

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

---

# SCIENTIFICA ACTA

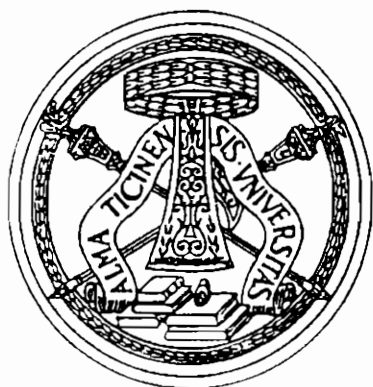
## QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME IX

ANNO IX

NUMERO 1

15 APRILE 1994



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

---

CENTRO STAMPA - DIPARTIMENTI FISICI  
via Bassi, 6 27100 Pavia

## INDICE

- 1 - RETICOLI DISORDINATI: IL MODELLO DI ANDERSON - Riccardo Farchioni pag. 1
- 2 - BREVE INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUANTISTICA DELLA STIMA Matteo Paris pag. 23
- 3 - SUSY - Matteo Cacciari pag. 37
- 4 - MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS NEL MODELLO STANDARD - Fulvio Piccinini pag. 77
- 5 - DIELETTROFORESI: LEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO - Luisa Laboranti pag. 95

**Riccardo Farchioni**

**Dipartimento di Fisica "A. Volta"  
Università di Pavia**

# **Reticoli disordinati: il modello di Anderson**

**Seminario tenuto il 1° Dicembre 1992**

## 1. Introduzione.

Gran parte della fisica dello stato solido ha come obbiettivo lo studio delle proprietà di sistemi che presentino, in modo più o meno approssimato, una condizione di ordine. L'espressione più familiare di un sistema di questo tipo è ovviamente un cristallo, ossia una serie di atomi disposti su posizioni che individuano un reticolo di Bravais. Un reticolo di Bravais è quel luogo dei punti che possono essere descritti dall'espressione