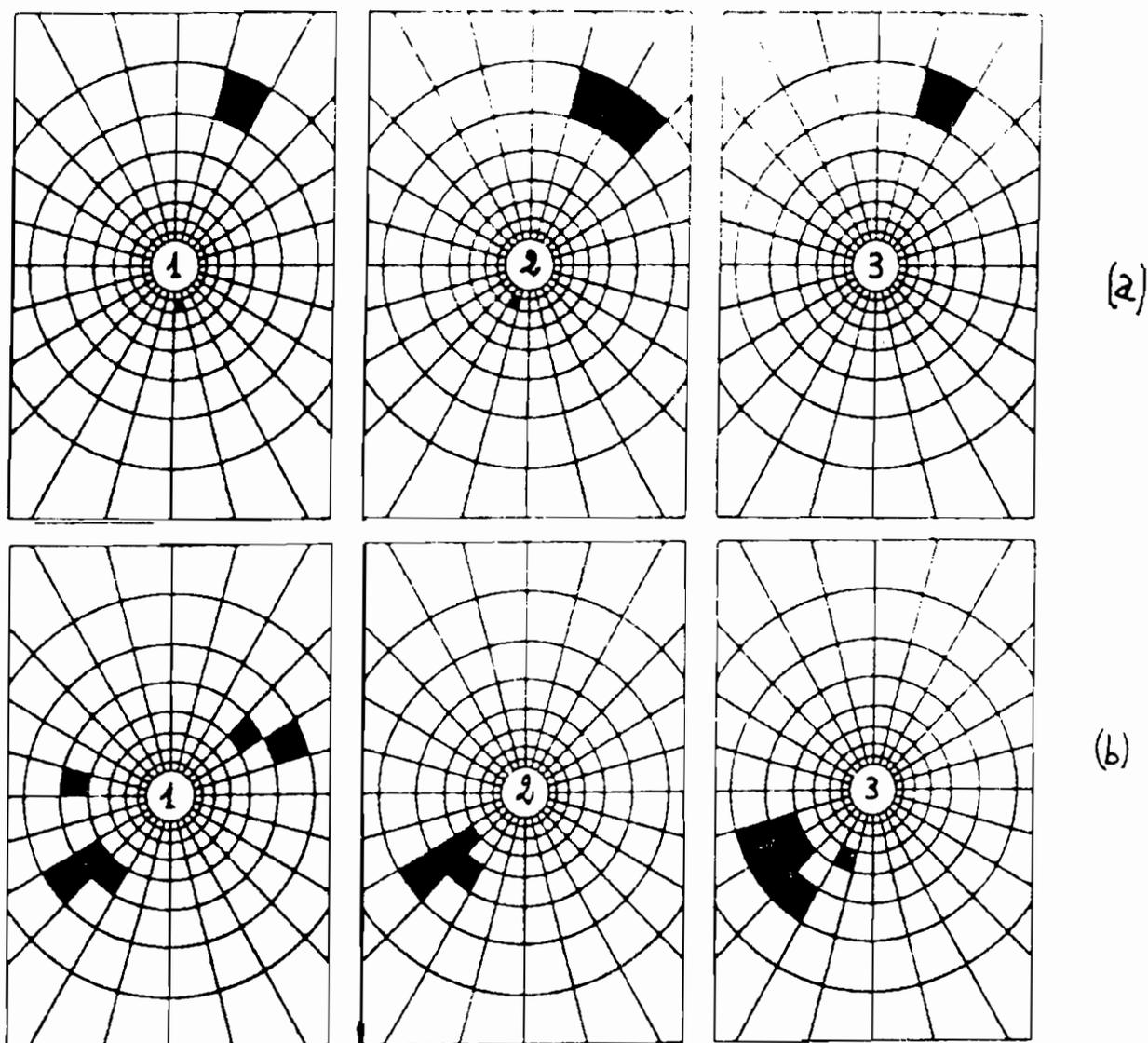


Figura 16: Sezioni del calorimetro adronico di E687. Nella (a) un muone arriva in alto a destra sulla faccia della prima sezione del calorimetro accendendo una torre e poi prosegue sulle altre due sezioni accendendo rispettivamente due torri e una torre. Nella figura (b) un pione comincia a sciamare nella parte in basso a sinistra della prima sezione e prosegue in quella direzione fino ad esaurire lo sciame nella terza sezione. Eventuali torri accese non correlate con le direzioni di incidenza sono da attribuirsi al rumore del detector.

stata "accesa". La distribuzione delle torri colpite e la loro ampiezza di segnale può quindi essere sfruttata per la determinazione della direzione e dell' energia della particella incidente.

Un muone incidente sul calorimetro rilascerà poca energia poiché interagisce scarsamente con la materia: questo corrisponde all' accensione di una torre o al massimo due torri adiacenti nelle tre sezioni (o almeno in due a seconda dell' inefficienza di rivelazione). Un adrone invece, per esempio un pione, interagendo con la parte non sensibile del calorimetro, genera uno sciame di particelle che rilasciano energia nella parte sensibile accendendo più torri contemporaneamente. Lo si può vedere nella Fig.16 dove sono mostrate le tre sezioni del calorimetro e le torri colpite rispettivamente da un muone (a) e da un pione (b).

Solamente sulla base di queste considerazioni topologiche ci proponiamo di implementare in una rete neurale il calorimetro adronico. Basta associare ad ogni torre un elemento di una matrice binaria il cui valore è 1 o 0 a seconda che essa sia stata o no colpita. Avremo così una matrice di  $24(\text{torri}) \times 8(\text{anelli}) \times 3(\text{sezioni}) = 576$  elementi che costituirà il singolo "pattern" da presentare alla rete.

Anche in questo caso viene prodotto un file di training costituito da un certo numero di pattern buoni (eventi contenenti muoni) e non buoni (eventi contenenti pioni). Gli eventi muonici sono stati presi da dati di calibrazione nei quali un largo fascio di muoni incideva sul calorimetro adronico. Quelli corrispondenti ai pioni, invece, sono costituiti da eventi di "minimum bias" cioè da dati veri presi in condizioni di minime richieste sul trigger. Il ciclo di apprendimento consiste perciò in 40 file ognuno contenente 124 pattern (specificati come sopra) di cui 62 appartenenti ad eventi muonici e 62 ad eventi con pioni.

Il comportamento della rete per varie configurazioni di architettura è molto netto nel senso che essa impara molto velocemente e solo dopo pochi cicli raggiunge efficienze prossime al 100%. La Tabella 2 si riferisce proprio al comportamento di una di queste reti (150x50x1) in fase di apprendimento.

File	It. par.	It. tot.	% Tot	% Buone	% Non buone	e.m.	m.s.e.
1	11	11	46.77	3.23	90.32	0.54609	0.64132
2	6	17	99.19	100.00	98.39	0.05293	0.11832
3	8	25	97.58	100.00	95.16	0.04272	0.12597
4	4	29	100.00	100.00	100.00	0.01711	0.04203
5	2	31	100.00	100.00	100.00	0.01441	0.03159
6	48	79	99.19	100.00	98.39	0.02033	0.09232
7	24	103	99.19	100.00	98.39	0.01762	0.09071
8	5	108	99.19	98.39	100.00	0.02503	0.09321
9	2	110	100.00	100.00	100.00	0.01457	0.05592
10	27	137	99.19	100.00	98.39	0.01886	0.09478
11	3	140	98.39	100.00	96.77	0.02197	0.08730
12	2	142	100.00	100.00	100.00	0.00755	0.03338
13	2	144	100.00	100.00	100.00	0.01183	0.03041
14	1	145	100.00	100.00	100.00	0.00390	0.00820
15	2	147	100.00	100.00	100.00	0.00613	0.02126
16	3	150	100.00	100.00	100.00	0.00638	0.03093
17	2	152	100.00	100.00	100.00	0.00430	0.02604
18	3	155	98.39	96.77	100.00	0.01788	0.09734
19	2	157	100.00	100.00	100.00	0.00241	0.01045
20	4	161	99.19	100.00	98.39	0.01395	0.08763
21	2	163	100.00	100.00	100.00	0.00684	0.02303
22	1	164	100.00	100.00	100.00	0.00368	0.01114
23	1	165	100.00	100.00	100.00	0.00398	0.01100
24	2	167	100.00	100.00	100.00	0.00569	0.03985
25	2	169	100.00	100.00	100.00	0.01069	0.04516
26	1	170	100.00	100.00	100.00	0.00136	0.00306
27	4	174	100.00	100.00	100.00	0.00464	0.02250
28	3	177	99.19	100.00	98.39	0.01177	0.08119
29	2	179	100.00	100.00	100.00	0.00309	0.01187
30	4	183	99.19	98.39	100.00	0.01106	0.08031
31	2	185	100.00	100.00	100.00	0.00343	0.01314
32	2	187	99.19	100.00	98.39	0.01006	0.07710
33	2	189	99.19	98.39	100.00	0.00771	0.05183
34	1	190	100.00	100.00	100.00	0.00294	0.00879
35	3	193	99.19	100.00	98.39	0.00928	0.07366
36	2	195	100.00	100.00	100.00	0.00382	0.01402
37	3	198	99.19	100.00	98.39	0.01193	0.06228
38	10	208	99.19	100.00	98.39	0.01318	0.08834
39	1	209	100.00	100.00	100.00	0.00448	0.01013
40	3	212	100.00	100.00	100.00	0.01067	0.03964

Tabella 2: Tabella di apprendimento per la rete 132X50X1. Nella prima colonna vi è il numero sdi files usati nella fase di learning (vd. testo). La seconda e la terza colonna si riferiscono al numero di iterazioni parziali e totali fatte dalla rete prima della convergenza. Nella quarta colonna è calcolata la percentuale media di efficienza di risposta tra le classi buone e non buone, le cui singole percentuali sono riportate nella quinta e sesta colonna. Le ultime due colonne si riferiscono rispettivamente all' errore medio ed all'errore quadratico medio.

## 6 Conclusioni

Malgrado le applicazioni delle reti neurali nella fisica delle alte energie siano abbastanza recenti l'interesse verso questo campo è cresciuto molto velocemente: da un lato la progettazione di nuovi Collider impone nuove tecniche per il processamento dei dati e più stringenti richieste di trigger, dall'altro le reti neurali possono venire impiegate come mezzo di analisi off-line in contrapposizione, e talvolta con migliori risultati, alle tecniche standard. L'implementazione hardware di tali oggetti è ancora in fase di sperimentazione e le previsioni per un normale utilizzo sono più che giustificate. Per contro la letteratura mostra un vasto esempio di implementazione software su computer tradizionali o dedicati. Per le loro proprietà intrinseche esse vengono spesso utilizzate nella risoluzione di problemi concernenti la classificazione e l'ottimizzazione di pattern (tracce, cluster di oggetti ecc.) e la configurazione adatta viene scelta in base a ripetute prove di simulazione. Non esistono pertanto procedure standardizzate essendo ogni problema specifico nelle informazioni di input.

# Appendice

- 1 B QUARK TAGGING USING NEURAL NETWORKS AND MULTIVARIATE STATISTICAL METHODS: A COMPARISON OF BOTH TECHNIQUES. By K.H. Becks, F. Block, J. Drees, P. Langefeld, F. Seidel (Wuppertal U.), WU-B-93-4, Jan 1993. 20pp. Submitted to Nucl.Instrum.Meth.A (Fermilab Library No.: WU-B-93-4)
- 2 HEAVY FLAVOR DISCRIMINATION BY NEURAL NETWORKS. By R. Odorico (Bologna U. & INFN, Bologna), DFUB-92-22, Oct 1992. 8pp. Nuclear Science Symposium, Orlando, FL, 26-31 Oct 1992. (Fermilab Library No.: DFUB-92-22)
- 3 NEURAL NETWORKS IN HIGH-ENERGY PHYSICS. By Carsten Peterson (Lund U.), LUTP-92-23, Nov 1992. 19pp. Plenary talk presented at 10th International Conference on Computing in High Energy Physics (CHEP 92), Annecy, France, 21-25 Sept 1992.
- 4 BOTTOM JET RECOGNITION BY NEURAL NETWORKS AND STATISTICAL DISCRIMINANTS: A SURVEY. By P. Massanti, R. Odorico (Bologna U. & INFN, Bologna), DFUB-92-15, n.d. (recd Jan 1993) 30pp. (Fermilab Library No.: DFUB-92-15)
- 5 A STUDY OF THE INTEL ETANN VLSI NEURAL NETWORK FOR AN ELECTRON ISOLATION TRIGGER. By Clark S. Lindsey, Bruce Denby (Fermilab), FERMILAB-TM-1798, Oct 1992. 25pp. (Fermilab Library No.: FERMILAB-TM-1798)
- 6 NEURAL NETWORKS AT THE TEVATRON. By B. Denby (Fermilab), W. Badgett, S. Bianchin, K. Burkett, M.K. Campbell, A. Caner, M. Dall'Agata, M. DeNardi, H. Haggerty, K. Johns, C.S. Lindsey, M. Dickson, G. Pauletta, L. Santi, L. Stanco, N. Wainer, D.Y. Wu, J.L. Wyss (Michigan U. & Udine U. & Fermilab & Arizona U. & Rochester U. & INFN, Padua), FERMILAB-CONF-92-269-E, Oct 1992. 4pp. To be published in the proceedings of 10th International Conference on Computing in High Energy Physics (CHEP 92), Annecy, France, 21-25 Sept 1992. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-92-269-E)
- 7 DRIFT CHAMBER TRACKING WITH NEURAL NETWORKS. By Clark S. Lindsey, Bruce Denby, Herman Haggerty (Fermilab), FERMILAB-CONF-92-283, Oct 1992. 9pp. Contributed to Nuclear Science Symposium, Orlando, FL, 26-31 Oct 1992. Submitted to IEEE Trans. Nucl. Sci. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-92-283)
- 8 CLASSIFICATION OF THE HADRONIC DECAYS OF THE Z0 INTO B AND C QUARK PAIRS USING A NEURAL NETWORK. By DELPHI Collaboration (P. Abreu, et al.), CERN-PPE-92-151, Sep 1992. 17pp. Published in Phys.Lett.B295:383-395,1992. (Fermilab Library No.: CERN-PPE-92-151)

- 9 USING NEURAL NETWORKS FOR THE CLASSIFICATION OF THE DECAYS OF THE Z<sup>0</sup> BOSON. By G. Cosmo, A. De Angelis (Udine U. & INFN, Trieste), P. Eerola, J. Kalkkinen (Helsinki U.), L. Lyons (Oxford U., NPL), N. de Groot, M. Los (NIKHEF, Amsterdam), UDINE-92-09-AA, Sep 1992. 5pp. Presented at 10th International Conference on Computing in High Energy Physics (CHEP 92), Anecy, France, 21-25 Sept 1992. (Fermilab Library No.: UDINE-92-09-AA)
- 10 SIMULATION OF NEURAL NETWORKS AND TEST OF THE Z CHAMBER TRIGGER AT THE H1 DETECTOR. (IN GERMAN). By L. Larsson (Hamburg U.), 1992. Hamburg DESY - Internal Rep. FH1T-92-03 (92/07,rec.Jul.) 102 p.
- 11 RECOGNITION OF DECAYS OF CHARGED TRACKS WITH NEURAL NETWORK TECHNIQUES. By G. Stimpf- Abele (Clermont-Ferrand U.), 1991. Comput. Phys. Commun. 67 (1991) 183-192.
- 12 IDENTIFICATION OF TAU DECAYS USING A NEURAL NETWORK. By V. Innocente (CERN & INFN, Naples), Y.F. Wang (INFN, Florence & Florence U.), Z.P. Zhang (World Lab, Lausanne & Hefei, CUST), CERN-PPE-92-098, Jun 1992. 28pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A323:647-656,1992. (Fermilab Library No.: CERN-PPE-92-098)
- 13 TUTORIAL ON NEURAL NETWORK APPLI- CATIONS IN HIGH-ENERGY PHYSICS: A 1992 PERSPEC- TIVE. By Bruce Denby (Fermi- lab), FERMILAB-CONF-92-121- E, Apr 1992. 39pp. Invited tuto- rial to be publ. in Proc. of 2nd Int. Workshop on Software Engi- neering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics, La Londe- les-Maures, France, Jan 13-18, 1992. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-92-121-E)
- 14 A NEURAL NETWORK FOR E / PI CLASSIFICATION IN A CALORIMETER. By P. Gar- latti Costa, A. De Angelis, L. Lanceri, L. Santi, C. Vignadusso, E. Zoppolato (Udine U. & INFN, Trieste), INFN-AE-92-14B, Apr 1992. 6pp. (Fermilab Library No.: INFN-AE-92-14B)
- 15 CLASSIFICATION OF JETS FROM P ANTI-P COLLISIONS AT TEVATRON ENERGIES. By S. Bianchin, Denardi (Udine U. & INFN, Trieste), B. Denby (Fermi- lab), M. Dickson (Rochester U.), G. Pauletta, L. Santi (Udine U. & INFN, Trieste), N. Wainer (Fer- milab), INFN-AE-92-14C, Apr 1992. 6pp. (Fermilab Library No.: INFN-AE-92-14C)
- 16 DELPHI RESULTS ON THE MEASUREMENT OF THE PARTIAL HADRONIC WIDTHS OF THE Z<sup>0</sup> USING NEURAL NETWORKS. By G. Cosmo, A. De Angelis, A. Li- nussio (Udine U. & INFN, Tri- este), P. Eerola, J. Kalkkinen (Helsinki U.), INFN-AE-92-14A, Apr 1992. 6pp. (Fermilab Li- brary No.: INFN-AE-92-14A)

- 17 NEURAL NETWORKS IN EXPERIMENTAL HIGH-ENERGY PHYSICS. By C. Bortolotto, A. De Angelis, L. Lanceri (Udine U. & INFN, Trieste), N. De Groot (NIKHEF, Amsterdam), J. Seixas (CERN), INFN-AE-92-13, Apr 1992. 32pp. Submitted to Int. J. Mod. Phys. C (Fermilab Library No.: INFN-AE-92-13)
- 18 REAL TIME PATTERN RECOGNITION WITH ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS. By G. Athanasiu (CERN & Crete U.), P. Pavlopoulos (CERN & Democritos Nuclear Research Center), S. Vlachos (Liverpool U.), CERN-PPE-92-086, Apr 1992. 12pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A324:320-329,1993. (Fermilab Library No.: CERN-PPE-92-086)
- 19 NEURAL NETWORKS IN HIGH-ENERGY PHYSICS. By Roberto Odorico (Bologna U. & INFN, Bologna), DFUB-92-8, Mar 1992. 7pp. Presented at 27th Rencontres de Moriond: QCD and High-Energy Hadronic Interactions, Les Arcs, France, Mar 22-28, 1992. (Fermilab Library No.: DFUB-92-8)
- 20 ANALOG NEURAL NETWORKS IN AN UPGRADED MUON TRIGGER FOR THE D0 DETECTOR. By Michael R. Fortner (Northern Illinois U.), FERMILAB-CONF-92-113, Apr 1992. 6pp. Presented at 2nd Int. Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High-Energy Nuclear Physics, LaLonde-les-Maures, France, Jan 13-18, 1992. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-92-113)
- 21 PARTICLE IDENTIFICATION BY CERENKOV RING IMAGING USING A NEURAL NETWORK APPROACH. By T. Francke, T. Lindblad (Siegbahn Inst. Phys., Stockholm), A. Eide (Halden, Ostfold Distrikts Hogskole), F. Pius, D. Williams (CERN), P. Martinengo (Genoa U.), R. Ribeiro (Coimbra U.), M. Suffert (Strasbourg, CRN), 1991. Nucl. Instrum. Methods A307 (1991) 47-51.
- 22 QUARK - GLUON JET SEPARATION IN THE PHOTOPRODUCTION REGION WITH A NEURAL NETWORK ALGORITHM. By Giuseppe Barbagli (Florence U.), Giulio D'Agostini, Daniela Monaldi (Rome U. & INFN, Rome), ROME-N-992-1992, Feb 1992. 8pp. To be publ. in Proc. of Workshop on Physics at HERA, Hamburg, Germany, Oct 29-30, 1991. Published in DESY HERA Workshop 1991:549-556 (QCD161:H51:1991) (Fermilab Library No.: ROME-N-992-1992)
- 23 REAL TIME TRACK FINDING IN A DRIFT CHAMBER WITH A VLSI NEURAL NETWORK. By Clark S. Lindsey, Bruce Denby, Herman Haggerty (Fermilab), Ken Johns (Arizona U.), FERMILAB-PUB-92-55, Feb 1992. 18pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A317:346-356,1992. (Fermilab Library No.: FERMILAB-PUB-92-55)
- 24 LVQNET 1.10: A PROGRAM

- FOR NEURAL NET AND STATISTICAL PATTERN RECOGNITION. By A. Cherubini, R. Odorico (Bologna U. & INFN, Bologna), DFUB-91-13, n.d. (recd Mar 1992) 26pp. (Fermilab Library No.: DFUB-91-13)
- 25 NEURAL NETWORKS FOR PATTERN RECOGNITION IN HIGH-ENERGY PHYSICS: SOME NEW RESULTS. By Carsten Peterson (Lund U.), LU-TP-92-5, Feb 1992. 12pp. Invited talk given at Image Processing for Future High-Energy Physics Detectors Workshop, Erice, Italy, Nov 13-19, 1991.
- 26 SNAGGING THE TOP QUARK WITH A NEURAL NET. By Howard Baer (Florida State U.), Debra Dsiolo Karatas, Gian F. Giudice (Texas U.), FSU-HEP-911130, Nov 1991. 16pp. Published in Phys.Rev.D46:4901-4906,1992. (Fermilab Library No.: FSU-HEP-911130)
- 27 CALORIMETER TRIGGER APPLICATIONS, TRAINING, AND ASSESSMENT OF A FEED FORWARD NEURAL NET. By D.Y Wu, M.K. Campbell (Michigan U. & SSCL), UMHE-91-38, Oct 1991. 31pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A317:323-334,1992. (Fermilab Library No.: UMHE-91-38)
- 28 TRACKING AND VERTEX FINDING WITH DRIFT CHAMBERS AND NEURAL NETWORKS. By Clark S. Lindsey (Fermilab), FERMILAB-CONF-91-241, Sep 1991. 15pp.
- Presented at Workshop on Neural Networks: From Biology to High Energy Physics, La Biodola, Italy, Jun 5-14, 1991. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-91-241)
- 29 PATTERN RECOGNITION IN HIGH-ENERGY PHYSICS WITH ARTIFICIAL NEURAL NETWORKS: JETNET 2.0. By Leif Lonnblad, Carsten Peterson, Thorsteinn Rognvaldsson (Lund U.), LU-TP-91-18, Aug 1991. 24pp. Comput. Phys. Commun. 70 (1992) 167-182 and Lund Univ. - LU TP 91-18 (91/08,rec.Oct.) 24 p. (Fermilab Library No.: LU-TP-91-18)
- 30 NEURAL NETWORK TRIGGER ALGORITHMS FOR HEAVY QUARK EVENT SELECTION IN A FIXED TARGET HIGH-ENERGY PHYSICS EXPERIMENT. By L. Gupta, A.M. Upadhye (Southern Illinois U., Carbondale), B. Denby (Fermilab), S.R. Amendolia, G. Grieco (Sassari U. & INFN, Pisa), FERMILAB-PUB-91-117, May 1991. 27pp. Submitted to Pattern Recognition (Fermilab Library No.: FERMILAB-PUB-91-117)
- 31 IMPROVING THE CERENKOV IMAGING TECHNIQUE WITH NEURAL NETWORKS. By R.A. Vasques, F. Halsen, E. Zas (Wisconsin U., Madison), MAD-PH-654, May 1991. 24pp. Published in Phys.Rev.D45:356-361,1992. (Fermilab Library No.: MAD-PH-654)
- 32 USING NEURAL NETWORKS WITH JET SHAPES TO IDEN-

- TIFY B JETS IN E+ E- INTERACTIONS. By L. Bellantoni, J.S. Conway, J.E. Jacobsen, Y.B. Pan, Sau Lan Wu (Wisconsin U., Madison), CERN-PPE-91-80, May 1991. 17pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A310:618-622,1991. (Fermilab Library No.: CERN-PPE-91-80)
- 33 VISUAL LIKE DETECTOR WITH NEURAL ELECTRONICS: A CONCEPTUAL STUDY OF DETECTOR ELECTRONICS FOR 200-TEV COLLIDER. By Jing Shen (Beijing, Inst. High Energy Phys.), Song Shen (Beijing, Inst. Data Processing), 1990. Beijing Inst. High Energy Phys. - BIHEP-DE-90-13 (90/10) 3 p.
- 34 COMBINED NEURAL NETWORK QCD CLASSIFIER FOR QUARK AND GLUON JET SEPARATION. By I. Csabai, F. Csako (Eotvos U.), Z. Fodor (CERN), CERN-TH-6038-91, Mar 1991. 26pp. Published in Nucl.Phys.B374:288-308,1992. (Fermilab Library No.: CERN-TH-6038-91)
- 35 THE USE OF NEURAL NETWORKS IN THE D0 DATA ACQUISITION SYSTEM. By D. Cutts, J.S. Hoftun, A. Sornborger (Brown U.), R.V. Astur (Michigan State U.), C.R. Johnson, R.T. Zeller, 1989. IEEE Trans. Nucl. Sci. 36 (1989) 1490-1493. (see Conference Index).
- 36 NEURAL NETWORKS FOR EVENT FILTERING AT D0. By D. Cutts, J.S. Hoftun, A. Sornborger (Brown U.), C.R. Johnson, R.T. Zeller (ZRL, Cranston), 1989. Comput. Phys. Commun. 57 (1989) 478-482. (see Conference Index).
- 37 QUARK AND GLUON JET SEPARATION USING NEURAL NETWORKS. By I. Csabai, F. Csako, Z. Fodor (Eotvos U.), ITP-477-BUDAPEST, Nov 1990. 15pp. Published in Phys.REv.D44:B267:1905-1908,1991.
- 38 PRIMARY VERTEX FINDING IN PROTON - ANTI-PROTON EVENTS WITH A NEURAL NETWORK SIMULATION. By Clark S. Lindsey, Bruce Denby (Fermilab), FERMILAB-PUB-90-192, Sep 1990. 25pp. Published in Nucl.Instrum.Meth.A302:217-226,1991. (Fermilab Library No.: FERMILAB-PUB-90-192)
- 39 DATA PROCESSING AT THE SSC WITH STRUCTURED NEURAL NETS. By Klaus S. Lackner, Vernon D. Sandberg, David H. Sharp (Los Alamos), LA-UR-90-3774, Oct 1990. 4pp. Presented at Symp. on Detector Research and Development for the Superconducting Super Collider, Fort Worth, TX, Oct 15-18, 1990. Published in Fort Worth Detector Res. 1990:479-481 (QCD201:S8:1990) (Fermilab Library No.: LA-UR-90-3774)
- 40 ON THE USE OF NEURAL NETWORKS IN HIGH-ENERGY PHYSICS EXPERIMENTS. By B. Humpert (Indiana State U.), 1990. Comput. Phys. Commun. 56 (1990) 299-311.

- 41 NEURAL NETWORKS AND CALORIMETER CLUSTER RECOGNITION. By T. Altherr (Annecy, LAPP), J.C. Seixas (CERN), CERN-TH-5758-90, May 1990. 5pp. Talk Presented at the International Workshop on Software Engineering, Artificial Intelligence and Expert Systems for High Energy and Nuclear Physics, Lyons, France, Mar 19-24, 1990. Published in Lyon Software Eng. 1990:511-516 (QC45:I5:1990) (Fermilab Library No.: CERN-TH-5758/90) (Pisa, Scuola Normale Superiore), FERMILAB-CONF-90/20, Jan 1990. 7pp. Invited talk given at 1989 IEEE Nuclear Science Symposium, San Francisco, CA, Jan 15-19, 1990. IEEE Trans. Nucl. Sci. 37 (1990) No. 2 248-254 and Fermilab Batavia - FERMILAB-Conf-90-020 (90,rec.Apr.) 7 p. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-90/20)
- 42 USING NEURAL NETWORKS TO IDENTIFY JETS. By Leif Lonnblad, Carsten Peterson, Thorsteinn Rognvaldsson (Lund U.), LU-TP-90-8, May 1990. 29pp. Published in Nucl.Phys.B349:675-702,1991. (Fermilab Library No.: LU-TP-90-8)
- 43 TESTS OF TRACK SEGMENT AND VERTEX FINDING WITH NEURAL NETWORKS. By Bruce Denby, Eliane Lessner (Fermilab), Clark S. Lindsey (Iowa State U.), FERMILAB-CONF-90/68, Apr 1990. 8pp. Presented at 8th Conf. on Computing in High Energy Physics, Santa Fe, NM, Apr 9-13, 1990. Published in Santa Fe Computing 1990:211-220 (QCD201:T5:1990) (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-90/68)
- 44 NEURAL NETWORKS FOR TRIGGERING. By B. Denby (Fermilab), M. Campbell (Michigan U.), F. Bedeschi (INFN, Pisa), N. Chriss, C. Bowers (Chicago U.), F. Nesti (Pisa, Scuola Normale Superiore), FERMILAB-CONF-90/20, Jan 1990. 7pp. Invited talk given at 1989 IEEE Nuclear Science Symposium, San Francisco, CA, Jan 15-19, 1990. IEEE Trans. Nucl. Sci. 37 (1990) No. 2 248-254 and Fermilab Batavia - FERMILAB-Conf-90-020 (90,rec.Apr.) 7 p. (Fermilab Library No.: FERMILAB-CONF-90/20)
- 45 FINDING GLUON JETS WITH A NEURAL TRIGGER. By Leif Lonnblad, Carsten Peterson, Thorsteinn Rognvaldsson (Lund U.), LU-TP-90-3, Mar 1990. 8pp. Published in Phys.Rev.Lett.65:1321-1324,1990. (Fermilab Library No.: LU-TP-90-3)
- 46 NEURAL NETWORKS, DO, AND THE SSC. By C. Barter, D. Cutts, J.S. Hoftun, R.A. Partridge, A.T. Sornborger (Brown U.), C.T. Johnson, R.T. Zeller (ZRL, Cranston), DOE/ER/03130-43C-mc (microfiche), 1989. 13pp. Presented at the Workshop on Triggering and Data Acquisition for Experiments at the Supercollider, Toronto, Canada, January 1989. Published in Toronto SSC Workshop 1989:135 (QCD184:W62:1989)
- 47 SPATIAL PATTERN RECOGNITION IN A HIGH-ENERGY PARTICLE DETECTOR USING A NEURAL NETWORK ALGORITHM. By Bruce Denby (Fermilab), Stephan L. Linn (Florida State U., SCRI), FSU-SCRI-89-79, Jul 1989. 9pp. Comput. Phys. Commun. 56 (1990)

293-297 and Florida State Univ.  
Tallahassee - FSU-SCRI-89-079  
(89,rec.Aug.) 9 p. (913569).  
(Fermilab Library No.: FSU-  
SCRI-89-79)

- 48 THE USE OF NEURAL NETWORKS IN THE D0 DATA ACQUISITION SYSTEM. By David Cutts, Jan S. Hoftun, Andrew Sornborger (Brown U.), Richard V. Astur (Michigan State U.), Christopher R. Johnson, Raymond T. Zeller (ZRL, Cranston), D0-NOTE-848-mc (microfiche), May 1989. 4pp. Presented at Conf. REAL-TIME '89, Williamsburg, VA, May 16-19, 1989.

## References

- [1] Solenoidal Detector Collaboration. Technical Design Report, (1992) **2-16**
- [2] *M. Dell' Orso, L. Ristori*. Nucl. Instr. and Meth., **A278** (1989) **436-440**
- [3] *P. Battaiotto et al.*, Nucl. Instr. and Meth., **A293** (1990) **531-536**
- [4] *M. Dell' Orso, L. Ristori*. Nucl. Instr. and Meth., **A287** (1990) **436-438**
- [5] *P. Battaiotto et al.*, Nucl. Instr. and Meth., **A287** (1990) **431-435**
- [6] *F. Bedeschi et al.*, IEEE Trans. on Nucl.Sc., Vol. **37**, No. **2** (1990) **248-254**
- [7] *A.Lanza et al.*, Behaviour of Feed-forward Neural Networks in Invariant Track Finding. (1993) ( in stampa su Computer Physics Communications)
- [8] *V. Arena et al.*, Nucl. Instr. and Meth., **A289** (1990) **496-503**

Chiara Macchiavello

Dipartimento di Fisica A. Volta  
Università di Pavia

## **CRITTOGRAFIA QUANTISTICA**

Seminario tenuto il 17 Dicembre 1993

# 1 Introduzione

Con il termine crittografia si intende un sistema matematico di trasformazione dell'informazione tale che questa risulti incomprensibile e quindi inutilizzabile a chi non è autorizzato ad accedervi. Anche se si ha conoscenza di sistemi crittografici che risalgono al 400 a. C., la crittografia ha assunto una veste matematica, entrando poi a far parte della teoria dell'informazione, soltanto a partire dalla fine degli anni '40.

Più recentemente è nata la cosiddetta crittografia quantistica. L'idea fondamentale è quella di applicare alcuni principi della meccanica quantistica alla crittografia tradizionale, in modo da ottenere sistemi di trasmissione di informazione intrinsecamente sicuri. I primi tentativi volti a questo scopo risalgono all'inizio degli anni Settanta, ad opera del fisico Stephen Wiesner. Dall'inizio degli anni '80 ad oggi l'interesse in questo campo è esploso e sono stati raggiunti risultati impensabili fino a pochi anni fa.

In questo lavoro vengono innanzitutto introdotti gli aspetti generali riguardanti i sistemi crittografici tradizionali e le relative problematiche, illustrando la necessità di ricorrere a canali di trasmissione dell'informazione di tipo quantistico per realizzare sistemi totalmente sicuri. Nel terzo paragrafo vengono descritti gli schemi quantistici più rilevanti che sono stati proposti in questi ultimi anni, per poi discutere, nell'ultimo paragrafo, lo stato dell'arte delle applicazioni sperimentali attuate fino ad oggi.

## 2 Caratteristiche generali dei sistemi crittografici

In generale, un sistema crittografico viene costruito nel modo seguente: supponiamo di voler trasmettere in segretezza ad un altro utente un certo messaggio  $M$ . A tale messaggio viene applicata innanzitutto una procedura  $f$ , detta cifratura, che lo trasforma nel cosiddetto crittogramma  $C$ , ovvero una sequenza di numeri o lettere che apparentemente non hanno alcun legame con il messaggio originario; in termini matematici  $f_k(M) = C$ . Il crittogramma viene

inviato al destinatario, il quale, attraverso una procedura di decifrazione  $d$ , può facilmente ricostruire il messaggio  $M$ :  $d_k(C) = M$ . I processi di cifratura e decifrazione in generale dipendono da una chiave  $k$ , senza la quale non è possibile risalire al messaggio corretto. Affinché il sistema crittografico sia sicuro è necessario che la chiave sia nota soltanto ai due interlocutori, mentre le procedure di cifratura e decifrazione possono essere segrete o di dominio pubblico a seconda del particolare sistema considerato.

Per capire meglio come funziona un sistema crittografico consideriamo un semplice esempio di sistema "a sostituzione". Innanzitutto si associa in modo del tutto arbitrario un numero ad ogni lettera dell'alfabeto:

A	→	01
B	→	02
		.
		.
		.
Z	→	26

Tale codifica numerica delle lettere dell'alfabeto è convenzionale, viene cioè stabilita a priori e in modo univoco da mittente e destinatario. Si voglia trasmettere ad esempio il messaggio

ATTENZIONE.

Questo viene trasformato, secondo le corrispondenze stabilite, nella sequenza di numeri:

01 20 20 05 14 26 09 15 14 05.

Il processo di cifratura consiste in questo caso nel sommare ad ogni numero a due cifre un intero scelto come chiave e sottrarre 26 nel caso in cui il risultato ottenuto sia maggiore. Scegliendo ad esempio il numero 6 e ritornando alle lettere, si giunge al seguente crittogramma:

GZZKTFOUTK.

Tale crittogramma risulta a prima vista incomprensibile, ma viene facilmente decifrato dal destinatario che è in possesso della chiave.

Questo tipo di sistema è molto semplice da usare, però è altrettanto semplice da forzare. Se infatti il crittogramma viene intercettato, per messaggi abbastanza lunghi è sufficiente calcolare la frequenza con cui compare ogni lettera nel crittogramma e confrontarla con la frequenza statistica di ogni lettera dell'alfabeto nel linguaggio utilizzato per risalire al messaggio originario.

Un altro tipo di sistema di facile impiego è quello "a trasposizione", che risale all'epoca degli Spartani (400 a. C.). Tale sistema consiste essenzialmente nel modificare l'ordine in cui compaiono le lettere nel messaggio: la trasformazione effettuata rappresenta la chiave. Dalla fusione dei sistemi a sostituzione con i sistemi a trasposizione nascono i sistemi misti, largamente utilizzati fino alla metà di questo secolo. Il problema fondamentale di questi tipi di sistemi è la scarsa sicurezza.

I progressi più rilevanti nel campo della crittografia classica sono avvenuti in questo secolo. Nel 1918 Gilbert Vernam ha proposto di utilizzare come chiave in un sistema a sostituzione una sequenza di numeri casuali lunga quanto il messaggio da trasmettere. Il sistema funziona essenzialmente come il semplice esempio di sistema a sostituzione visto in precedenza, con la differenza che la chiave non è più una costante da aggiungere al messaggio ma è una sequenza di numeri casuali che vengono sommati al messaggio "termine a termine". Tale chiave inoltre non deve più essere impiegata per trasmettere un altro messaggio. Questo particolare è molto importante; supponiamo infatti che la chiave e il crittogramma siano espressi in sistema binario, come avviene usualmente. Un'eventuale spia che riesce a intercettare due crittogrammi costruiti con la stessa chiave di numeri 0 e 1 in ordine casuale può ottenerne la somma semplicemente sommando i corrispondenti numeri dei crittogrammi, dato che in questo modo la chiave si neutralizza (nel sistema binario  $0 + 0 = 0$  e  $1 + 1 = 0$ ). Dalla somma è facile poi risalire ai messaggi originari. All'epoca della sua scoperta però il cifrario di Vernam non ha avuto una grossa diffusione, perché la trasmissione di una chiave così ingombrante rappresentava un ostacolo non indifferente e non era stata dimostrata l'indecifrabilità del sistema.

Un passo avanti fondamentale in campo crittografico si è verificato all'inizio degli anni '40 con la nascita della teoria dell'informazione, grazie alla quale è stato possibile stabilire i criteri per

costruire sistemi indecifrabili. Claude Shannon nel 1946 ha dimostrato che *un sistema crittografico a chiave segreta è totalmente sicuro se la chiave ha le caratteristiche proposte da Vernam, cioè è costituita da una sequenza di numeri casuali lunga quanto il messaggio e viene usata una volta sola*. Nonostante questo grosso risultato però rimaneva ancora irrisolto il problema della sicurezza della distribuzione e della conservazione della chiave.

Ciò ha portato, negli anni passati alla ricerca di sistemi più pratici: a metà degli anni '70 è nata la crittografia a chiave pubblica. La particolarità dei sistemi a chiave pubblica consiste nel fatto che i due interlocutori non hanno bisogno di accordarsi a priori su una chiave segreta. Un interlocutore sceglie una coppia di trasformazioni inverse, che costituiscono le procedure di cifratura e decifratura; rende pubbliche le istruzioni per la cifratura, in modo che un altro utente possa costruire il crittogramma corrispondente al messaggio che vuole trasmettere. Le istruzioni per la decifratura non vengono invece rivelate: in questo modo soltanto l'interlocutore che ha fornito la procedura di cifratura è in grado di decodificare il crittogramma. In base alla teoria della complessità è però stato dimostrato che questo tipo di sistema, nonostante sia di impiego molto pratico, ha lo svantaggio di non essere completamente sicuro.

I sistemi crittografici più comunemente utilizzati oggi, con l'aiuto dei recenti progressi tecnologici, puntano sull'indecifrabilità piuttosto che sulla praticità di impiego: sulla base dei risultati dimostrati dalla teoria dell'informazione la chiave è costituita da una sequenza di numeri casuali e deve essere mantenuta segreta, mentre le procedure di cifratura e decifratura sono di dominio pubblico. Inoltre, il crittogramma viene trasmesso su un canale pubblico, come ad esempio un canale radio o un giornale. Questo canale è allora accessibile a chiunque e quindi facilmente intercettabile, mentre si suppone che il segnale trasmesso non sia alterabile in alcun modo. La chiave invece viene trasmessa su un canale privato molto sicuro.

Il problema fondamentale rimasto ancora aperto nella crittografia classica è, come è già stato sottolineato, quello della sicurezza della distribuzione della chiave: in linea di principio qualsiasi canale privato tradizionale, per quanto sicuro e protetto, può essere tenuto sotto controllo passivamente, senza cioè che i due interlocutori si accorgano del tentativo di intercettazione in atto. Un qualsiasi ten-

tativo di spionaggio del segnale corrisponde infatti a un processo fisico di misura e in fisica classica si possono misurare tutte le proprietà fisiche di un sistema senza perturbarle. Sono allora possibili interventi passivi su un canale classico, cioè atti di spionaggio che non provocano alterazioni del segnale trasmesso e quindi impediscono ai due interlocutori di stabilire se il segnale è stato in qualche modo intercettato.

In meccanica quantistica invece un atto di misurazione provoca in generale una perturbazione del sistema. Questa particolarità del mondo quantistico ha suggerito di impiegare come canale di trasmissione per la chiave *un canale privato quantistico, progettato in modo tale che un qualsiasi tentativo di intercettazione disturbi necessariamente il segnale con conseguenze osservabili*. Si possono realizzare così canali di trasmissione dell'informazione intrinsecamente sicuri, protetti cioè dalle leggi stesse della meccanica quantistica.

### 3 Schemi quantistici

I primi schemi quantistici per trasmettere in totale segretezza una sequenza di numeri casuali in sistema binario sono stati formulati da Charles Bennet e Gilles Brassard nel 1984 e successivamente da Artur Ekert nel 1991. Come si vedrà nel seguito, tali sistemi sfruttano in modo molto semplice alcuni principi fondamentali della meccanica quantistica, fornendo canali di trasmissione dell'informazione totalmente sicuri.

#### 3.1 Schema di Bennet e Brassard

Lo schema proposto da Bennet e Brassard sfrutta essenzialmente il fenomeno della polarizzazione della luce e il principio di indeterminazione di Heisenberg.

Per semplificarne la descrizione chiamiamo i due interlocutori Anna e Marco. In particolare, siano rispettivamente Anna il mittente e Marco il destinatario della chiave. Anna sia dotata di una sorgente di fotoni polarizzati e Marco di un polarimetro che misuri

la polarizzazione lungo direzioni perpendicolari nel piano ortogonale alla direzione di propagazione dei fotoni. In particolare, supponiamo che il polarimetro possa misurare la polarizzazione lungo due assi ortogonali  $x$  e  $y$  (che nel seguito sarà chiamata per convenzione polarizzazione rettilinea) o quella lungo due assi  $x'$  e  $y'$  ruotati di  $\pi/4$  rispetto ai precedenti (polarizzazione diagonale).

ANNA	MARCO	
+	+	×
0	0	0 1
1	1	0 1

ANNA	MARCO	
×	+	×
0	0 1	0
1	0 1	1

Tabella 1. *Corrispondenza dei risultati ottenuti da Anna e Marco nello schema di Bennet e Brassard*

Polarizzazione rettilinea e polarizzazione diagonale corrispondono a due osservabili che non commutano. Per convenzione si assegna il valore 0 ai fotoni che risultano polarizzati lungo  $x$  o  $x'$  e il valore 1 ai fotoni polarizzati lungo  $y$  o  $y'$ . Supponiamo che Anna mandi a Marco un fotone polarizzato rettilineamente lungo  $x$  o lungo  $y$ ; se Marco effettua una misura di polarizzazione rettilinea, che verrà indicata con il simbolo  $+$ , si ha come risultato la trasmissione di un bit di informazione in quanto egli è in grado

di determinare con esattezza la polarizzazione del fotone spedito da Anna. Se invece Marco misura la polarizzazione diagonale  $\times$ , il risultato della misura non è deterministico, ma può assumere i valori 0 o 1 con uguale probabilità; in tal caso l'informazione trasportata dal fotone inviato da Anna viene persa. La situazione è rappresentata schematicamente in Tab. 1.

La trasmissione della chiave avviene nel modo seguente: Anna invia a Marco fotoni con polarizzazione lungo  $x, x', y, y'$  scelta a caso. Ad esempio:

$\uparrow \nearrow \searrow \uparrow \nearrow \searrow \leftrightarrow \uparrow \searrow \leftrightarrow \searrow \nearrow \uparrow \nearrow \leftrightarrow \dots$

Marco sceglie a caso e indipendentemente da Anna il tipo di misurazione di polarizzazione, rettilinea o diagonale. Ad esempio:

$+ \times + + + + + \times + + \times \times \times \times + \dots$ ,

con i risultati

$\uparrow \nearrow \leftrightarrow \uparrow \uparrow \leftrightarrow \leftrightarrow \searrow \uparrow \leftrightarrow \searrow \searrow \nearrow \nearrow \leftrightarrow \dots$

Alla fine Marco rivela pubblicamente ad Anna il tipo di misurazione effettuato per ciascun fotone, senza però rivelarne il risultato. Anna, confrontando questi dati con la polarizzazione da lei scelta di volta in volta comunica a Marco quali risultati vanno scartati perché corrispondenti a misurazioni di polarizzazione non coincidenti. Nell'esempio mostrato si devono scartare il terzo risultato, il quinto, il sesto, ecc. I rimanenti risultati, che sono rimasti segreti, sono una sequenza di numeri casuali lunga a piacere e quindi costituiscono la chiave:

$1 0 1 0 0 1 0 0 \dots$

Consideriamo ora il problema della sicurezza del sistema. Supposto che un utente esterno riesca a intercettare il canale di comunicazione, l'unico modo per ottenere informazioni sulla chiave è misurare la polarizzazione dei fotoni in transito verso Marco. Per il principio di indeterminazione di Heisenberg però non è possibile misurare simultaneamente le polarizzazioni rettilinea e diagonale di un singolo fotone con infinita precisione e non è quindi possibile ottenere un'informazione completa sullo stato di polarizzazione del

fotone. La situazione sarebbe ben diversa se fosse possibile clonare il fotone e produrre così un numero a piacere di copie dello stato del fotone in transito verso Marco: in tal caso l'utente esterno sarebbe in grado di stabilire esattamente lo stato di polarizzazione del fotone eseguendo misure diverse sulle varie copie. Le leggi della meccanica quantistica però non contemplanò questa possibilità. La spia dovrà allora effettuare delle misure sul singolo fotone in transito, ottenendo però soltanto informazioni parziali sul suo stato di polarizzazione. Per il principio di indeterminazione la spia dovrà allora scegliere per ogni fotone uno dei due tipi di misurazione e per il postulato di riduzione quantistica invierà poi a Marco fotoni polarizzati in accordo con il risultato ottenuto nella misura.

La probabilità di effettuare la scelta di misurazione sbagliata è  $1/2$  e in tal caso i fotoni che giungono a Marco hanno perso memoria della polarizzazione originaria. Se comunque Marco effettua la misura giusta su questi fotoni ha probabilità  $1/2$  di ottenere il risultato corretto, in accordo con la polarizzazione scelta da Anna. Allora per ciascun fotone un eventuale tentativo di intercettazione del canale ha probabilità  $P = 3/4$  di non essere scoperto. Tale probabilità è abbastanza alta, ma per  $n$  fotoni diviene

$$P(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n . \quad (1)$$

Non esiste pertanto una buona strategia di spionaggio che non venga rivelata in quanto per  $n$  grande  $P(n) \rightarrow 0$ . Come abbiamo visto, la sicurezza del canale è legata dunque al principio di indeterminazione di Heisenberg e all'impossibilità di clonare lo stato del fotone. È importante quindi utilizzare un singolo fotone per ogni bit di informazione da trasmettere.

Per verificare se effettivamente la chiave condivisa da Anna e Marco è segreta oppure no si possono utilizzare diversi metodi. Il più immediato consiste nel confronto diretto di un sottoinsieme scelto a caso dei risultati ottenuti. Se i risultati concordano si può con un buon livello di confidenza stabilire che non ci sono stati interventi esterni sul canale; i dati confrontati vengono scartati, mentre gli altri costituiscono la chiave. Se invece nel confronto si osservano delle discrepanze tra i dati (un intervento di spionaggio sistematico, in base a quanto detto prima, provoca degli errori in  $1/4$  circa dei

risultati) il processo di trasmissione della chiave viene ripetuto da capo. Questo metodo però ha lo svantaggio di far perdere dei dati utili per la chiave. Un metodo più efficiente da questo punto di vista è ad esempio quello del confronto della parità dei numeri 0 oppure 1 in un sottoinsieme scelto a caso contenente circa la metà dei dati. Si può dimostrare che se i dati differiscono la probabilità di rivelarlo è pari a  $1/2$ : questo confronto va ripetuto un numero sufficiente di volte per avere la probabilità desiderata. Dopo aver ripetuto  $k$  volte questa procedura infatti la probabilità che la chiave sia segreta diventa

$$P_k = 1 - 2^{-k} . \quad (2)$$

In questo modo tutti i dati ottenuti possono essere utilizzati come chiave.

### 3.2 Schema di Ekert

Lo schema proposto da Ekert è basato sul fenomeno delle correlazioni quantistiche e presenta rispetto allo schema precedente un controllo più efficiente su tentativi di intervento esterni.

Questo canale è composto essenzialmente da una sorgente di coppie di fotoni correlati posta tra i due utenti, Anna e Marco. I fotoni vengono emessi in versi opposti e raggiungono così i due utenti, entrambi dotati di rivelatori di polarizzazione rettilinea e diagonale. Una tipica sorgente di fotoni correlati è ad esempio un atomo a simmetria sferica che emette in cascata due fotoni con polarizzazione totale nulla. La coppia di fotoni è descritta dalla funzione d'onda di singoletto

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\uparrow\rangle_1 |\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1 |\uparrow\rangle_2) , \quad (3)$$

dove  $|\uparrow\rangle$  e  $|\downarrow\rangle$  rappresentano autostati della polarizzazione lungo due direzioni ortogonali tra loro giacenti nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione dei fotoni.

Se si effettua una misura di polarizzazione dello stesso tipo sui due fotoni correlati, i risultati ottenuti risultano necessariamente opposti, come previsto dalla (3). Se invece le misure effettuate

sono di tipo diverso, una di polarizzazione rettilinea e l'altra di polarizzazione diagonale, i risultati sono totalmente scorrelati tra di loro e del tutto casuali, come mostrato in Tab. 2.

ANNA	MARCO	
+	+	×
0	1	0 1
1	0	0 1

ANNA	MARCO	
×	+	×
0	0 1	1
1	0 1	0

Tabella 2. *Corrispondenza dei risultati ottenuti da Anna e Marco nello schema di Ekert*

Anna e Marco misurano la polarizzazione dei fotoni appartenenti alla stessa coppia e scelgono in modo del tutto casuale e indipendente quale tipo di misurazione effettuare per ciascun fotone. Analogamente allo schema precedente, alla fine delle misure i due utenti si scambiano pubblicamente informazioni sul tipo di misura realizzata per ogni fotone e scartano i risultati relativi a misure di tipo diverso. I dati rimanenti, tenendo conto che in questo caso sono sistematicamente opposti, costituiscono la chiave.

Per dimostrare come questo sistema risulti efficacemente protetto da interventi esterni, definiamo il coefficiente di correlazione

nel modo seguente

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = P_{00}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) + P_{11}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{01}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) - P_{10}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) , \quad (4)$$

dove ad esempio  $P_{00}(\mathbf{a}, \mathbf{b})$  indica la probabilità che una misura di polarizzazione effettuata da Anna lungo la direzione  $\mathbf{a}$  (e quella ad essa ortogonale) e una misurazione effettuata da Marco lungo la direzione  $\mathbf{b}$  diano entrambe 0 come risultato. Se non si sono verificati interventi esterni, si può facilmente ottenere

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} . \quad (5)$$

Se invece il canale è stato intercettato il coefficiente di correlazione assume la forma

$$J(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \int d\mathbf{n}d\mathbf{p} \rho(\mathbf{n}, \mathbf{p}) (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{p}) , \quad (6)$$

dove  $\rho(\mathbf{n}, \mathbf{p})$  indica la probabilità di misura dei fotoni lungo le direzioni individuate dai versori  $\mathbf{n}$  e  $\mathbf{p}$  e descrive quindi la strategia di spionaggio applicata. Consideriamo la particolare combinazione lineare di coefficienti di correlazione definita come segue

$$S = J(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + J(\mathbf{y}, \mathbf{y}) . \quad (7)$$

Se non c'è intercettazione

$$S = -2 , \quad (8)$$

mentre in presenza di atti di spionaggio si ricava dalla (6)

$$-1 \leq S \leq +1 \quad (9)$$

indipendentemente dal tipo di strategia utilizzata. È sufficiente allora che Anna e Marco calcolino la quantità  $S$  in un sottoinsieme casuale di risultati per stabilire se la chiave è segreta oppure è stata spiata.

## 4 Realizzazioni sperimentali

Le prime applicazioni sperimentali sono state realizzate nel 1989 seguendo lo schema di Bennet e Brassard. L'apparato sperimentale è costruito nel modo seguente. Ad un'estremità è collocata una sorgente di fotoni polarizzati, composta da un diodo a emissione luminosa e un filtro polarizzatore. All'altra estremità è invece posto un polarimetro, costituito essenzialmente da un cristallo birifrangente (come la calcite) che divide il fascio di luce incidente in due fasci polarizzati secondo direzioni ortogonali; in corrispondenza dell'uscita dei due fasci sono posti due fotomoltiplicatori, allo scopo di rivelare l'arrivo di fotoni singoli. L'intero apparato è collocato in un contenitore impenetrabile alla luce e il suo funzionamento è regolato da un calcolatore, che simula il comportamento dei due utenti ed eventualmente di un intercettatore.

Nello schema teorico un bit di informazione viene trasportato da un singolo fotone polarizzato. A livello sperimentale ciò non è realizzabile: il fotone singolo è sostituito da un impulso luminoso. Questo però apre una nuova possibilità di spionaggio non prevista a livello teorico: un intercettatore può inserirsi nel segnale di luce in transito e dividerlo con un semplice specchio semiargentato, in modo che una parte del fascio prosegua con polarizzazione inalterata fino al polarimetro mentre l'altra parte viene sottratta e sottoposta a misurazione. Se viene deviata soltanto una piccola frazione del fascio, il destinatario può non accorgersi dell'indebolimento del segnale o attribuirlo alle perdite naturali del canale. Se gli impulsi inviati inoltre fossero molto intensi, deviandone solo una piccola frazione si potrebbe ottenere un numero sufficientemente elevato di fotoni per ogni impulso da poter misurare sia la polarizzazione rettilinea sia quella diagonale e determinare così la polarizzazione dell'impulso senza ambiguità. Per ridurre al minimo questa possibilità di spionaggio si generano impulsi di bassa intensità: sperimentalmente sono stati utilizzati impulsi con intensità pari a un decimo di fotone.

Un altro inconveniente non previsto nel modello teorico è dovuto al fatto che i fotomoltiplicatori a volte danno una risposta anche se non è arrivato alcun fotone. Può succedere allora che si trovino degli errori nei dati senza che il canale sia stato intercettato. Se

gli errori riscontrati sono sufficientemente pochi da escludere l'intervento sistematico di una spia e non dover quindi ritrasmettere la chiave da capo, è necessario correggerli mediante opportuni codici correttori. Questa procedura però avviene su un canale pubblico, in seguito al confronto parziale dei dati secondo metodi esposti nel paragrafo precedente. La chiave condivisa dai due utenti alla fine di queste fasi potrebbe essere solo parzialmente segreta: un intercettatore può essersene in parte impossessato dividendo alcuni impulsi, misurandone altri direttamente, assistendo alla discussione pubblica dei dati e alla correzione degli errori. Sono state formulate allora apposite tecniche matematiche di "amplificazione della riservatezza", che consistono essenzialmente nella scelta pubblica di una trasformazione della lunghezza della chiave tale che una conoscenza parziale dell'ingresso non fornisca quasi nessuna informazione sull'uscita. In questo modo si ricava una chiave più corta ma totalmente segreta.

I buoni risultati ottenuti introducendo queste tecniche, necessarie nell'elaborazione dei dati a livello sperimentale, hanno confermato la validità dello schema di Bennet e Brassard. Le distanze tra mittente e destinatario che sperimentalmente sono state coperte sono però dell'ordine della decina di centimetri. Per poterle aumentare è necessario l'impiego di tubi a vuoto, che però risulta estremamente costoso e scomodo, mentre non è conveniente l'uso di fibre ottiche perché la polarizzazione degrada rapidamente durante la propagazione del segnale in fibra. Ciò costituisce un limite considerevole alle applicazioni pratiche.

Nel 1992 sono stati realizzati i primi esperimenti basati sullo schema di Ekert. L'apparato sperimentale è mostrato in Fig. 1. In realtà esso non riproduce fedelmente lo schema teorico originario in quanto non codifica l'informazione nella polarizzazione dei fotoni; come si vedrà nel seguito, è però essenzialmente isomorfo allo schema teorico di Ekert e si basa anch'esso su correlazioni non locali. La sorgente di fotoni correlati è costituita da un laser e un convertitore parametrico, il quale essenzialmente converte un fotone incidente a frequenza  $2\omega_0$  (che proviene dal laser) in una coppia di fotoni correlati: un fotone cosiddetto "di segnale" a frequenza  $\omega_S$  e un fotone "idler", che per il principio di conservazione dell'energia ha frequenza  $\omega_I = 2\omega_0 - \omega_S$ . La coppia di fotoni correlati è descritta

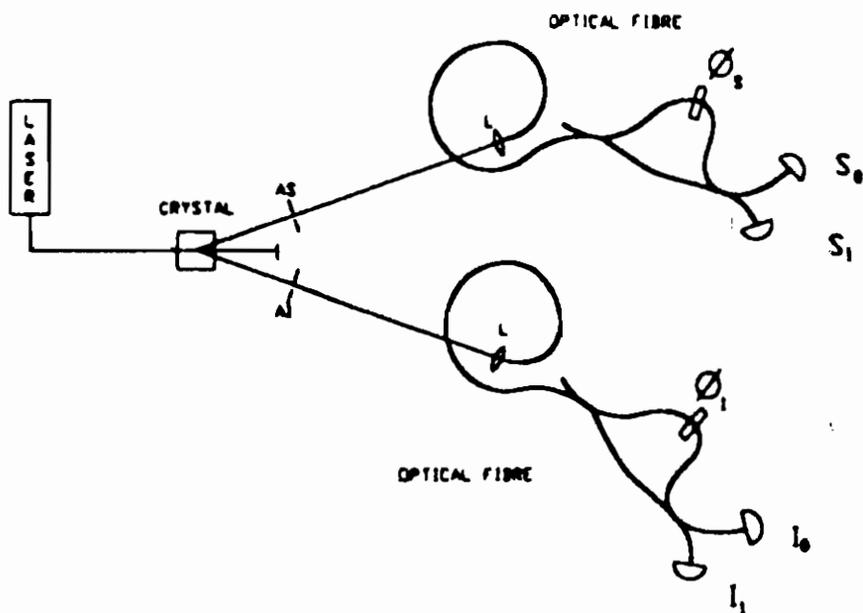


Figura 1. Apparato sperimentale di Ref. [5].

dalla funzione d'onda

$$|\psi\rangle = \int d\omega c(\omega) |\omega\rangle_S |2\omega_0 - \omega_S\rangle_I, \quad (10)$$

dove  $c(\omega)$  è una funzione non nulla in un intervallo  $\Delta\omega$  centrato attorno a  $\omega_0$ . I due fotoni vengono lanciati, attraverso fibre ottiche, in due interferometri di Mach Zehnder non bilanciati, caratterizzati da sfasamenti  $\phi_S$  e  $\phi_I$  per il fotone di segnale e il fotone idler rispettivamente. All'uscita di ciascun interferometro sono collocati due fotomoltiplicatori, indicati in Fig. 1 con  $S_0, S_1, I_0, I_1$ .

Si può dimostrare che, scegliendo opportunamente la lunghezza dei percorsi nei due bracci di ciascun interferometro, valgono le seguenti relazioni

$$p(0,0) = p(1,1) = \frac{1}{4} [1 + \cos(\phi_S + \phi_I)] \quad (11)$$

$$p(0,1) = p(1,0) = \frac{1}{4} [1 - \cos(\phi_S + \phi_I)] , \quad (12)$$



si prevede di raggiungere senza grossi problemi distanze dell'ordine della decina di chilometri.

## 5 Conclusioni

Il problema fondamentale rimasto irrisolto nell'ambito della crittografia tradizionale è quello della sicurezza della distribuzione della chiave, ovvero della realizzazione di un canale totalmente sicuro attraverso il quale poter trasmettere una sequenza di numeri casuali da utilizzare poi come chiave nella decifratura del crittogramma. Un qualsiasi canale privato tradizionale può infatti essere tenuto sotto controllo senza che i due utenti se ne accorgano.

Questo problema viene risolto elegantemente dalla crittografia quantistica. L'idea fondamentale è quella di sfruttare alcuni principi fondamentali di meccanica quantistica per progettare un canale in modo tale che un qualsiasi tentativo di intervento esterno possa essere scoperto dagli utenti legittimi. Si possono realizzare così canali di trasmissione dell'informazione intrinsecamente sicuri, protetti dalle leggi stesse del mondo quantistico. Gli schemi teorici proposti finora sono estremamente efficaci, mentre le applicazioni sperimentali sono ancora suscettibili di miglioramenti.

## Riferimenti

- [1] C. Zimmer, *Discover Magazine* (September 1992), 92
- [2] I. Stewart, *Nature* **353** (91), 384
- [3] A. K. Ekert, *Nature* **358** (92), 14
- [4] A. K. Ekert, *Phys. Rev. Lett.* **67** (91), 661
- [5] A. K. Ekert, J. G. Rarity, P. R. Tapster, G. M. Palma, *Phys. Rev. Lett.* **69** (92), 1239
- [6] C. H. Bennet, G. Brassard e A. K. Ekert, *Le Scienze* **292** (1992), 84



**Matteo Cacciari**

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica  
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare  
Sezione di Pavia**

# Il “paradosso” dei gemelli

**Seminario tenuto il 23 Novembre 1993**



# 1 Introduzione

TIME WAITS FOR NOBODY

*Freddie Mercury*

Nella storia della Relatività probabilmente nessun problema ha tanto appassionato sia gli specialisti sia il grande pubblico quanto il cosiddetto "Paradosso dei gemelli". Benché dal punto di vista logico esso si ponga su di un piano assolutamente identico a quello di tutti gli altri "paradossi" relativistici escogitati ed escogitabili, il fatto che coinvolga un fattore così tangibile della vita quale l'età di una persona gli dona una fascino sufficiente a porlo in posizione preminente.

Converrà a questo punto inquadrare con maggior precisione il problema di cui ci occuperemo. Esso nasce dalla dilatazione temporale prevista dalla Relatività Speciale (RS) e dalla possibilità che esistano due gemelli, uno dei quali viaggi nello spazio a grande velocità per fare infine ritorno sulla Terra e rincontrarsi con il fratello. Una previsione della RS è che il gemello viaggiatore risulterà *più giovane* di quello rimasto sul nostro pianeta. Il "paradosso" è originato da un'applicazione ulteriore - incorretta - della RS a questo problema, che porta a concludere che entrambi i gemelli sono più giovani l'uno rispetto all'altro al momento del loro incontro, risultato difficile da accettare e indubbiamente paradossale.

Nel seguito vedremo come la Relatività sia una teoria auto-consistente e pertanto libera da paradossi di questo tipo, mostriamo quale errore porta al risultato paradossale sopra descritto e svilupperemo infine un'analisi corretta del problema in esame che consentirà di giungere ad una previsione non ambigua circa l'invecchiamento reciproco dei due gemelli.

## 2 Paradosso? Quale paradosso?

È purtroppo comune l'abitudine di riferirsi a problemi tipo quello dei gemelli (oppure "la buca e lo sciatore", "l'asta e il garage", etc.) con il termine di "paradossi". Ciò è dovuto al fatto che la descrizione dello stesso fenomeno fisico sembra apparire diversa a

seconda che sia fatta nel sistema di riferimento dell'uno o dell'altro oggetto, conducendo così ad un risultato inaccettabile dal punto di vista logico ed al sospetto che la Relatività sia una teoria non corretta in quanto porta a risultati in contraddizione tra loro.

In realtà è facile convincersi che, essendo la Relatività costruita proprio sul requisito di invarianza delle leggi fisiche indipendentemente dal sistema di riferimento scelto per la descrizione del fenomeno in esame, essa *non può* condurre a risultati incompatibili. Qualora ciò avvenga sarà inevitabilmente dovuto a qualche errore effettuato in almeno uno dei sistemi di riferimento utilizzati nel corso dell'analisi del problema.

Nel caso dei gemelli in esame il nostro scopo è valutare il cosiddetto "tempo proprio" di ogni gemello, indicato con  $\tau$ . Esso è il vero "tempo di vita", ed indica il loro reale invecchiamento. In termini infinitesimali è definito da

$$d\tau = \frac{ds}{c} \quad (2.1)$$

ove  $ds$  è l'elemento di linea che nella Relatività è invariante come postulato basilare della teoria, e  $c$  è la velocità della luce. È evidente da questa definizione che anche il tempo proprio sarà un invariante. Da una corretta applicazione della Relatività non potrà dunque scaturire un risultato paradossale circa l'invecchiamento dei due gemelli.

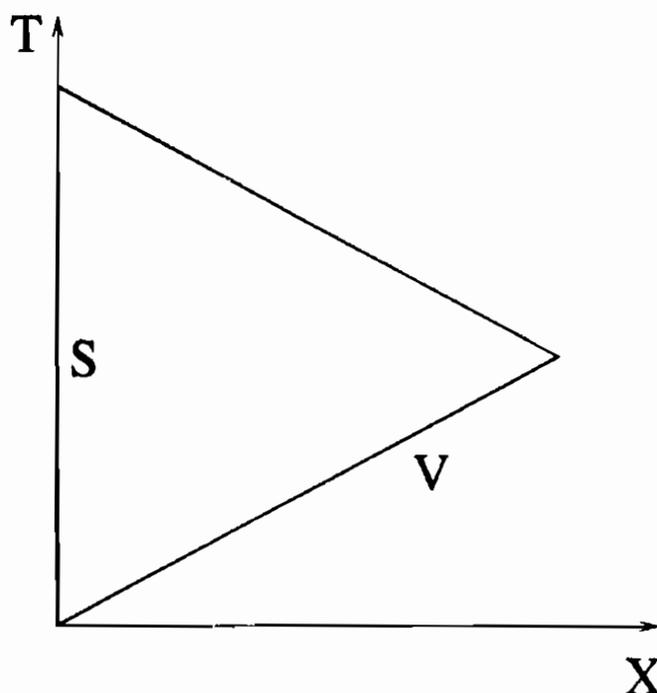
Questo risultato è naturalmente la soluzione qualitativa al nostro problema: il paradosso dei gemelli in quanto tale non esiste, la Relatività rimane una teoria valida dal punto di vista logico ed autoconsistente.

### 3 Il conto sbagliato: paradosso!

Vogliamo ora vedere come un'applicazione ingenua (e scorretta) dei concetti della Relatività Speciale possa condurre ad un paradosso.

Supponiamo esistano due gemelli, uno sedentario ( $S$ ) e uno viaggiatore ( $V$ ). Quello sedentario rimane sulla Terra, mentre il viaggiatore viaggia a grande velocità nello spazio e poi torna indietro.

Dal punto di vista di  $S$  (ossia nel suo sistema di riferimento) questa situazione può essere schematizzata come in figura 1:  $S$  rimane fermo in un punto dello spazio mentre  $V$  si allontana con velocità uniforme  $v$ , per poi invertire la rotta e ritornare al punto di partenza.



**Figura 1:** Rappresentazione schematica dei percorsi dei due gemelli, nella drastica approssimazione che la velocità di  $V$  si mantenga sempre costante durante tutto il viaggio, eccetto che per il cambio di verso.

Supponiamo che i moti nel sistema di riferimento di  $S$  siano descritti dalle coordinate  $(X, T)$ . Secondo la RS la relazione tra il tempo proprio e la coordinata temporale è

$$d\tau = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dT \quad (3.1)$$

Se indichiamo con  $\Delta T$  l'intervallo temporale durante il quale  $V$  compie metà viaggio, cioè giunge alla massima distanza da  $S$ , abbiamo che dopo l'intero viaggio di andata e ritorno il suo tempo proprio

sarà

$$\tau_V = 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T \quad (3.2)$$

Quello di  $S$  invece, che nel proprio sistema di riferimento ha  $v = 0$  sarà

$$\tau_S = 2\Delta T \quad (3.3)$$

Abbiamo dunque  $\tau_V < \tau_S$ , cioè il gemello viaggiatore rimane più giovane.

Pensiamo ora di metterci nel sistema di riferimento di  $V$ . Un'analisi superficiale porta a concludere che tutto è analogo al caso precedente. L'unica differenza è che  $V$  è ora fermo nell'origine del suo sistema di coordinate  $(x, t)$  mentre  $S$  si allontana con velocità  $-v$ . Dunque

$$\tau_S = 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t \quad (3.4)$$

e

$$\tau_V = 2\Delta t \quad (3.5)$$

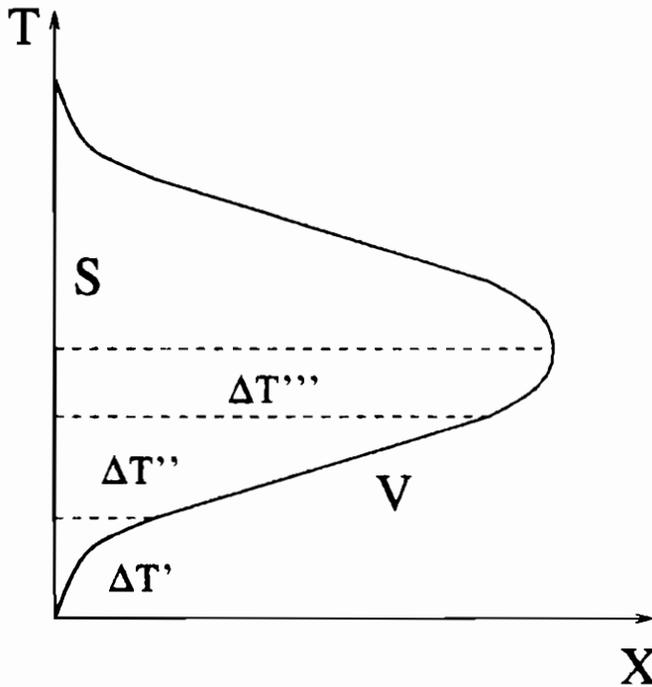
Ma questo ci conduce immediatamente a  $\tau_V > \tau_S$ , in palese contraddizione con la conclusione del calcolo precedente. Questa è la situazione paradossale a cui si faceva riferimento nell'Introduzione.

## 4 Il calcolo corretto

Il calcolo della Sezione precedente conduce ad un paradosso, e per le considerazioni della Sezione 2 deve essere necessariamente scorretto in almeno un punto.

Un più attento esame del modo in cui  $V$  può realmente effettuare il suo viaggio ci porta a concludere che deve essere quale quello schematizzato in figura 2 piuttosto che quello in figura 1. Ciò che è essenziale è che  $V$  non può effettuare tutto il suo viaggio a velocità costante. Egli deve prima accelerare alla partenza, decelerare per fermarsi e riaccelerare per riprendere il viaggio in direzione opposta e infine decelerare nuovamente e fermarsi presso  $S$ . Durante queste accelerazioni  $V$  sperimenterà delle forze non inerziali. Il suo sistema di riferimento non potrà essere considerato un sistema inerziale, e

dunque, per definizione, le leggi della RS non saranno applicabili in tali frangenti.



**Figura 2:** Rappresentazione più realistica dei percorsi dei due gemelli. La velocità di  $V$  varia allorché egli accelera o decelera in alcuni momenti del suo viaggio.

L'errore commesso in precedenza è dunque stato quello di ridurre il moto di  $V$  ai soli tratti in cui potevamo utilizzare la RS, considerando trascurabile la necessità di modificare in almeno un punto (quello del ritorno) la sua velocità.

Ripetiamo il calcolo dei tempi proprio tenendo ora attentamente conto dei tratti nei quali si ha un moto accelerato. Cominciamo dal sistema di riferimento di  $S$ . Questo è sempre un sistema inerziale e dunque la RS è sempre valida. Un corpo soggetto ad una forza costante  $F$  obbedisce all'estensione relativistica della Seconda Legge di Newton:

$$\frac{dp}{dT} = F \quad (4.1)$$

che possiamo riscrivere come

$$\frac{d}{dT} \left\{ \frac{u}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \right\} = \frac{F}{m_0} \equiv g \quad (4.2)$$

con  $u = dX/dT$ . Integrando per  $g$  costante, e ponendo  $X = 0$  e  $u = 0$  all'istante  $T = 0$ , otteniamo

$$\begin{aligned} u(T) &= \frac{dX}{dT} = \frac{gT}{\left\{ 1 + \left( \frac{gT}{c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} \\ X(T) &= \frac{c^2}{g} \left[ \left\{ 1 + \left( \frac{gT}{c} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.3)$$

e il tempo proprio è dato dalla generalizzazione della (3.1) al caso di velocità non costante

$$\tau = \int_0^{\Delta T} d\tau = \int_0^{\Delta T} dT \sqrt{1 - \frac{u^2(T)}{c^2}} \quad (4.4)$$

Nei vari tratti in cui possiamo distinguere il moto di  $V$  (vedi figura 2) abbiamo allora la seguente situazione

	$S$	$V$
$\Delta T'$	$\tau'_S = \Delta T'$	$\tau'_V = \frac{c}{g} \sinh^{-1} \frac{g\Delta T'}{c}$ $= \frac{c}{g} \tanh^{-1} \frac{v}{c}$
$\Delta T''$	$\tau''_S = \Delta T''$	$\tau''_V = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T''$
$\Delta T'''$	$\tau'''_S = \Delta T''' = \Delta T' = \tau'_S$	$\tau'''_V = \tau'_V$

ove  $\Delta T'$  e  $\Delta T'''$  sono stati posti uguali per la simmetria di  $u$  nei due intervalli, e da ciò discende l'uguaglianza dei tempi propri nelle due regioni.

Cerchiamo ora di riportarci nella situazione ideale della Sezione 3 prendendo il limite dei tempi propri per  $g \rightarrow \infty$  a  $v$  costante. Ciò significa che la velocità  $v$  a cui viene percorso il tratto di moto uniforme viene raggiunta in tempi sempre più brevi, e al limite si torna all'approssimazione della figura 1. Naturalmente questa sarà una buona approssimazione se il contributo al tempo proprio della prima e della terza regione si annulla in questo limite. In questo caso otteniamo, ponendo  $u(\Delta T') = v$  nella (4.3),

$$\Delta T' = \Delta T''' \rightarrow 0 \quad (4.5)$$

e dunque

$$\tau'_S = \tau'''_S \rightarrow 0 \quad (4.6)$$

$$\tau'_V = \tau'''_V \rightarrow 0 \quad (4.7)$$

Per il tempo proprio totale troviamo allora

$$\tau_S = 2\tau''_S = 2\Delta T'' \quad (4.8)$$

$$\tau_V = 2\tau''_V = 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T'' \quad (4.9)$$

e il gemello viaggiatore rimane più giovane:

$$\tau_V < \tau_S \quad (4.10)$$

Questo risultato coincide con quello trovato nella Sezione precedente allorché il calcolo era stato effettuato nel sistema di riferimento inerziale di  $S$ : la (4.8) e la (4.9) sono uguali rispettivamente alla (3.3) e alla (3.2).

Ripetiamo ora il calcolo nel sistema di riferimento di  $V$ , tenendo questa volta nella dovuta considerazione il fatto che nelle regioni di accelerazione e decelerazione esso non è un sistema inerziale. In questi casi non possiamo applicare la RS. Dobbiamo ricorrere a una sua estensione che generalizzi l'invarianza delle leggi fisiche a sistemi di riferimento in moto qualunque tra di loro. Questa

estensione è la Relatività Generale, cosiddetta in quanto non pone alcuna restrizione sul tipo di trasformazione di coordinate che lega i due sistemi.

Per il Principio di Equivalenza, le forze fittizie che nascono in un sistema di riferimento accelerato possono essere equiparate ad un campo gravitazionale. Durante le fasi in cui viene accelerato dalla forza *costante*  $F$ , definita nella (4.2) in termini di  $g$ ,  $V$  sperimenta delle forze non inerziali e le attribuisce alla presenza di un campo gravitazionale *costante* nel suo sistema di riferimento.  $S$  cade liberamente sotto l'azione di questo campo, e pertanto non sperimenta alcuna forza (in accordo con la descrizione del fenomeno fatta nel suo sistema di riferimento).

La traiettoria di un corpo in caduta libera in un campo gravitazionale, che nel nostro caso sarà  $S$ , è la "traiettoria geodetica" definita da

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0 \quad (4.11)$$

ove  $s$  è l'usuale elemento di linea invariante per trasformazioni di coordinate:  $ds^2 \equiv g_{\mu\nu}x^\mu x^\nu$ . Il tensore  $g_{\mu\nu}$  definisce la cosiddetta *metrica*. In particolare, conterrà informazioni circa il campo gravitazionale presente nel sistema di riferimento dato. Esplicitando la (4.11) in termini del parametro spazio  $x$  e del parametro tempo  $t$  del s.d.r. di  $V$  troviamo l'equazione parametrica della traiettoria

$$x(t) = \frac{c^2}{g} \left\{ \left( 1 + \frac{gx_0}{c^2} \right) \frac{1}{\cosh \frac{gt}{c}} - 1 \right\} \quad (4.12)$$

che viene percorsa con velocità

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = -c \left( 1 + \frac{gx_0}{c^2} \right) \frac{\sinh \frac{gt}{c}}{\cosh^2 \frac{gt}{c}} \quad (4.13)$$

La coordinata  $x_0$  indica la posizione del corpo all'inizio della traiettoria geodetica.

La relazione tra tempo proprio  $\tau$  e parametro tempo  $t$  differisce ora dalla (3.1) in quanto viene modificata dalla presenza di un potenziale gravitazionale  $\chi$ . Dall'espressione dell'invariante di linea in

termini della metrica e dunque del campo gravitazionale presente si trova infatti

$$d\tau = \frac{ds}{c} \sqrt{1 + \frac{2\chi}{c^2} - \frac{u^2}{c^2}} dt \quad (4.14)$$

e nel caso in esame il potenziale gravitazionale ha la forma

$$\chi = gx \left(1 + \frac{gx}{2c^2}\right) \quad (4.15)$$

È opportuno a questo punto notare che  $V$ , poiché si trova sempre nell'origine del suo sistema di riferimento, è soggetto - in accordo con l'espressione data sopra - ad un potenziale gravitazionale costantemente nullo. Inoltre, poiché la sua velocità nel proprio sistema di riferimento è parimenti nulla, varrà sempre la relazione  $\Delta\tau_V = \Delta t$ .

Inserendo nella (4.14) le espressioni per lo spostamento e la velocità in funzione di  $t$  e integrando lungo un intervallo di tempo  $\Delta t$  otteniamo

$$\Delta\tau = \left(\frac{c}{g} + \frac{x_0}{c}\right) \tanh \frac{g\Delta t}{c} \quad (4.16)$$

Possediamo ora tutti gli ingredienti necessari per valutare i tempi proprio dei due gemelli nelle varie fasi del viaggio.

	$S$	$V$
$\Delta t'$	$\tau'_S = \frac{c}{g} \tanh \frac{g\Delta t'}{c} = \frac{v}{g}$	$\tau'_V = \Delta t'$
$\Delta t''$	$\tau''_S = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t''$	$\tau''_V = \Delta t''$
$\Delta t'''$	$\tau'''_S = \left(\frac{c}{-g} + \frac{x_0}{c}\right) \tanh \frac{-g\Delta t'''}{c}$ $= \left(\frac{c}{g} - \frac{x_0}{c}\right) \tanh \frac{g\tau'_V}{c}$ $= \left(\frac{c}{g} - \frac{x_0}{c}\right) \frac{v}{c}$	$\tau'''_V = \tau'_V$

Prendendo anche in questo caso il limite per  $g \rightarrow \infty$  a  $v$  costante troviamo

$$\Delta t' = \Delta t''' \rightarrow 0 \quad (4.17)$$

$$\tau'_S \rightarrow 0 \quad (4.18)$$

$$\tau'_V = \tau'''_V \rightarrow 0 \quad (4.19)$$

in analogia al caso precedente. Ancora una volta  $\Delta t'''$  è stato posto uguale a  $\Delta t'$  in virtù della simmetria che lega le velocità iniziali e finali nei due intervalli. Il risultato importante è però costituito dal limite di  $\tau'''_S$  che *non* tende a zero:

$$\tau'''_S \rightarrow \frac{-x_0 v}{c^2} \quad (4.20)$$

Poiché nel limite  $\Delta t''' \rightarrow 0$   $S$  percorre distanza nulla nel terzo intervallo temporale, possiamo porre  $-x_0 = l$ , ove  $l$  è la massima distanza tra i due gemelli, ben definita ed uguale in entrambi i sistemi di riferimento in quanto nell'istante di massimo allontanamento i due s.d.r. sono a riposo l'uno rispetto all'altro. Il fatto che il tempo proprio sia diverso da zero anche se l'intervallo descritto dalla coordinata temporale  $t$  tende a zero è dovuto al valore infinito assunto dal potenziale gravitazionale (4.15) per  $x \neq 0$  nel limite  $g \rightarrow \infty$ .

Per valutare numericamente l'effetto di questo termine aggiuntivo utilizziamo per  $l$  il valore

$$l = v \Delta T'' \quad (4.21)$$

e la relazione tra  $\Delta t''$  e  $\Delta T''$

$$\Delta t'' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T'' \quad (4.22)$$

ricavata richiedendo l'uguaglianza del tempo proprio  $\tau_V = 2\tau''_V$  calcolato nei due sistemi di riferimento<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>In questo passaggio utilizziamo ciò che parremmo voler ricavare, e cioè l'uguaglianza dei tempi propri calcolati nei diversi sistemi di riferimento. Questo è lecito nel momento che ricordiamo che tale invarianza è comunque garantita a priori dalla teoria, e il calcolo presentato intende solo mostrare come contributi aggiuntivi precedentemente trascurati eliminino l'apparente paradosso.

Possiamo allora scrivere

$$\tau_V = 2\tau_V'' = 2\Delta t'' = 2\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T'' \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} \tau_S &= 2(\tau_S'' + \tau_S''') = 2 \left[ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta t'' + \frac{lv}{c^2} \right] = \\ &= 2 \left[ \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \Delta T'' \right) + \frac{v^2 \Delta T''}{c^2} \right] = \\ &= 2\Delta T'' \end{aligned} \quad (4.24)$$

Confrontando questi due ultimi risultati con le (4.8) e (4.9) possiamo notare come le espressioni dei tempi propri valutati nei due diversi sistemi di riferimento coincidano, eliminando così il paradosso precedentemente esistente. Anche il calcolo nel sistema di riferimento di  $V$  porta ora alla conclusione che il gemello viaggiatore rimane più giovane del fratello sedentario:

$$\tau_V < \tau_S \quad (4.25)$$

## 5 Conclusioni

Ci eravamo posti il problema di capire come mai l'applicazione della Relatività al problema dei gemelli fornisse un risultato paradossale, e cioè che ciascun gemello risultasse dopo il viaggio più giovane del fratello, a seconda che il calcolo fosse fatto nel sistema di riferimento dell'uno o dell'altro protagonista del confronto. Detto risultato è evidentemente non accettabile, e ha condotto alla denominazione di "paradosso" del problema. È stato inoltre a più riprese sfruttato per evidenziare una pretesa inconsistenza della Teoria della Relatività. In realtà, come abbiamo argomentato, esso nasce da un'applicazione incorretta della Relatività Speciale. Quest'ultima viene infatti utilizzata per effettuare il calcolo nel sistema di riferimento del gemello viaggiatore anche se egli, dovendo *necessariamente* alterare il proprio stato di moto (= accelerare e/o decelerare) almeno una volta nel corso del viaggio, allorché decida di invertire la propria

direzione e far ritorno sulla Terra, sperimenterà forze non inerziali uscendo così dal dominio della Relatività Speciale.

Abbiamo allora fatto appello alla Relatività Generale, che prevede l'invarianza delle leggi fisiche indipendentemente dallo stato di moto dei sistemi di riferimento utilizzati per il calcolo. In questo modo si è potuto mostrare come il tempo proprio dei due gemelli - cioè il loro invecchiamento - si distribuisca in modo diverso nelle varie fasi del viaggio a seconda del sistema di riferimento utilizzato, ma alla fine tutto concorra a far sì che la previsione della teoria circa le loro età relative sia univoca e non paradossale.

È pertanto da considerare come un fatto reale (ovviamente nei limiti di validità della Relatività Generale che - come del resto qualunque teoria - è sempre suscettibile di falsificazione) e non come uno strano artificio teorico inosservabile, che il gemello che viaggia nello spazio a grande velocità risulterà, al suo ritorno, più giovane del fratello rimasto a terra.

Desidero ringraziare il prof. A. Rimini per l'attenta lettura del manoscritto e per gli utili suggerimenti.

## Bibliografia

1. The Theory of Relativity, C. Møller, Second Edition, Clarendon Press, Oxford 1972
2. Essential Relativity, W. Rindler, Second Edition, Springer-Verlag, New York 1977

**Simona Rolli**

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica  
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare  
Sezione di Pavia**

# Transizioni di fase nel primo Universo

**Seminario tenuto il 23 Novembre 1993**

# 1 Introduzione

L'idea che esistano simmetrie della Natura per le quali lo stato di vuoto non è invariante, gioca un ruolo cruciale per quanto riguarda l'unificazione delle forze fondamentali: infatti in tutte le teorie di gauge unificate, incluso il Modello Standard, lo stato di vuoto stabile possiede una simmetria  $SU(3)_c \times U(1)_{em}$ , che è il risultato della rottura di un gruppo più ampio.

La previsione teorica che ad alta temperatura, simmetrie che oggi sono spontaneamente rotte, possano essere restaurate riveste particolare interesse nello studio delle prime fasi dell'Universo: quest'ultimo infatti ha avuto inizio da uno stato di densità e temperatura molto alte; in seguito all'espansione si è raffreddato e come conseguenza di ciò si sarebbero verificate alcune transizioni di fase, associate alla rottura spontanea di simmetrie di gauge o di simmetrie globali[1][2].

Si è ragionevolmente fiduciosi che ne siano avvenute almeno tre:

- 1) a tempi dell'ordine di  $10^{-34}$  sec e a temperature dell'ordine di  $10^{16}$  GeV si sarebbe avuta la rottura di un qualche gruppo di Grande Unificazione;
- 2) a  $t \sim 10^{-12}$  sec e a  $T \sim 10^2$  GeV sarebbe avvenuta la rottura della simmetria elettrodebole;
- 3) a  $t \sim 10^{-6}$  sec e a  $T \sim 1$  GeV sarebbe avvenuta la transizione di fase quark-adroni.

C'è inoltre la possibilità che durante una transizione di fase l'Universo abbia subito Inflazione[1, 3].

In questo lavoro, dopo una breve introduzione, analizzeremo (Sez. 2) gli effetti di temperatura finita nella determinazione del potenziale scalare ad un loop: lo studio delle transizioni di fase cosmologiche richiede l'utilizzo di un formalismo che tenga conto del fatto che i campi sono in interazione con un bagno termico: a questo scopo occorre considerare gli effetti della temperatura finita in una formulazione consistente di una teoria di campo. Considereremo come esempio la teoria  $\lambda\phi^4$  a temperatura finita e vedremo

come si attui il restauro della simmetria. Analizzeremo quindi da un punto di vista quantitativo l'effetto della temperatura finita sulla determinazione del potenziale ad un loop. Nella Sez. 2.3 analizzeremo la dinamica di una transizione di fase del I ordine, andando a considerare la probabilità di enucleazione di bolle nelle approssimazioni di parete sottile e di parete spessa. Nella Sez. 3 studieremo la transizione di fase elettrodebole [4], con particolare riguardo al carattere della transizione (I vs II ordine), considerando anche effetti non perturbativi nella determinazione del potenziale ad un loop a T finita. Infine nella Sez. 4 daremo un breve sguardo alla possibilità che si verifichi bariogenesi durante la transizione stessa.

## 2 Effetti di temperatura finita: ripristino della simmetria e transizioni di fase

### 2.1 Un semplice modello

Consideriamo la seguente Lagrangiana per un campo scalare:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - V(\phi) \quad (2.1)$$

dove

$$V(\phi) = -\frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \quad (2.2)$$

Il potenziale della (2.2), come si può vedere dalla Figura 1 dà luogo a rottura spontanea della simmetria: sono presenti infatti due minimi equivalenti (cioè due "vuoti" distinti sono possibili) per  $\sigma_\pm = \pm \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$  con  $V(\sigma_\pm) = -\frac{m^4}{4\lambda}$  e  $V''(\sigma_\pm) = 2m^2$ .

Il significato fisico della Lagrangiana in questione si recupera considerando le piccole oscillazioni attorno ad uno dei due minimi del potenziale: si evince che essa rappresenta appunto le oscillazioni di un campo scalare di massa  $\sqrt{2m^2}$  ( la massa del bosone fisico della teoria è determinata dalla curvatura del potenziale attorno

allo stato di vuoto:  $M^2 = V''(\sigma_{\pm}) = 2m^2 = 2\lambda\sigma_{\pm}^2$ ), più termini di autointerazione.

Mentre la Lagrangiana di partenza è invariante per la riflessione  $\phi \rightarrow -\phi$ , la scelta di uno dei due stati di vuoto, rompe tale invarianza, poichè ovviamente è  $\sigma_+ \neq \sigma_-$  per  $\sigma \neq 0$ .

Diremo che una simmetria della Lagrangiana, non rispettata dallo stato di vuoto è spontaneamente rotta.

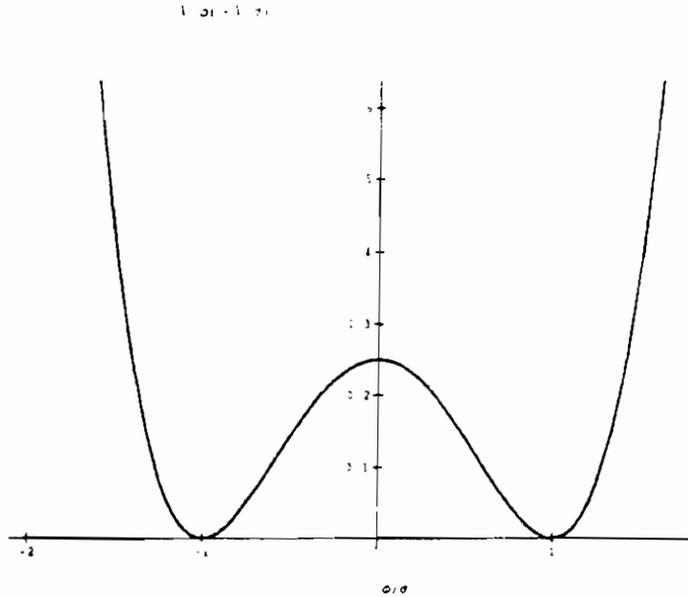


Figura 1: esempio di potenziale che dà luogo a rottura spontanea della simmetria.

## 2.2 Effetti di T finita

Il fenomeno del ripristino della simmetria ad alta temperatura può essere spiegato in diversi modi.

Da un punto di vista euristico, possiamo dire che l'effetto della temperatura finita sulla propagazione di una particella si manifesta come segue: se si cerca di costruire una teoria attorno al va-

lore di  $\langle \phi \rangle = 0$  usando il potenziale della (2.1) si trova una massa al quadrato del campo scalare negativa:  $V''(0) = -\lambda\sigma^2$ . Una massa immaginaria significa che la soluzione cresce esponenzialmente finchè non trova lo stato di vero vuoto. Tuttavia se il campo  $\phi$  è in contatto con un bagno termico, l'interazione di  $\phi$  con le particelle del bagno smorzerà tale crescita. Un modo di quantificare ciò è di assegnare a  $\phi$  una massa dipendente dalla temperatura che, su basi dimensionali, sarà del tipo  $m_{plasma}^2 \sim a\lambda T^2$ . A temperatura finita la massa effettiva dello scalare attorno alla soluzione classica  $\langle \phi \rangle = 0$  è data da:

$$m_T^2 = -\lambda\sigma^2 + m_{plasma}^2 \quad (2.3)$$

Per valori di  $T$  per cui  $m_T^2 < 0$ ,  $\langle \phi \rangle = 0$  è un punto instabile, segnalando SSB; mentre per valori di  $T$  per cui  $m_T^2 > 0$  la massa effettiva sarà reale e  $\langle \phi \rangle = 0$  diviene un minimo classico stabile del potenziale. C'è dunque una temperatura critica  $T_c = \sigma/a^{1/2}$  al di sopra della quale la simmetria è esatta.

Vediamo come ciò si possa quantificare tenendo conto dell'effetto del bagno termico nel calcolare le correzioni quantistiche al potenziale classico [5] [6].

Poichè vogliamo calcolare il potenziale effettivo ad un loop [7] a temperatura finita, occorre prima considerare brevemente le caratteristiche di una teoria di campo formulata tenendo conto della presenza di un bagno termico.

Una teoria di campo a temperatura finita è descritta da un insieme di funzioni di Green a  $T$  finita.

Consideriamo per semplicità una funzione di Green bosonica a due punti. Essa è definita dalla media di Gibbs:

$$\mathcal{G}(x, y; \tau, 0) = \frac{\text{Tr } \epsilon^{-\beta H} T_\tau [\phi(x, \tau) \phi(y, 0)]}{\text{Tr } \epsilon^{-\beta H}} \quad (2.4)$$

essendo  $\beta = 1/T$ .

Poichè  $T_\tau$  commuta con la matrice densità  $\epsilon^{-\beta H}$  e con  $H$ , e l'operazione di traccia è ciclica, possiamo scrivere la seguente identità ( $Z = \text{Tr } e^{-\beta H}$ ):

$$\mathcal{G}(x, y, ; \tau, 0) = Z^{-1} \text{Tr } [\epsilon^{-\beta H} \phi(x, \tau) \phi(y, 0)] =$$

$$\begin{aligned}
&= Z^{-1} \text{Tr} [\phi(y, 0) e^{-\beta H} \phi(x, \tau)] = \\
&= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta H} e^{\beta H} \phi(y, 0) e^{-\beta H} \phi(x, \tau)] = \\
&= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta H} \phi(y, \beta) \phi(x, \tau)] = \\
&= Z^{-1} \text{Tr} [e^{-\beta H} T_{\tau} [\phi(x, \tau) \phi(y, \beta)] = \\
&= \mathcal{G}(x, y, : \tau, \beta).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Vediamo quindi che le funzioni di Green a  $T$  finita obbediscono alle stesse equazioni cui obbediscono quelle a  $T=0$  ma hanno differenti condizioni al contorno, essendo periodiche nel tempo euclideo ( $\tau = it_m$ ) con periodo  $\beta$ , invece di avere le usuali condizioni a  $t_m = \pm\infty$ . Le funzioni di Green fermioniche obbediscono a condizioni di antiperiodicit .

Quindi per campi bosonici si avr :

$$\int d^4 x_E \rightarrow \int_0^{\beta} d\tau \int d^3 x \tag{2.6}$$

e, poich   $k_0 \rightarrow 2\pi nT$

$$\int dK_0 \rightarrow 2\pi T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} . \tag{2.7}$$

Per campi fermionici  $k_0 \rightarrow (2n + 1)\pi T$ .

Se a temperatura nulla la parte ad un loop del potenziale effettivo per campi scalari   data da[7]:

$$\frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{2\pi^4} \ln[k^2 + \mu^2(\phi)] \tag{2.8}$$

con  $\mu^2 = -m^2 + 3\lambda\phi^2$ , a  $T$  finita si avr :

$$\frac{1}{2} T \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int \frac{d^3 k}{2\pi^3} \ln[k^2 + (2\pi nT)^2 + \mu^2(\phi)] \tag{2.9}$$

da cui si ricava:

$$V_T = V_{T=0} + \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^{\infty} dx x^2 \ln \left[ 1 - \exp[-\sqrt{x^2 + \mu^2(\phi)}/t^2] \right]. \tag{2.10}$$

Pertanto possiamo dire che le correzioni a  $T$  finita aggiungono solo un termine al potenziale effettivo.

Per i fermioni si ha:

$$V_T = V_{T=0} - 4 \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[ 1 + \exp[-\sqrt{x^2 + \mu^2(\phi)/T^2}] \right]. \quad (2.11)$$

quattro essendo il numero dei gradi di libertà fermionici nell'ipotesi di trattare fermioni di Dirac.

Un approccio alternativo consiste nel considerare i propagatori a tempo reale (ovvero nello spazio-tempo di Minkowski)[6].

Il propagatore bosonico a  $T$  finita nello spazio di Minkowski assume la forma seguente:

$$D_B = \frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon} + \frac{2\pi}{\epsilon^{3H} - 1} \delta(k^2 - m^2) \quad (2.12)$$

Se una particella è on-shell ( $k^2 = m^2$ ) e quindi reale deve obbedire alla statistica del bagno termico: come sappiamo si hanno linee interne quando una particella è emessa e riassorbita. Se la particella emessa è reale, quando viene riassorbita non c'è modo di sapere se è quella che era stata emessa oppure proviene dal bagno termico. Quindi l'ampiezza deve contenere un termine con  $2\pi\delta(k^2 - m^2)$  moltiplicato per la distribuzione statistica del bagno termico e ciò è quanto è presente nella (2.12).

Possiamo quindi riassumere dicendo che il contributo di uno scalare o di un fermione al potenziale effettivo è dato da:

$$V' = \eta(T^4/2\pi^2) F_\pm(\mu^2(\phi_c)) \quad (2.13)$$

dove  $\eta$  è il numero di gradi di libertà e  $m^2(\phi_c)$  è la massa al quadrato del campo se  $\phi$  ha il valore  $\phi_c$ .  $F_\pm$  sono date da:

$$F_\pm = \pm \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[ 1 \mp \exp[-\sqrt{x^2 + \mu^2(\phi)/T^2}] \right] \quad (2.14)$$

per bosoni e fermioni rispettivamente.

Per analizzare il comportamento ad alta  $T$ ,  $V_T$  può essere sviluppato in serie di potenze di  $\mu^2(\phi_c)/T^2$  per  $T^2 \gg \mu^2$ . Si ottiene:

$$V' = -\frac{1}{90}\pi^2 T^4 + \frac{1}{24}\mu^2(\phi_c)T^2 + \dots \quad (2.15)$$

per campo bosonico ( $\eta = 1$ ).<sup>1</sup>

Ne consegue che

$$V = V_{T=0} + V' \sim \left(-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3\lambda}{24}T^2\right)\phi_c^2 + O(T^2) + O(T^4) + O(\phi_c^4) \quad (2.17)$$

La massa ora è data da  $-\frac{1}{2}m^2 + \frac{3\lambda}{24}T^2$  e nel limite di grandi  $T$  è positiva, cioè la curvatura del potenziale all'origine è positiva, indicando che per valori di  $T$  sufficientemente grandi esiste solo lo stato di vuoto simmetrico a  $\phi_c = 0$ .

Lo stesso discorso vale per il contributo fermionico:

$$V_T = -\frac{7}{180}\pi^2 T^4 + \frac{1}{12}\mu^2(\phi_c)T^2. \quad (2.18)$$

Quindi possiamo riassumere dicendo che, al di sotto della temperatura critica  $T_C$  l'estremo a  $\phi_c = 0$  è un massimo locale, mentre al di sopra di  $T_C$  esso diviene un minimo globale, di modo che  $\phi_c = 0$  è lo stato di vuoto. A temperature maggiori di  $T_C$  la simmetria di riflessione è quindi ripristinata, poichè lo stato di vuoto è  $\phi_c$ .

In generale una transizione dovuta a rottura della simmetria può essere del primo o del secondo ordine. La transizione dalla fase simmetrica a quella asimmetrica in questo caso è del II ordine (cfr. Figura 2). La dipendenza dalla temperatura per una transizione del I ordine è mostrata in Figura 3. Per  $T \gg T_C$  il potenziale

<sup>1</sup>Il potenziale effettivo a  $T$  finita può anche essere visto come la densità di energia libera associata al campo  $\phi$ :

$$V_T(\phi) = \rho_\phi - T s_\phi \quad (2.16)$$

da cui si può ricavare la densità di energia  $\rho_\phi = V_T(\phi) + T s_\phi$  dove  $s_\phi = -\frac{\partial V_T(\phi)}{\partial T}$ , e la pressione  $p_\phi = -V_T(\phi)$ . In questo senso nella (2.15) si riconosce nel primo termine l'energia libera di un bosone a massa nulla e spin nullo.

è quadratico con un solo minimo a  $\phi_c = 0$ . Quando  $T = T_{c2}$ , si sviluppa un minimo locale per  $\phi_c \neq 0$ . Per  $T = T_c$  i due minimi diventano degeneri e al di sotto di  $T_c$  il minimo a  $\phi_c \neq 0$  diviene il minimo globale.

Se per  $T \leq T_c$  l'estremo a  $\phi_c = 0$  rimane un minimo locale ci deve essere una barriera tra i due minimi. Quindi la variazione di  $\phi_c$  nell'andare da una fase all'altra deve essere discontinua, indicando una transizione di fase del I ordine.

La transizione non avviene classicamente ma procede tramite tunneling (quantistico o termico).

Quando  $T = T_{c1}$  la barriera scompare e la transizione procede classicamente.

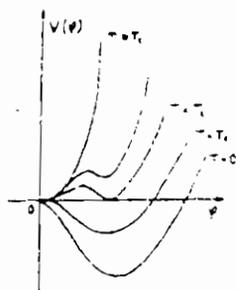


Figura 2: esempio di potenziale che dà luogo ad una transizione di fase del II ordine.

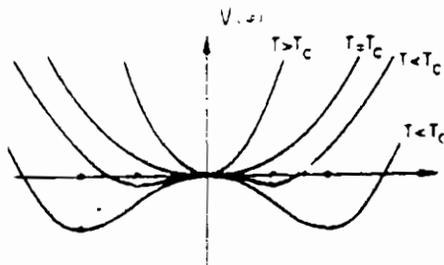


Figura 3: esempio di potenziale che dà luogo ad una transizione di fase del I ordine.

## 2.3 Dinamica di una transizione di fase del I ordine

In una transizione di fase cosmologica  $\phi$  evolve da un minimo simmetrico ad alta temperatura,  $\phi = 0$ , ad un minimo che evidenzia rottura spontanea,  $\phi = \sigma$ , a bassa temperatura. Nel caso di una transizione del I ordine c'è una barriera di potenziale che separa i due minimi. La barriera viene superata mediante tunneling termico. La rappresentazione convenzionale con cui viene descritta una transizione di fase cosmologica del I ordine prevede che l'Universo si espanda nella fase simmetrica e raffreddi finché non raggiunge una temperatura critica a cui la fase rotta diviene egualmente favorita. Per  $T \simeq T_c$  bolle di nuova fase vengono enucleate, ma la loro tensione superficiale è tale da non permettere una loro crescita. Tuttavia quando viene raggiunta una temperatura di poco inferiore alla temperatura critica, le bolle acquistano una energia di volume sufficiente a bilanciare l'effetto della tensione superficiale e a permettere alle bolle di crescere ed espandersi in modo da convertire l'intero universo a nuova fase. Parlare di probabilità di enucleazione di bolle equivale a parlare della probabilità di transizione da uno stato di falso vuoto ad uno stato di vero vuoto tramite tunneling termico. Tale probabilità risulta proporzionale alla seguente espressione:

$$\mathcal{P} \sim \exp\left(-\frac{\mathcal{F}_{crit}}{T}\right) \quad (2.19)$$

$\mathcal{F}_{crit}$  può calcolarsi [7, 8] trovando una configurazione di campo a simmetria sferica  $\phi(r)$  che è un punto stazionario dell'azione effettiva ed ha  $\phi \rightarrow 0$  per  $r \rightarrow \infty$  e  $\phi$  prossimo al minimo del potenziale effettivo per  $r \rightarrow 0$ .

L'energia libera di tale configurazione è approssimativamente data da:

$$S[\phi(r)] \sim \int r^2 dr \left[ \frac{1}{2}(\phi')^2 + V_T(\phi) \right] \quad (2.20)$$

ed un punto stazionario può essere ottenuto trovando la soluzione non banale dell'equazione di Eulero-Lagrange

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \phi') - \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0 \quad (2.21)$$

che soddisfi le condizioni al contorno

$$\phi(\infty) = 0, \quad \phi(0)' = 0. \quad (2.22)$$

Supponiamo ora che la differenza in energia tra i due vuoti sia piuttosto piccola ( Approssimazione di parete sottile, cfr. Figura 5a). La soluzione per  $\phi(r)$  è mostrata in Figura 5.

Lontano dal centro ( $r = \infty$ ) il campo rimane nello stato di falso vuoto che chiameremo  $\phi_A$ : c'è una sottile parete intorno alla quale  $\phi$  varia rapidamente ed entro cui si trova nello stato di vero vuoto. Nel caso di piccola differenza di energia si possono risolvere analiticamente le equazioni del moto e la forma in prossimità della parete della bolla è data da una funzione tanh.

Si suppone che la transizione avvenga rapidamente per un certo valore di  $r = r_0$ . In una approssimazione piuttosto semplificata diremo che:

$$\phi(r) = \phi_B \quad pcr \quad r \leq r_0 \quad (2.23)$$

$$\phi(r) = \phi_A \quad pcr \quad r \geq r_0 \quad (2.24)$$

L'espressione analitica della soluzione nella approssimazione di parte sottile è la seguente:

$$\phi^{TW}(r) = \frac{1}{2}\phi_B \left[ 1 - \tanh \frac{r - r_0}{\Delta} \right] \quad (2.25)$$

valida per  $r \sim r_0$  (dove cioè  $0 \ll \phi \ll \phi_B$ ).  $\Delta = \phi_B^{-1} \sqrt{8/\lambda}$  rappresenta lo spessore della bolla.

In definitiva diremo che:

$$\phi(r) = \begin{cases} \phi_B & pcr \quad r \ll r_0 \\ \phi^{TW}(r) & pcr \quad r \sim r_0 \\ \phi_A & pcr \quad r \gg r_0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Quindi

$$- 2\pi^2 r_0^2 \Delta V + 2\pi^2 r_0^2 \int_0^{\phi_B} d\phi \sqrt{2V_0(\phi)} \quad (2.27)$$

dove il primo termine rappresenta la densità di energia di volume ed il secondo termine la densità di energia superficiale della bolla ( $V_0(\phi)$  rappresenta il potenziale nel limite in cui i due minimi siano esattamente degeneri).

Se l' approssimazione di parete sottile non é valida, occorre trovare il punto stazionario dell'azione risolvendo l'equazione del moto di una particella in un potenziale  $-V$  (cfr. fig. 4b) con attrito che si smorza come  $\frac{1}{r}$ . L'andamento della soluzione è mostrato in Figura 6.

La transizione si completa quando le bolle di nuova fase riempiono totalmente l'Universo. Se la probabilità di creare una bolla è proporzionale a

$$\mathcal{P}(t) = \frac{1}{R^4} \exp\left(-\frac{\mathcal{F}(T)}{T}\right) dt dV \quad (2.28)$$

ed il volume della bolla all'istante  $t$  creata a  $t = t_1$  è dato da

$$\frac{4}{3} \pi v^3 (t - t_1)^3. \quad (2.29)$$

la parte di spazio occupata dalle bolle è data dall'integrale seguente:

$$\begin{aligned} & \int_{t_2}^{t_1} \frac{4}{3} \pi v^3 (t - t_1)^3 \frac{1}{R^4} \exp\left(-\frac{F_{crit}}{T_1}\right) dt_1 \sim \\ & \sim \int \frac{dT}{T} \frac{4}{3} \pi v^3 \frac{M_0^4}{(RT_1)^4 T_1^4} \exp\left(-\frac{F_{crit}}{T_1}\right) \sim \\ & \sim \int \frac{dT}{T} \exp\left[-\frac{F_{crit}(T_1)}{T_1} + \ln \frac{4}{3} \pi v^3 \frac{M_0^4}{(RT)^4 T^4}\right] \end{aligned} \quad (2.30)$$

dove l'integrale temporale viene trasformato in una integrazione su  $T$  ricordando che in un Universo dominato da radiazione vale la relazione seguente tra tempo e temperatura:

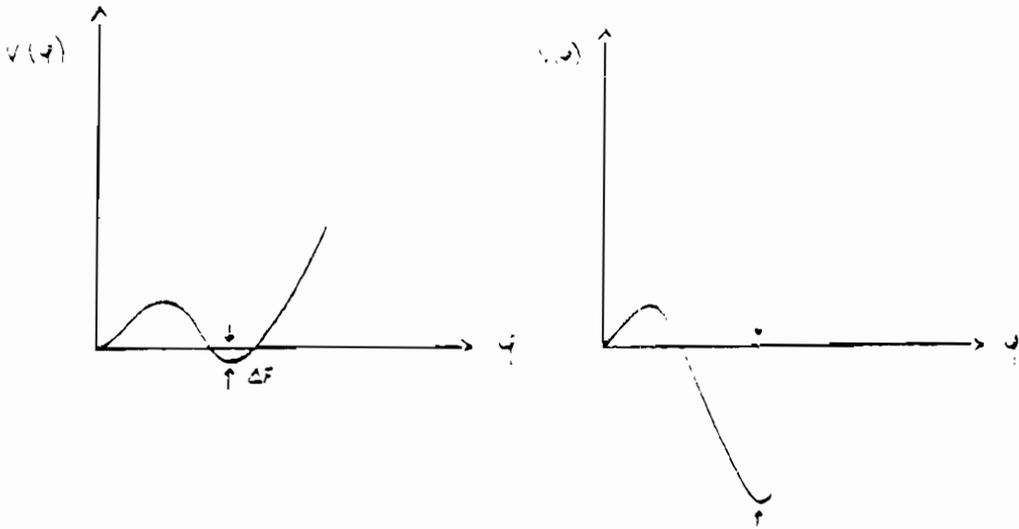
$$t = \frac{M_0}{T^2} \quad (2.31)$$

essendo  $M_0 = \frac{M_{Planck}}{1.66 N_{eff}^{1/2}} \sim 10^{18} \text{ GeV}$ .

La transizione risulta completata quando

$$\frac{\mathcal{F}(T^*)}{t^*} \sim 4 \ln \frac{M_0}{T^*} \quad (2.32)$$

Per le teorie di Grande Unificazione, essendo  $T \sim 10^{15}$  GeV,  $\frac{E_{crit}(T^*)}{T^*} \sim 30$ , mentre per la teoria elettrodebole, essendo  $T \sim 100$  GeV,  $\frac{E_{crit}(T^*)}{T^*} \sim 150$ . Generalmente  $T^*$  è compresa tra la temperatura di barriera ( la temperatura a cui comincia ad evidenziarsi il secondo minimo) e la temperatura critica. *Figura 4:*



a) potenziale nell'approssimazione di parete sottile; b) potenziale nell'approssimazione di parete spessa.

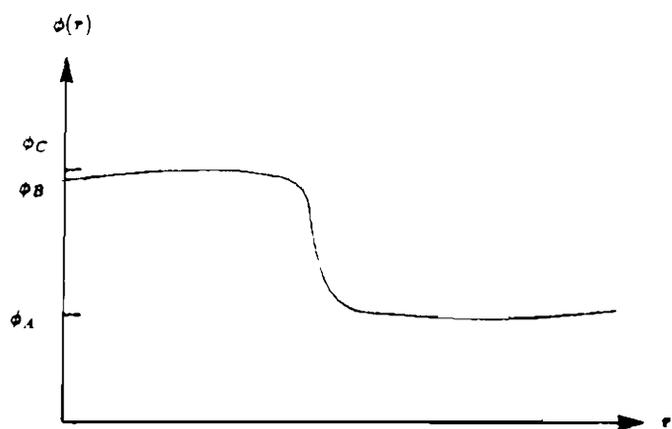


Figura 5: Soluzione per  $\phi(r)$  nel caso in cui la differenza di energia tra i due vuoti è piccola (Thin Wall Approximation).

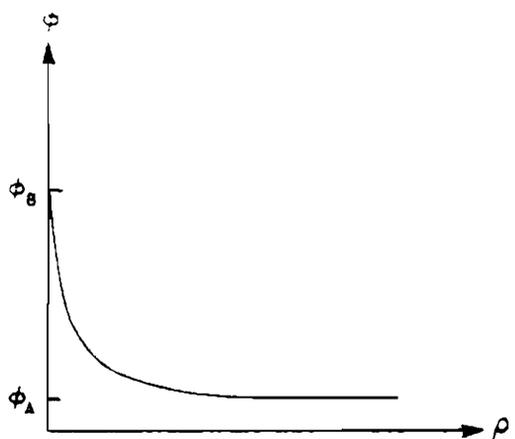


Figura 6: Forma della bolla quando l'approssimazione Thin Wall non è più valida.

### 3 Rottura della Simmetria Elettrodebole

La simmetria della teoria è  $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$  che viene rotta a  $U(1)_{em}$  da un doppietto di scalari complessi,  $\Phi$ , con potenziale  $V(\Phi) = -m^2\Phi^\dagger\Phi + \lambda(\Phi^\dagger\Phi)^2$ . Possiamo esprimere  $\Phi$  in termini di quattro campi scalari reali:

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi + i\phi_3 \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

con  $\Phi^\dagger\Phi = (\phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi^2)/2$ .

Poichè il potenziale dipende da  $\Phi^\dagger\Phi$  la direzione del minimo rimane indeterminata nello spazio  $\Phi$  e la sua scelta è arbitraria. Lo sceglieremo lungo la parte reale della componente neutra, cioè lungo la direzione di  $\phi$ . Il potenziale per  $\phi$  risulta pertanto dato da:

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 \quad (3.2)$$

ed il valore di aspettazione sul vuoto di  $\phi$  è pari a  $\frac{m^2}{\lambda} = \sigma^2$ .

Come è noto la rottura della simmetria elettrodebole dà, mediante il meccanismo di Higgs, le masse dei bosoni vettori  $W^\pm$  e  $Z^0$  e dei fermioni:

$$M_W^2 = \frac{1}{4}g^2\sigma^2 \quad (3.3)$$

$$M_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)\sigma^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2\theta_W} \quad (3.4)$$

$$M_f^2 = \frac{1}{2}h_f^2\sigma^2 \quad (3.5)$$

E il valore di  $\sigma$  viene determinato dall'effettiva interazione di Fermi a quattro fermioni:

$$\sigma \sim 247 \text{ GeV} \quad (3.6)$$

Poichè il bosone di Higgs si accoppia sia ai bosoni di gauge che ai fermioni, nello sviluppo ad un loop del potenziale si hanno

contributi addizionali; a temperatura  $T = 0$  si ha:

$$\begin{aligned}
 V(\phi_c) = & -\frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi_c^4 \\
 & + \frac{1}{64\pi^2}(-m^2 + 3\lambda\phi_c^2)^2 \ln\left(\frac{-m^2 + 3\lambda\phi_c^2}{\mu^2}\right) \\
 & + \frac{3}{1024\pi^2}[2g^4 + (g^2 + g'^2)^2]\phi_c^4 \ln(\phi_c^2/\mu^2) \\
 & - \frac{3}{64\pi^2}h_t^4\phi_c^4 \ln(\phi_c^2/\mu^2)
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il contributo dei bosoni di gauge al termine  $\phi_c^4 \ln(\phi_c^2)$  è  $1.75 \cdot 10^{-4}$ ; il contributo del quark top è  $-5.19 \cdot 10^{-4}(M_{top}/100 \text{ GeV})^4$ ; il contributo del bosone di Higgs è  $9.73 \cdot 10^{-5}(M_H/100 \text{ GeV})^4$ .

A priori tutti i termini sono dello stesso ordine: consideriamo il caso in cui  $M_H \leq 100 \text{ GeV}$  ed il contributo dei loop scalari può essere trascurato: il potenziale (3.7) viene riscritto come segue:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) = & -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \lambda\phi^4 + B\phi^4 \ln\left(\frac{\phi^2}{\mu^2}\right) = \\
 & -\frac{1}{2}(B + 2\lambda)\sigma^2\phi^2 + \lambda\phi^4 + B\phi^4 \ln\left(\frac{\phi^2}{\sigma^2}\right)
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

(La richiesta che  $V'(\sigma) = 0$  implica che  $m^2 = 2(B + 2\lambda)\sigma^2$ ), e

$$B = \frac{3}{64\pi^2}(2m_W^4 + m_Z^4 - 4m_t^4)/\sigma^4. \tag{3.9}$$

Esprimeremo tutte le masse delle particelle in termini del vev del campo di Higgs. La massa di quest'ultimo è data da  $M_H^2 = 4\sigma^2(3B + 2\lambda)$ . Per  $\lambda \ll g_W^2$  il contributo principale al potenziale effettivo a temperatura finita viene dai loop di gauge; il risultato del calcolo standard nel limite di alta temperatura è il seguente[6][10]:

$$\Delta V_T = \frac{1}{8}T^2\phi^2(2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2) - \frac{T\phi^3}{4\pi}(2m_W^3 + m_Z^3). \tag{3.10}$$

Lo sviluppo ad un loop naïve funziona a patto che la massa del bosone di gauge indotta dal meccanismo di Higgs,  $M_W(\phi) = \frac{1}{2}g_W\phi$ , sia più grande della cosiddetta scala dello screening di Debye (o massa di plasma longitudinale)<sup>2</sup> [11][12][13],  $M_D = C_D g_W T$  (per la

<sup>2</sup>Tali masse (ci riferiamo anche alla massa trasversa di cui parleremo tra breve) rappresentano correzioni alle masse dei bosoni di gauge, dovute a termini di autointerazione tipici delle teorie non abeliane. Tali termini addizionali curano anche il problema infrarosso della teoria [16][15], che si manifesta nell'apparire di potenze del tipo  $(\frac{qT}{m})^n$  che divengono molto grandi per  $\phi \rightarrow 0$ .

teoria elettrodebole con tre famiglie fermioniche. ( $C_D = \frac{11}{6}$ ). Per andare a valori più piccoli del campo  $\phi$  occorre risommare la serie perturbativa, e ciò può essere fatto considerando le equazioni del gruppo di rinormalizzazione per le masse di plasma. L'effetto della risommazione riduce il coefficiente del termine in  $\phi^3$  di un fattore  $\frac{2}{3}$  [14], di modo che la transizione di fase risulta più debolmente del I ordine di quanto ci si aspetterebbe dalla (3.10). Il potenziale effettivo tenendo conto di ciò, diviene:

$$\Delta V_T = \frac{1}{8}(T^2 - T_0^2)\phi^2(2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2) - \frac{2}{3} \frac{T\phi^3}{4\pi}(2m_W^3 + m_Z^3) + \lambda\phi^4. \quad (3.11)$$

dove

$$T_0^2 = \frac{8\sigma^2(B + 2\lambda)}{2m_W^2 + m_Z^2 + 2m_t^2}. \quad (3.12)$$

Per  $M_H$  sufficientemente piccola, il calcolo perturbativo *improved* del potenziale effettivo è autoconsistente se  $M_W(\phi) > M_M \sim \frac{1}{3\pi}g_W^2 T$  [11, 12, 13], dove  $M_M$  è la cosiddetta massa magnetica (o massa di plasma trasversa): quest'ultima rappresenta un contributo nel termine cubico dell'ordine  $g_W^6$ , quindi il potenziale dovrebbe essere calcolato allo stesso ordine. Poichè ciò non è stato fatto, per tenere conto della cosa si è parametrizzata la massa magnetica come  $\gamma \frac{g_W^2 T}{3\pi}$  dove  $\gamma$  tiene conto di questa incertezza. La soluzione delle equazioni del gruppo di rinormalizzazione danno  $\gamma$  dell'ordine di 1. In tal caso la transizione rimane del I ordine per  $m_H \leq 85$  GeV (correzioni d'ordine superiore abbassano il limite a 70 GeV).<sup>3</sup>

Ci si aspetta pertanto che la transizione sia debolmente del I ordine per tali valori della massa dell'Higgs. Per valori più grandi, l'approssimazione non risulta più valida, nonostante ci siano attualmente indicazioni che la transizione possa essere del II ordine [12]. Pertanto diremo che calcoli perturbativi del potenziale effettivo sembrano dare luogo ad una rappresentazione autoconsistente delle transizioni di fase nella teoria elettrodebole, con costanti di autointerazione scalare sufficientemente piccole ( $\lambda \ll g_W^2$ ). La sola richiesta è che  $M_M/m_W(\phi) \sim \frac{2g_W T}{3\pi\phi} \ll 1$ .

<sup>3</sup>Se la massa magnetica fosse poi più grande ( $\gamma \geq 2.5$ ) la transizione risulterebbe del II ordine in ogni caso [13].

Tale rapporto è invero piccolo per gli intervalli interessanti di temperature e campi  $\phi$  per transizioni cosmologiche di GUT e elettrodeboli, di modo che si potrebbe pensare di spiegare in modo sufficientemente completo il fenomeno.

Tuttavia Shaposhnikov[9] ha mostrato che effetti non perturbativi nelle teorie di gauge 3-d associati ad effetti di confinamento possono modificare la dinamica delle transizioni di fase. In particolare vengono generati condensati di campi differenti, tipo condensati gluonici, che diminuiscono l'energia del vuoto della fase rotta. Tale mutamento provoca una diminuzione della temperatura critica della transizione di fase e crea una ulteriore barriera che separa le due fasi.

Per il Modello Standard Minimale tali effetti non perturbativi possono rendere la transizione fortemente del I ordine ( e rendere così possibile il meccanismo di bariogenesi) per gli intervalli attualmente permessi per  $M_{Higgs}$  e  $M_{top}$ .

Il potenziale a  $T \neq 0$  viene modificato da effetti non perturbativi per valori piccoli di  $\lambda$  e  $m^2(T)$  nel modo che segue:

$$V_{tot} = V_T(\phi) - \frac{T}{12} \langle F_{ij}^a F_{ij}^a \rangle(\phi). \quad (3.13)$$

dove

$$\langle F_{ij}^a F_{ij}^a \rangle(\phi) = A_F \frac{g_3^6}{\Gamma(\frac{15}{2}) 2^{\frac{13}{2}}} z^{\frac{15}{2}} K_{\frac{15}{2}}(z). \quad (3.14)$$

$K$  è la funzione di Bessel modificata.  $A_F$  è un numero,  $g_3^2 = g_W^2 T$  e

$$z = \frac{3\pi^2 v}{\sqrt{2} g_3}. \quad (3.15)$$

Il potenziale (3.13) è mostrato in Figura 7 in funzione di  $z$  a differenti valori della temperatura, per  $M_H = 90$  GeV e  $A_F = 0.36$ . Il contributo non perturbativo decresce esponenzialmente col campo  $\phi$ , di modo che gli effetti non perturbativi vengono congelati nella fase rotta. Si ottiene uno spostamento negativo dell'energia all'origine e tale effetto decresce esponenzialmente nella fase rotta.

Con il potenziale (3.13), si può studiare la dinamica della transizione di fase: il punto cruciale sarà il calcolo dell'energia libera delle bolle di nuova fase. La procedura standard, come abbiamo visto, richiede che venga minimizzata l'azione effettiva per il campo scalare:

$$S_{eff} = \int d^3x \left( \frac{1}{2} (\partial_i \phi)^2 + V_{tot} \right) \quad (3.16)$$

con le condizioni al contorno che abbiamo visto nella sezione 2.3. La transizione di fase si completa ad una temperatura  $T_*$  per cui l'azione della bolla è approssimativamente [17]:

$$4 \log \left( \frac{M_{Pl}}{T} \right) \sim 160 \quad (3.17)$$

Il problema può essere risolto numericamente (vedi Ref. [9]): il risultato netto è un cambiamento del potenziale all'origine ed una conseguente conversione di una transizione debolmente del I ordine in una transizione fortemente del I ordine, a patto che  $A_F$  non sia troppo piccola. A sostegno di tale osservazione esistono simulazioni su reticolo in quattro e tre dimensioni [18] [19] della transizione elettrodebole, che indicano che la transizione è più fortemente del I ordine di quanto ci si aspetti da semplici calcoli perturbativi.

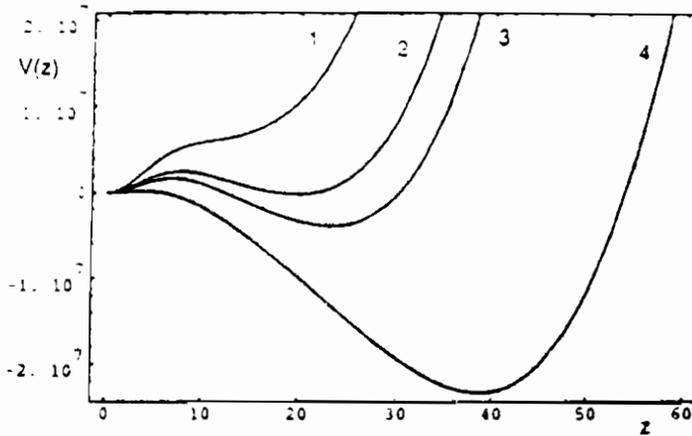


Figura 7: Potenziale effettivo come funzione di  $z$  per  $m_H = 90$  GeV a  $A_F = 0.36$ , per differenti temperature. Curva 1  $T=220$  GeV, curva 2  $T=199$  GeV, curva 3  $T=190$  GeV, curva 4  $T=150$  GeV. Dalla referenza [9].

## 4 Applicazioni alla bariogenesi elettrodebole

Certe caratteristiche chiave dell'Universo osservabile sono spesso il risultato di fenomeni transienti che sono occorsi durante la sua evoluzione. La transizione elettrodebole è uno di tali fenomeni. Fino a pochi anni fa, tuttavia, si riteneva che essa non avesse avuto conseguenze sull'Universo attuale. In un lavoro ormai classico, Kuzmin, Rubakov, Shaposhnikov [20] hanno mostrato il contrario. Essi hanno infatti scoperto la possibilità che l'asimmetria materia-antimateria, possa essere stata prodotta durante la transizione elettrodebole tramite meccanismi non perturbativi. A questo fine è però necessario che la transizione sia del I ordine, per assicurare la realizzazione della condizione di allontanamento dall'equilibrio termico. In questa sezione analizzeremo le condizioni necessarie perchè si verifichi bariogenesi e le attuali tendenze a spiegare il fenomeno [21].

L'abbondanza attuale di barioni implica che quando l'Universo era molto più caldo di temperature dell'ordine del GeV, l'asimmetria barioni-antibarioni doveva essere molto piccola:

$$\frac{n_q - n_{\bar{q}}}{n_q} \sim 3 \times 10^{-8}, \quad (4.1)$$

cioè per ogni 30 milioni di antiquarks sarebbero esistiti 30 milioni e 1 quarks! La bariogenesi intende spiegare come questo numero curioso ( ma cruciale) possa essere derivato in Universo inizialmente simmetrico, o eventualmente senza tenere conto di ogni eventuale simmetria iniziale.

Sakharov [22] ha mostrato in un lavoro del 1967 che l'asimmetria cosmologica tra materia e antimateria può essere il risultato di interazioni tra particelle che possiedano le seguenti caratteristiche:

- di violare B;
- di non conservare C e CP;

- di avvenire lontano dall'equilibrio termico, poichè il numero di barioni e antibarioni è uguale all'equilibrio termico a seguito dell'invarianza CPT. Ricordiamo all'uopo che tutte le interazioni conosciute sono in equilibrio termico per temperature tra 100 GeV e  $10^{12}$  GeV.

Inizialmente Sakharov aveva suggerito che la bariogenesi potesse avere avuto luogo immediatamente dopo il Big Bang, a temperature dell'ordine della scala di Planck, nello scenario esplicitamente realizzato con l'avvento delle teorie di Grande Unificazione, che predicevano violazione del numero barionico e possibile violazione di CP mediati da particelle ultra pesanti (leptoquarks). Tuttavia lo scenario delle GUT standard si è rivelato non accettabile per quanto riguarda certe caratteristiche della cosmologia standard ed inflazionaria. Una delle difficoltà è per esempio dovuta al fatto che nel modello standard elettrodebole il numero barionico è violato da interazioni anomale con un rate che a bassa temperatura è esponenzialmente soppresso ( $\exp(-4\pi/\alpha_w) \sim 0$ ). A temperature sopra i 100 GeV, la violazione del numero barionico può procedere in maniera sufficientemente rapida da equilibrare a zero ogni asimmetria prodotta durante l'epoca di Grande Unificazione. Tuttavia i processi elettrodeboli anomali conservano  $B-L$  cosicchè un  $B-L$  netto creato durante GUT non viene cancellato dall'interazione elettrodebole. Nel Modello Standard Minimale se  $B-L$  è non nullo a temperatura zero, allora il numero di barioni all'equilibrio ad alta  $T$  è  $B = (12/37)(B-L)$ . La possibilità che il numero di barioni osservati oggi sia il residuo di un  $B-L$  netto creato alla scala di GUT sarebbe in un certo senso ridimensionata se fosse scoperta nuova fisica che violi  $B-L$  (tipo masse di neutrini di Majorana).<sup>4</sup>

Un'altra difficoltà è connessa al fatto che tale scenario si deve collocare in modelli inflazionari dell'evoluzione dell'Universo, e questo fatto richiede un certo fine-tuning dei parametri della teoria. Il problema è che la bariogenesi deve essere avvenuta dopo l'inflazione (in caso contrario una eventuale asimmetria verrebbe esponenzial-

---

<sup>4</sup>in tal caso infatti, non si avrebbe più la conservazione del numero leptonico da parte delle interazioni elettrodeboli. Se esistesse un periodo di equilibrio per le interazioni che violano il numero leptonico connesse con le masse di Majorana dopo la generazione della asimmetria fermionica, allora tutta la BAU prodotta alla scala delle GUT sarebbe cancellata.

mente diluita) e quindi la temperatura dopo l'inflazione deve essere più grande della massa dei leptoquarks.  $M_X \sim 10^{15}$  GeV, e nella maggior parte dei modelli non è facile realizzare questa condizione.

Dunque lo scenario GUT sembra non essere in grado di spiegare la bariogenesi. Nel loro lavoro, Kuzmin Rubakov e Shaposhnikov [20] hanno mostrato come sia possibile uscire dall'impasse suggerendo che la violazione del numero barionico anomala non risulta più esponenzialmente soppressa ad alta  $T$  e che, a patto che la transizione sia del I ordine, essa offre un modo naturale per allontanarsi dall'equilibrio termico a temperature dell'ordine della scala elettrodebole.

Un test cruciale della bariogenesi alla scala elettrodebole viene dalla richiesta che ogni barione prodotto durante la transizione sopravviva fino all'epoca presente. Se il tasso di violazione anomala è più veloce del rate di espansione dell' Universo ciò non avviene.

Nella fase rotta il tasso di violazione di  $B$  è proporzionale a  $\exp(-\mathcal{O}(1)4\pi v/gT)$ , dove  $v$  è il valore di aspettazione sul vuoto del campo scalare. Richiedere soppressione della violazione anomala immediatamente dopo la transizione richiede un grande salto nel valore del vev dell'Higgs durante la transizione, cioè:

$$v(T)/T \geq 1 [23] \quad (4.2)$$

Ciò pone limiti superiori alla massa dell'Higgs, che sono dell'ordine di 45 GeV nell'ambito di una analisi perturbativa del potenziale ad un loop, e quindi parrebbero escludere bariogenesi alla scala elettrodebole, alla luce dei limiti sperimentali sulla massa dell'Higgs provenienti dalle misure di LEP. Tuttavia, come abbiamo visto nella sezione precedente, effetti non perturbativi possono cambiare la natura della transizione. Con il potenziale dato dalla (3.13), la massa critica del bosone di Higgs diviene più grande e dipende dal parametro  $A_F$ . Per valori ragionevoli di questo parametro la massa critica dell'Higgs giace negli intervalli attualmente permessi sperimentalmente [9].

## 5 Conclusioni

Il contenuto di questo breve lavoro sulle transizioni di fase nel primo universo, può schematicamente essere distinto in due parti.

Nella prima sono stati introdotti gli strumenti formali atti allo studio delle transizioni di fase ad alta temperatura: sono stati analizzati gli effetti di un bagno termico nella determinazione delle correzioni di ordine superiore al potenziale ad un loop, presentando i principali risultati della teoria dei campi a  $T$  finita. Con un certo dettaglio si è discusso il fenomeno del tunneling quantistico e termico, in relazione alla possibilità che si verifichino transizioni di fase del I ordine, studiando la cosiddetta soluzione di *bounce* nell'approssimazione di parete sottile.

Nella seconda parte del lavoro è stato preso in considerazione il problema specifico delle transizioni di fase cosmologiche mediante l'analisi della transizione di fase connessa alla rottura della simmetria elettrodebole: in relazione a recenti lavori[9] si è considerato il carattere della transizione e si è accennato al fatto che, a causa di effetti non perturbativi, la transizione possa essere fortemente del I ordine, pur rimanendo nell'ambito delle previsioni del Modello Standard Minimale con un doppietto di Higgs. Tale caratteristica può avere interessanti conseguenze per quanto riguarda la generazione dell'asimmetria barionica durante la transizione di fase elettrodebole[24].

## 6 Ringraziamenti

L'idea di questo seminario è nata in seguito alle lezioni seguite questa estate presso l'ICTP durante la *Summer School in High Energy Physics and Cosmology*. Desidero ringraziare la Sezione di Pavia dell'INFN che ha reso possibile il mio soggiorno a Trieste.

Desidero inoltre ringraziare il professor V. de Alfaro per i preziosi commenti espressi in fase di revisione del manoscritto.

## References

- [1] Per un'introduzione al problema delle transizioni di fase nel primo universo si veda ad esempio: E. W. Kolb and M. Turner: *The Early Universe*, Addison Wesley, 1990.
- [2] M. Sher, *Phys. Rep.* 179 (1989) 273.
- [3] A. H. Guth, *Phys. Rev. D* 23 (1981) 347.
- [4] P. Huet, Aspects of the Electroweak phase transition: talk presented at 1992 Meeting of the Division of Particles & Fields of the APS, Batavia, IL, November 1992.
- [5] S. Weinberg, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 3357.
- [6] L. Dolan and R. Jackiw, *Phys. Rev. D* 9 (1974) 3320.
- [7] S. Coleman and E. Weinberg. *Phys. Rev. D* 7 (1973) 1888.
- [8] S. Coleman *Phys. Rev. D* 15 (1977) 2929.
- [9] M. Shaposhnikov; CERN-TH.6918/93.
- [10] D.A. Kirzhnits and A.D. Linde, *Ann. Phys.* 101 (1976) 195; A.D. Linde, *Nucl. Phys. B* 216 (1983) 421, *Rep. Prog. Phys.* 47 (1984) 925.
- [11] P. Arnold and E. Espinosa. Preprint UW/PT-92-18, 1992.
- [12] M. Quiros, J.R. Espinosa and F. Zwirner. Preprint CERN-TH.6577/92, 1992.
- [13] W. Buchmüller, Z. Fodor, T. Helbig and D. Walliser. Preprint DESY 93-021, 1993.
- [14] M. Dine, R.G. Leigh, P. Huet, A. Linde and D. Linde. *Phys. Rev. D* 46 (1992) 550.
- [15] A.D. Linde, *Phys. Lett.* 96B (1980) 289.
- [16] D. Gross, R. Pisarski and L. Yaffe. *Rev. Mod. Phys.* 53 (1981) 43.

- [17] A.D. Linde, Nucl.Phys. B216 (1983) 421.
- [18] B. Bunk, E.-M. Ilgenfritz, J. Kripfganz, A. Schiller, Phys. Lett. B284 (1992) 371; Bielefeld Preprint BI-TP 92/46.
- [19] K. Kajantie, K. Rummukainen and M. Shaposhnikov, CERN preprint CERN-TH.6901/93, 1993.
- [20] V. A. Kuzmin, V. A. Rubakov, M. E. Shaposhnikov, Phys. Lett. B 155 (1982) 36.
- [21] A. G. Cohen, D. B. Kaplan, A. E. Nelson, Ann. Rev. Nucl. Part. Sci. 43 (1993).
- [22] A. D. Sakharov, JETP Lett. 5 (1967) 24.
- [23] M. E. Shaposhnikov, JETP Lett. 44 (1986) 364; Nucl. Phys. B 287 (1987) 757; Nucl. Phys. B 299 (1988) 797; Phys. Lett. B 282 (1992) 483.
- [24] G.R. Farrar and M.E. Shaposhnikov, Phys. Rev. Lett. 70 (1993) 2833; Preprint CERN-TH.6734/RU-93-11, 1993.



**Matteo Paris**

**Dipartimento di Fisica A. Volta  
Università di Pavia**

# Sulla Stabilità Dinamica della Bicicletta

**Seminario tenuto il 17 Dicembre 1993**



# 1 Introduzione

La maggioranza delle persone (e dei fisici) é in grado di imparare a guidare una bicicletta, apparentemente nessuno é in grado di spiegare, in termini semplici, quali siano i meccanismi fisici che glielo permettono. Nelle trattazioni piú complete ed estese che io conosco l'insieme bicicletta + ciclista é modellizzato come un sistema di tre masse <sup>1</sup>con otto gradi di libert , per integrare il quale si debbono risolvere otto equazioni differenziali accoppiate in cui compaiono piú di settanta parametri [1]. In un simile modello é probabilmente racchiusa tutta la fisica della bicicletta, ma é sicuramente molto difficile trovare in esso delle risposte semplici alle domande:

“Perch  una bicicletta rimane in equilibrio ? ”. (1.1)

“Come un ciclista evita di cadere ? ”.

In questo lavoro mi propongo invece di dimostrare che, in accordo alla relativa semplicit  del sistema meccanico rappresentato dalla bicicletta, é possibile rispondere a questi quesiti in termini rigorosi ma semplici, utilizzando strumenti noti a chi abbia seguito un corso di Fisica Generale. Parte dei risultati e delle figure é tratta dai lavori di Lowell e McKell [2], Jones [3] e Kirshner [4] ai quali rimando per maggior completezza.

La risposta piú semplice ai quesiti (1.1) é che il ciclista bilancia la bicicletta, cio  muove se stesso e/o la bicicletta stessa in modo che il centro di massa del sistema cada sempre sulla linea che congiunge i punti di contatto tra le ruote ed il suolo. Questo é un modello di stabilit  statica, che appare perch  poco plausibile: é infatti facilmente sperimentabile come una bicicletta ferma sia sostanzialmente ingovernabile e come viceversa una in moto si possa facilmente mantenere in equilibrio. La stabilit  della bicicletta dovr  dunque essere il risultato di un processo dinamico. Nel paragrafo 2 trascureremo la dinamica interna del moto della bicicletta, cio  non si prender  in considerazione alcun momento rotazionale. Si mostrer  come il centro di massa del sistema possa rimanere in equilibrio se il ciclista, quando sente la bicicletta cadere, sterza nella direzione della caduta in modo da portarsi in una traiettoria circolare di

---

<sup>1</sup>Il ciclista, il corpo della bicicletta e la ruota anteriore

raggio tale da generare una forza centrifuga che controbilanci la caduta. Questo modello concorda con almeno due fatti sperimentali basilari: innanzitutto che una bicicletta piú veloce é meglio governabile di una piú lenta (poichè é necessario un raggio di curvatura minore per generare la medesima correzione centrifuga) ed in secondo luogo che una bicicletta il cui sterzo sia bloccato é sostanzialmente impossibile da mantenere in equilibrio. Nonostante ciò questo modello, che trascura la dinamica interna, non puó essere totalmente corretto: una bicicletta in moto possiede infatti un suo equilibrio dinamico intrinseco che si oppone, entro certi limiti, alla caduta anche quando il ciclista tenti di provocarla. Consideriamo, ad esempio, una bicicletta senza alcun ciclista che la guidi: da ferma cade in circa 2 sec. mentre in moto (se la lanciamo) essa si porta in una traiettoria curva e collasa a terra dopo un tempo che in media é di 20 sec. Ciò che accade, ed é l'argomento del paragrafo 3, é che la bicicletta é realmente in equilibrio per un bilanciamento tra forza di gravitá e forza centrifuga ma non é vero che sia necessariamente il ciclista a muovere il manubrio ed a portarla in una traiettoria circolare. Considerando i gradi di libertá interna della bicicletta si mostrerá infatti l'esistenza di meccanismi di autostabilitá che danno ragione dei fenomeni indicati sopra. La dinamica della bicicletta che ne risulta é descritta da due equazioni differenziali accoppiate che descrivono l'evoluzione dell'angolo diedro  $\theta$  che il piano passante per il centro di massa ed i punti di contatto delle ruote forma con il piano perpendicolare al suolo (angolo di caduta) e dell'angolo di sterzo  $\alpha$  (vedi Fig. 1). La risposta al secondo dei quesiti (1.1) verrá data nel paragrafo 4 in cui verranno analizzati i due regimi di funzionamento: bicicletta sola e bicicletta con ciclista. Il paragrafo 5 conclude il lavoro riassumendo i risultati principali.

## 2 Moto del centro di massa

Consideriamo la bicicletta schematizzata in Fig. 1, sia  $\alpha$  l'angolo di sterzo e sia  $\theta$  l'angolo di caduta cioè l'angolo (diedro) che il piano della bicicletta forma con la verticale, la distanza tra i punti di contatto delle ruote é data da  $a$  mentre  $b$  é la distanza tra il centro di massa e l'estremo posteriore della bicicletta. Andiamo a studiare il moto del centro di massa (CM) nella direzione perpendicolare al

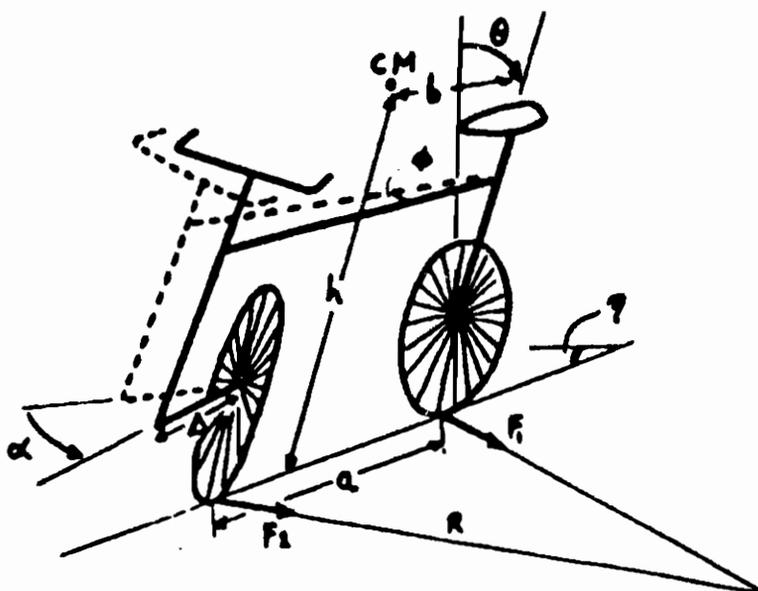


Figura 1: Disegno schematico di una bicicletta. In evidenza i parametri importanti nell'analisi di stabilità.

piano della bicicletta in un sistema di riferimento solidale alla strada [5]. Se ad un certo istante la bicicletta è inclinata di un angolo  $\theta$  sulla verticale e viaggia in una direzione che forma un angolo  $\eta$  con la direzione di riferimento per il moto nella direzione perpendicolare al piano della bicicletta vale la relazione

$$\frac{d^2}{dt^2}(h \sin \theta + b \sin \eta) = g \sin \theta - \frac{v^2}{R} \quad (2.1)$$

dove  $g$  è l'accelerazione di gravità ed  $R$  è il raggio di curvatura istantaneo. In approssimazione di piccoli angoli <sup>2</sup> l'Eq. (2.1) di-

<sup>2</sup>Si consideri che un angolo di sterzo o di caduta di  $10^\circ$  è già considerevole e che  $\sin(10^\circ = 0.174 \text{ rad}) = 0.173$

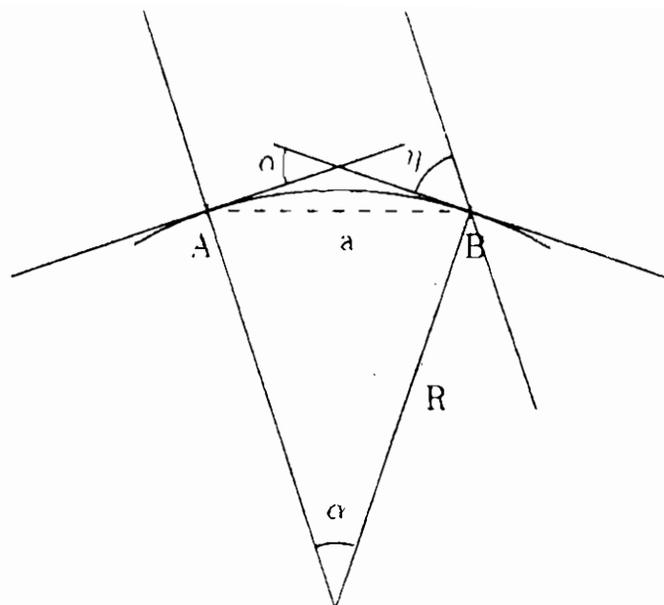


Figura 2: Proiezione sul terreno del moto della bicicletta. A e B sono i punti di contatto delle ruote

venta

$$h\ddot{\theta} + b\ddot{\eta} + \frac{v^2}{R} - g\theta = 0, \quad (2.2)$$

la quale, utilizzando le relazioni (vedi Fig. 2)

$$v = R\dot{\eta} \quad : \quad \alpha = \frac{a}{R}, \quad (2.3)$$

puó essere scritta come

$$\ddot{\theta} + \left[ \frac{bv}{ha} \right] \dot{\alpha} + \left[ \frac{v^2}{ha} \right] \alpha - \left[ \frac{g}{h} \right] \theta = 0. \quad (2.4)$$

Dall'Eq. (2.4) appare chiaro che l'angolo di caduta  $\theta$  puó essere, in linea di principio, mantenuto piccolo a piacere con opportuni aggiustamenti dell'angolo di sterzo. Consideriamo, ad esempio, un

ciclista che reagisca proporzionalmente alle perturbazioni laterali, cioè che ad una inclinazione  $\theta$  rispetto alla verticale risponda sterzando di un angolo  $\alpha = k\theta$ . L'Eq. (2.4) si scrive

$$\ddot{\theta} + \left[ \frac{kbr}{ha} \right] \dot{\theta} + \left[ \frac{kr^2}{ha} - \frac{g}{h} \right] \theta = 0 . \quad (2.5)$$

e mostra che un tale comportamento assicura stabilità se  $k > ga/v^2$  poiché, in questo caso, l'Eq. (2.5) è quella che regola la dinamica di un oscillatore armonico smorzato.

D'ora in avanti assumeremo che l'evoluzione dinamica e la stabilità della bicicletta siano regolate dall'Eq. (2.4). Non vi è però nessuna evidenza che il meccanismo stabilizzante  $\theta = \theta(\alpha)$  sia imposto dal ciclista. Abbiamo già menzionato, invece, come una bicicletta in moto senza ciclista possieda un certo grado di autostabilità. Nel prossimo paragrafo andremo quindi a considerare se, e come, la dinamica interna della bicicletta introduce relazioni tra gli angoli  $\theta$  e  $\alpha$  e se queste siano stabilizzanti per l'equilibrio.

### 3 Meccanismi di autostabilità

Durante il moto di una bicicletta si generano numerosi momenti angolari. I momenti che contribuiscono in maniera apprezzabile all'instaurarsi di meccanismi di auto stabilità/instabilità sono sostanzialmente di due tipi: quelli inerenti al moto della ruota anteriore (vista come un giroscopio) e quelli dovuti alla geometria dello sterzo<sup>3</sup>. Se consideriamo il meccanismo di sterzo privo di attrito, non vi sono torsioni lungo l'asse di sterzata ed il momento angolare in questa direzione è conservato. Consideriamo la bicicletta inclinata di  $\theta$  e con la ruota anteriore che ha velocità angolare  $\omega$  rispetto ad un asse passante per il mozzo e perpendicolare al piano della ruota (Fig. 3). Allora ad ogni istante vale la relazione

$$\frac{d}{dt} (I_z \dot{\omega} - l\omega \sin \theta) = 0 . \quad (3.1)$$

<sup>3</sup>Altri momenti sono dovuti alla frizione delle parti rotanti, ad esempio il fatto che i pneumatici abbiano larghezza finita produce una coppia attorno all'asse di sterzo quando la bicicletta si inclina, qui considererò pneumatici così sottili da poterla trascurare.

in cui  $I$  ed  $I_z$  rappresentano, nell'ordine, il momento di inerzia della ruota anteriore rispetto all'asse di rotazione e rispetto all'asse di sterzo. Per piccoli angoli, se  $v$  é la velocità di rotazione e  $r$  il

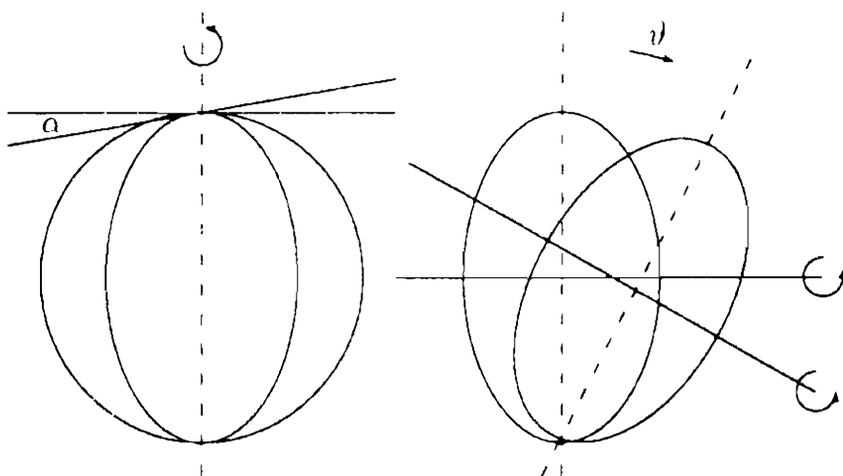


Figura 3: Effetto giroscopico sulla ruota anteriore.

raggio della ruota, l'Eq. (3.1) si scrive

$$\ddot{\alpha} = \frac{Iv}{I_z r} \dot{\theta} \quad (3.2)$$

e prevede che ad un aumento di  $\theta$  la ruota anteriore risponda precedendo, cioè con un aumento di  $\alpha$  e quindi secondo l'Eq. (2.4) provocando una diminuzione di  $\theta$ : abbiamo un meccanismo di autostabilità. Per verificare se quello appena descritto sia realmente un meccanismo stabilizzante per il moto della bicicletta Jones [3] ha costruito una bicicletta con due ruote anteriori supplementari ai lati di quella ordinaria, una ruota é fissa e serve semplicemente a bilanciare l'altra che invece é libera di ruotare senza però toccare terra. Se questa seconda ruota gira nel medesimo senso della ruota della bicicletta aumenta il momento di inerzia lungo l'asse di rotazione e quindi anche la componente stabilizzante nel caso la bicicletta si inclini, viceversa se la seconda ruota gira in senso opposto a quello della ruota della bicicletta la stabilità dovrebbe

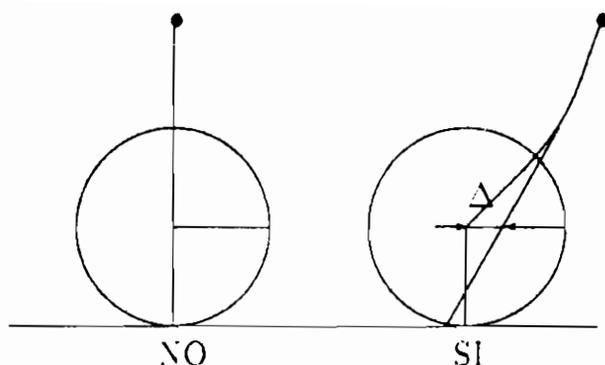


Figura 4: Geometria dello sterzo.

diminuire. Negli esperimenti di Jones succede esattamente questo per una bicicletta senza ciclista mentre per una bicicletta con ciclista il comportamento è meno chiaro.

Andiamo quindi a complicare leggermente il modello perché assomigli di più ad una bicicletta reale. Per ora la nostra bicicletta è la ruota anteriore che sterza lungo un asse perpendicolare al suolo e passante per il mozzo, in realtà lo sterzo non è modellato come il primo disegno di Fig. 4 ma come il secondo in modo che ad ogni sterzata corrispondono

- un movimento del centro di massa.
- una torsione ai punti di contatto delle ruote con il suolo.

Più precisamente: siano  $\alpha$  l'angolo di spostamento del corpo della bicicletta indotto dalla sterzata e  $\Delta$  il parametro di sterzo, cioè la distanza, nel piano perpendicolare al suolo, tra l'effettivo asse di sterzo e la verticale per il mozzo (vedi Fig. 1 e Fig. 5), allora ad un angolo di sterzata  $\alpha$  corrisponde un abbassamento  $\delta h$  del centro di massa dato da

$$\delta h = b \alpha \theta = \frac{\Delta b}{a} \alpha \theta . \quad (3.3)$$

che corrisponde ad una diminuzione di energia potenziale cioè alla creazione di una torsione  $\tau$  positiva (che fa aumentare  $\alpha$ ) pari a

$$\tau = Mg \frac{\Delta b}{a} \theta . \quad (3.4)$$

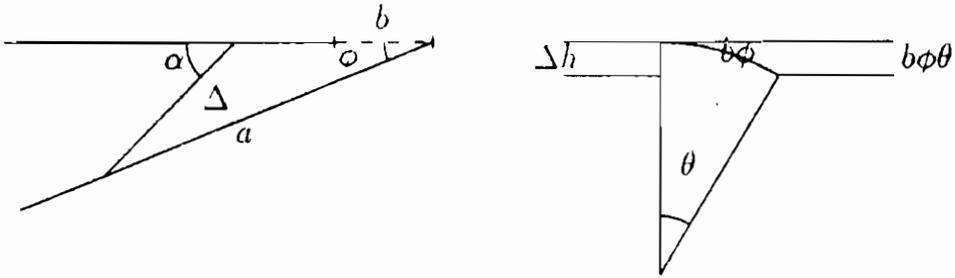


Figure 5: Effetti dovuti alla geometria dello sterzo.

L'Eq. (3.2) va perciò riscritta come

$$\ddot{\alpha} = \frac{I_v}{I_z r} \dot{\theta} + \frac{Mg\Delta b}{aI_z} \theta. \quad (3.5)$$

ed anche il secondo termine contribuisce alla stabilità, cioè fa aumentare  $\alpha$  a seguito di un aumento dell'inclinazione  $\theta$ .

Il fatto che la bicicletta non sterzi su un punto, cioè che l'asse di sterzo non sia una perpendicolare passante per il mozzo, significa anche che la ruota anteriore non gira libera sull'asse di sterzo ma che invece si producono delle frizioni ai punti di contatto delle ruote con il suolo. In particolare una torsione allo sterzo  $\tau = -F_a \Delta$  negativa, che tende a far diminuire  $\alpha$  all'aumentare di  $\theta$ , e che rappresenta quindi un termine di instabilità (Fig. 6). L'espressione di  $F_a$  si ricava dal fatto che  $F_n$  ed  $F_p$ , rispettivamente le forze di frizione ai punti di contatto con il suolo della ruota anteriore e posteriore sono le forze che mantengono la bicicletta nella sua traiettoria circolare e che inoltre sono tali da evitare rotazioni della bicicletta attorno ad assi verticali passanti per il centro di massa, ovvero dalle relazioni

$$\begin{cases} F_n + F_p = \frac{Mv^2}{R} \\ F_n(a - b) = F_p b \end{cases} \quad (3.6)$$

Possiamo ora scrivere l'Eq.(3.5) nella sua forma completa

$$\ddot{\alpha} = \frac{I_v}{I_z r} \dot{\theta} + \frac{Mg\Delta b}{aI_z} \theta - \frac{Mv^2 b}{a^2 I_z} \alpha. \quad (3.7)$$

Il primo termine è indipendente dalla massa, cioè dalla presenza del ciclista mentre gli altri due no. è ora chiaro il motivo per cui la bicicletta di Jones appariva stabilizzata dagli effetti giroscopici solo quando era senza ciclista: la presenza del ciclista aumenta di un fattore  $\simeq 50$  la massa  $M$  e conseguentemente l'importanza degli altri due termini che devono ora essere considerati.

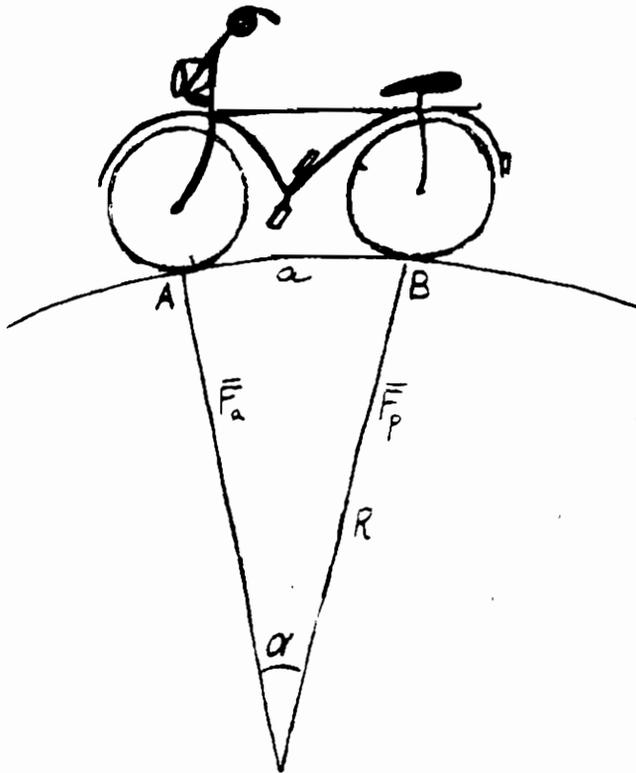


Figura 6: Effetti dovuti alla geometria dello sterzo.

## 4 Moto della Bicicletta

Il paragrafo precedente risponde ai quesiti riguardo i meccanismi che tengono in piedi una bicicletta, vogliamo ora rispondere alla domanda: "Cosa significa guidare una bicicletta?". Considereremo dapprima il moto della bicicletta senza ciclista per poi passare al caso completo. Considerando trascurabili ulteriori effetti dovuti, ad esempio, alla larghezza finita delle ruote od al fatto che lo sterzo non é, ovviamente, privo di attrito il moto della bicicletta é regolato dalle Eqq. (2.4) e (3.7). Tali equazioni possono essere riscritte nella forma

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \left(\frac{g}{h}\right) \left[\theta - \frac{v^2}{ga} \alpha\right] + \frac{bv}{ha} \dot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} - \left(\frac{Mhg\Delta}{I_z a}\right) \left[\theta - \frac{v^2}{ga} \alpha\right] - \frac{Iv}{I_z r} \dot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

che sará piú utile nel seguito.

### 4.1 Moto della bicicletta senza ciclista

Se la bicicletta non é cavalcata, i termini dipendenti dalla massa nelle equazioni del moto risultano trascurabili rispetto ai termini giroscopici. La seconda delle equazioni (4.1) si riduce all' Eq. (3.1) e sostituendola nella prima si ottiene, per l'evoluzione dell'angolo di caduta  $\theta$ , l'equazione

$$\ddot{\theta} + \left[ \frac{Ibv^2}{I_z har} - \frac{g}{h} \right] \dot{\theta} + \frac{Iv^3}{I_z har} \theta = 0 \quad (4.2)$$

Se sostituiamo nella (4.2) valori realistici dei diversi parametri dati in Tab.1) e cerchiamo soluzioni della forma  $\theta(t) \sim e^{pt}$  otteniamo una equazione algebrica che ha soluzioni negative o complesse, ma non positive. Questo significa che  $\theta(t)$  segue una dinamica smorzata o al piú oscillante (con ampiezza costante), ovvero: la bicicletta é autostabile !

### 4.2 Moto della bicicletta con ciclista

Poiché la presenza del ciclista fa diventare preponderanti i termini che dipendono dalla massa del sistema, incominciamo ad analizzare

il moto trascurando gli effetti giroscopici. Le equazioni del moto diventano

$$\begin{cases} \ddot{\theta} - \left(\frac{g}{h}\right) \left[\theta - \frac{v^2}{ga}\alpha\right] + \frac{bv}{ha}\dot{\alpha} = 0 \\ \ddot{\alpha} - K_M \left[\theta - \frac{v^2}{ga}\alpha\right] = 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

dove  $K_M$  è una quantità grande, per cui dopo un transiente si dovrà avere  $\theta \simeq v^2/ga$ . Allora la soluzione dell'equazioni del moto è data, dopo il transiente, da

$$\begin{cases} \theta \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{bv}{gb} \dot{\theta}(0) \\ \alpha \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{bv}{bv} \dot{\theta}(0) \end{cases} \quad (4.4)$$

Le (4.4) sembrerebbero indicare autostabilità anche per la bicicletta con ciclista l'inclinazione va verso un valore stazionario  $\theta_\infty$  e non aumenta. L'angolo di sterzata anch'esso va verso un valore limite ovvero la bicicletta si porta verso una traiettoria stazionaria circolare [ $R_\infty = bv/h\dot{\theta}(0)$ ]. In realtà le (4.4) forniscono solo i valori medi degli angoli  $\theta$  e  $\alpha$ . La soluzione completa delle equazioni del moto (4.1) può essere ottenuta numericamente o attraverso l'utilizzo della trasformata di Laplace: un tipico andamento delle soluzioni (per  $v = 3.5$  m/sec) è riportato nella Fig. 7. L'angolo di caduta aumenta nel transiente e poi oscilla lentamente e con ampiezza che aumenta lentamente attorno al valore  $\theta_\infty$ . L'angolo di sterzata aumenta anch'esso nel transiente e poi oscilla, le oscillazioni sono rapide e la loro ampiezza tende ad aumentare velocemente. Vi è stabilità nel senso che non vi sono soluzioni di fuga che portano ad una rapida caduta della bicicletta, ma le oscillazioni dai valori medi tendono ad aumentare. Fissati tutti gli altri parametri è possibile ottimizzare la geometria dello sterzo (in pratica variare il valore di  $\Delta$ ) in modo da rendere le oscillazioni dell'angolo di caduta molto piccole. Non è però possibile fare altrettanto con le oscillazioni dell'angolo di sterzata. È a questo punto che possiamo capire il ruolo del ciclista nella stabilità del sistema: con piccoli aggiustamenti allo sterzo fa ricominciare la dinamica di  $\alpha$  a piccole oscillazioni. Contemporaneamente egli corregge la tendenza della bicicletta ad autostabilizzarsi portandosi in una traiettoria circolare. In altre

parole, guidare una bicicletta significa lasciare che risponda da sola alle perturbazioni, ma solamente su tempi piccoli, apportando aggiustamenti che riportino la dinamica alle condizioni iniziali e la mantengano in regime di piccole oscillazioni.

Tabella 1: Parametri di una bicicletta reale

Quantità	Descrizione	Valore
$a$	Distanza tra i punti di contatto delle ruote	1.0 m
$b$	Distanza tra CM e l'estremità della bicicletta	0.33 m
$h$	Altezza da terra del CM	1.2 m
$r$	Raggio delle ruote	0.33 m
$m$	Massa delle ruote	1.6 Kg
$M$	Massa della bicicletta+ciclista	80 Kg
$\Delta$	Parametro di sterzo	2.5 cm
$I$	Momento di inerzia della ruota anteriore (polare)	0.08 Kg $m^2$
$I_z$	Momento di inerzia della ruota anteriore (assiale)	0.06 Kg $m^2$

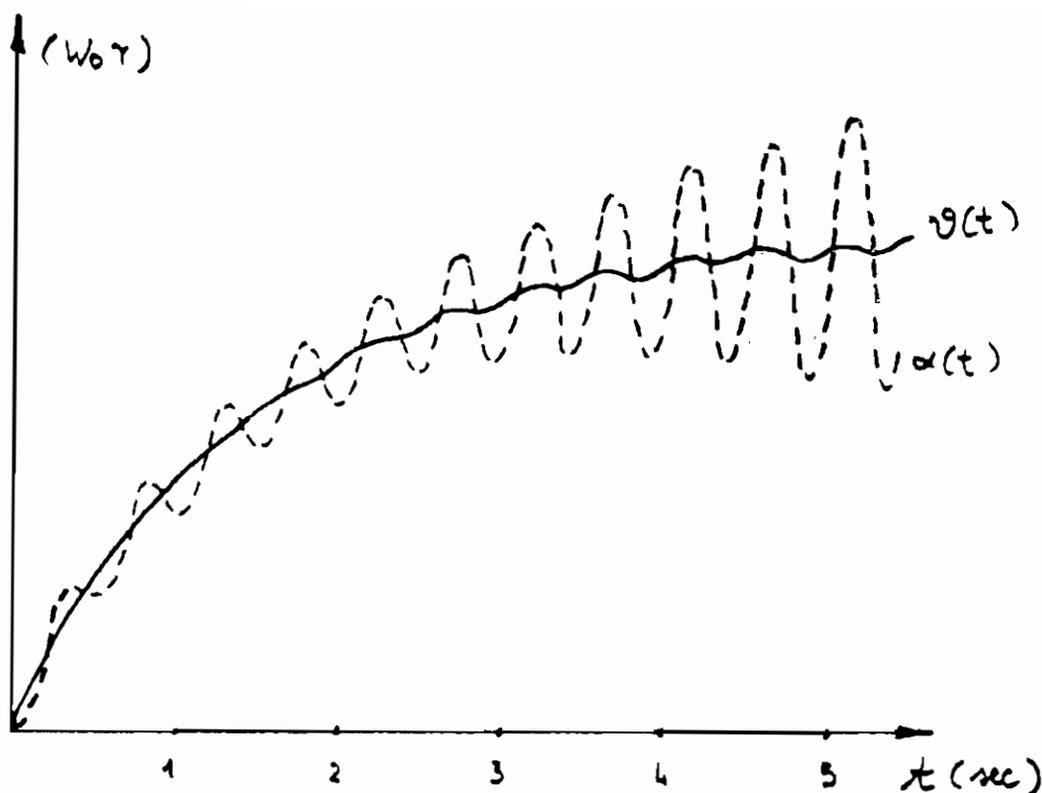


Figura 7: Dinamica della Bicicletta. la linea continua rappresenta l'evoluzione dell'angolo di caduta  $\theta$ , la linea tratteggiata l'evoluzione dell'angolo di sterzo  $\alpha$ . L'andamento riportato si riferisce ad una bicicletta in moto ad una velocità di  $v = 3.5$  m/sec. L'unità di misura per gli angoli è data da  $W_0 \tau$ , dove  $W_0 = \dot{\theta}(0)$  e  $\tau$  è il tempo caratteristico  $\tau = (h/g)^{1/2}$ .

## 5 Conclusioni

Sono stati analizzati i meccanismi di stabilità e autostabilità dinamica della bicicletta e del sistema bicicletta+ciclista.

La bicicletta può mantenersi in equilibrio quando viene sottoposta ad una perturbazione laterale portandosi in una traiettoria circolare, in modo che l'inclinazione dovuta alla perturbazione sia bilanciata dalla forza centrifuga che viene generata. Questo è un processo intrinseco della dinamica della bicicletta, senza che il ciclista debba intervenire ad attivarlo. La torsione giroscopica che si

esercita sulla ruota anteriore é l'origine di questa autostabilitá nel caso della bicicletta senza ciclista e contribuisce anche in presenza del ciclista.

Nel caso di bicicletta con ciclista il fattore piú importante per la stabilitá del sistema é la geometria dello sterzo. Il sistema bicicletta+ciclista é stabile, nel senso che non cade, ma é instabile rispetto alle oscillazioni dell'angolo di sterzo la cui ampiezza tende ad aumentare. Guidare una bicicletta significa dunque:

- correggere i cambiamenti di direzione che sono indotti dalle perturbazioni.
- operare ripetuti "reset "alla dinamica in  $\alpha$ , cioé prima che le oscillazioni diventino troppo ampie si devono ripristinare le condizioni iniziali e far ripartire la dinamica a piccole oscillazioni.

## Riferimenti

- [1] D. Roland *Computer Simulations of Bicycle Dynamics*, (Buffalo, NY: Calspan)
- [2] J. Lowell and H. D. McKell, *Am. J. Phys.* **50** (12), 1106 (1982)
- [3] D. E. H. Jones, *Phys. Today*, April 1970, 34
- [4] D. Kishner, *Am. J. Phys* **48** (1), 36 (1980)
- [5] S. Timoshenko and D. H. Young, *Advanced dynamics*, McGraw-Hill, NY, 1948)

Volume I - n. 1 4/3/1986	CINQUANTA ANNI DI INTERAZIONI DEBOLI: DALLA TEORIA DI FERMI ALLA SCOPERTA DEI BOSONI PESANTI - Marcello Conversi	pag. 1
Volume I - n. 2 1/7/1986	EFFECTS OF DIOXINS ON NATURE AND SOCIETY - Opening talk, Sergio P. Ratti DIOXIN IN MISSOURI - Armon F. Yanders DEMONSTRATION OF INNOVATIVE REMEDIAL ACTION TECHNOLOGIES AT UNITED STATES MILITARY DIOXIN CONTAMINATED SITES - Terry L. Stockard TIMES BEACH DIOXIN RESEARCH FACILITY - Robert J. Schreiber E.P.A. RISK ASSESSMENT OF CHLORINATED DIBENZO-P-DIOXIN AND DIBENZOFURANS (CCDs/CDFs) - Donald G. Barnes, Patricia Roberts RECENT INTERNATIONAL COOPERATION IN EXCHANGE OF INFORMATION ON DIOXIN - Donald G. Barnes CHLORACNE AND THE AGENT ORANGE PROBLEM IN THE U.S.A. - B. Fischmann CONVEGNO SU "LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITA- ZIONALE" - MOTIVAZIONI DEL CONVEGNO - Sergio P. Ratti LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITAZIONALE: UN PROBLEMA APERTO - Sergio P. Ratti, Roberto Silvotti SVILUPPI RECENTI SULLA CONOSCENZA DELLA COSTANTE DI GRAVITAZIONE UNIVERSALE - Anna Grassi, Giuliano Strini LIMITI SPERIMENTALI SULLA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' Roberto Cassinis CONSEGUENZE SPERIMENTALI DELLA IPOTESI DI ESISTENZA DI UNA QUINTA INTERAZIONE - Fabrizio Massa VERIFICA DEL PRINCIPIO DI EQUIVALENZA E FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI - Bruno Bertotti	pag. 3 pag. 11 pag. 23 pag. 41 pag. 51 pag. 63 pag. 69
Volume II - n. 1 15/9/1987	TRANSIZIONE LIQUIDO SOLIDO - Mario Tosi EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - Emilio Zavattini	pag. 3 pag. 5 pag. 19 pag. 31 pag. 43 pag. 81 pag. 3
Volume II - n. 2 10/12/1987	METODI DI DILATAZIONE ANALITICA E RISONANZE IN SISTEMI QUANTISTICI NON RELATIVISTICI - Fausto Borgonovi CAMPO ELETTRICO ED EMISSIONI DA CARICHE IN UN MEZZO - Michele Spada SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE DI SUPERRETTICOLI SEMICONDUTTORI Luciano Colombo	pag. 27 pag. 1 pag. 13 pag. 29 pag. 51
Volume III - n. 1 6/6/1988	SOLITONI IN FISICA NUCLEARE - Marco Radici ASPETTI NON LOCALI DEL COMPORTAMENTO QUANTISTICO - Oreste Nicrosini CARATTERIZZAZIONE OTTICA IN SITU DI FILMS SOTTILI - Alessandra Piaggi	pag. 83 pag. 1 pag. 23 pag. 49 pag. 1
Volume III - n. 2 4/7/1988	TRANSIZIONI DI WETTING - Tommaso Bellini FORZE A TRE CORPI NEI GAS RARI - Silvia Celi	pag. 1 pag. 27 pag. 47 pag. 1
Volume III - n. 3 15/12/1988	FLAVOUR PHYSICS - Luciano Maiani THE STANDARD ELECTROWEAK MODEL: PRESENT EXPERIMENTAL STATUS - Pierre Darridaud WHY BE EVEN-HANDED? - Martin M. Block LA FISICA DEI COLLIDER - Paolo Bagnaia, Fernanda Pastore	pag. 27 pag. 47 pag. 1
Volume IV - n. 1 6/4/1989	SOLAR WIND AND PHYSICS OF THE HELIOSPHERE - Bruno Coppi THE IGNITOR PROJECT - Bruno Coppi, Francesco Pegoraro	pag. 2 pag. 32 pag. 3
Volume IV - n. 2 15/6/1989	SPETTROSCOPIA ELLISSOMETRICA NEI SOLIDI - Alessandra Piaggi	pag. 23
Volume IV - n. 3 15/9/1989	UNA INTRODUZIONE AL SUPERCONDUCTING SUPERCOLLIDER - R. Diaferia FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI - Fausto Borgonovi	pag. 49 pag. 1 pag. 20
Volume V - n. 1 15/3/1990	MULTI-BODIED PHASE SPACE - A NEW APPROACH - Martin M. Block SCATTERING BRILLOUIN RISONANTE - Cristina Bosio METODO DI RINORMALIZZAZIONE PER LO STUDIO DELLA STRUTTURA ELET- TRONICA DI SUPERRETTICOLI - Saverio Moroni MECCANISMI DI CONDUCIBILITA' IONICA MEDIATI DA DIFETTI ESTRINSECI IL CASO DEL QUARZO - Alberto Paleari STATISTICHE QUANTISTICHE ED INDISTINGUIBILITA' - Gianluca Introschi	pag. 40 pag. 57 pag. 69 pag. 1 pag. 15 pag. 51 pag. 1 pag. 2 pag. 17 pag. 56 pag. 59
Volume V - n. 2 15/6/1990	FISICA DELLE ALTE ENERGIE ALLE KOAN FACTORIES - Renato Diaferia NEUTRONI FREDDI E NEUTRONI ULTRAFREDDI - Gianluca Raselli TRANSIZIONI ORDINE-DISORDINE NELLE DISPERSIONI COLLOIDALI - Paolo Di Trapani	pag. 1 pag. 15 pag. 51
Volume VI - n. 1 p. 1 - 11/10/1991	LE UNITA' DI MISURA DELLA RADIOPROTEZIONE - Sergio P. Ratti L'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Giuseppe Belli NORMATIVA E PRINCIPI DI RADIOPROTEZIONE - Argeo Benco APPENDICE 1 - Pubblicazioni I.C.R.P. - Argeo Benco APPENDICE 2a) - Il regime giuridico dell'impiego pacifico dell'energia nucleare APPENDICE 2b) - Elenco di provvedimenti di interesse per le attività di impiego pacifico dell'energia nucleare e delle radiazioni ionizzanti APPENDICE 2c) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative all'utilizzazione delle sostanze radioattive e delle macchine radiogene APPENDICE 2d) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative al trasporto delle sostanze radioattive RADIOATTIVITA' AMBIENTALE E RADIOECOLOGICA - Argeo Cigna	pag. 1 pag. 2 pag. 17 pag. 56 pag. 59 pag. 64 pag. 78 pag. 85 pag. 87

Volume VI - n. 1	EFFETTI BIOLOGICI DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI - Marco Caprotti	pag. 107
p. II - 11/10/1991	MODELLO PREVISIONALE DELLA CONCENTRAZIONE DI $^{90}\text{Sr}$ , $^{134}\text{Cs}$ E $^{137}\text{Cs}$ NELLA CATENA ALIMENTARE - Arrigo Cigna	pag. 117
	L'AMBIENTE E LA RADIOPROTEZIONE IN RELAZIONE AD INCIDENTI NUCLEARI Arrigo Cigna	pag. 131
	INCIDENTE NUCLEARE "CHERNOBYL" E SUE RIPERCUSSIONI SULLA CATENA ALIMENTARE - R. Cazzaniga, G. Dominici, A. Malvicini, E. Sangalli	pag. 157
	PRIMA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO RADIOLOGICO AMBIENTALE NELLA ZONA DI ISPIRA IN RELAZIONE ALL'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Argeo Bencio	pag. 177
Volume VII - n. 1	APPROCCIO FRATTALE ALLA DESCRIZIONE DELLA RADIOATTIVITA' IN ARIA IN ITALIA DOPO CHERNOBYL - Gianfausto Salvadori	pag. 201
15/3/1992	ELECTRON ENERGY LOSS SPECTROSCOPY - Marco Amiotti	pag. 1
	LIVELLI ELETTRONICI PROFONDI IN SEMICONDUTTORI E LORO CARATTE- RIZZAZIONE - Adele Sassella	pag. 35
	LA RICERCA DEL BOSONE DI HIGGS AI FUTURI ACCELERATORI - G. Montagna	pag. 57
Volume VII - n. 2	SIMMETRIA CHIRALE E TEOREMA DI GOLDBERGER-TREIMAN - Carlo Gobbi	pag. 81
15/10/1992	CREScita, CARATTERIZZAZIONE ED APPLICAZIONI DEI LANGMUIR- BLODGETT FILMS - Marco Amiotti	pag. 1
	LA CATODOLUMINESCENZA - Vittorio Bellani	pag. 35
	CORRELAZIONI ELETTRONICHE IN OSSIDI DI METALLI DI TRANSIZIONE - Luigi Sangaletti	pag. 63
Volume VIII - n. 1	TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA - Alberto Vanheren	pag. 1
15/1/1993	ROTTURA ESPlicitA E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi	pag. 25
	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 39
	EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto	pag. 75
Volume VIII - n. 2	L'UNITA' DELLA SCIENZA. IL CASO DELLA FISICA. OGGI - G. Salvini	pag. 1
15/4/1993	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 37
	MODELLO A TETRAEDRI PER LA FUNZIONE DIELETTRICA DI SOLIDI AMORFI A. Sassella	pag. 73
	INTRODUZIONE ALLE RETI NEURALI - C. Macchiavello	pag. 93
Volume IX - n. 1	RETICOLI DISORDINATI: IL MODELLO DI ANDERSON - Riccardo Farchioni	pag. 1
15/4/1994	BREVE INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUANTISTICA DELLA STIMA - Matteo Paris	pag. 23
	SUSY - Matteo Cacciari	pag. 36
	MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS NEL MODELLO STANDARD - Fulvio Piccinini	pag. 79
	DIELETTROFORESI: LIEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO - Luisa Laboranti	pag. 97
Volume IX - n. 2	PROPRIETA' FISICHE DI CLUSTER METALLICI - Vittorio Bellani	pag. 1
15/11/94	APPLICAZIONI DI RETI NEURALI ALLA FISICA DELLE ALTE ENERGIE - Paolo Vitolo	pag. 18
	CRITTOGRAFIA QUANTISTICA - Chiara Macchiavello	pag. 47
	IL "PARADOSSO" DEI GEMELLI - Matteo Cacciari	pag. 64
	TRANSIZIONI DI FASE NEL PRIMO UNIVERSO - Simona Rolli	pag. 77
	SULLA STABILITA' DINAMICA DELLA BICICLETTA - Matteo Paris	pag. 102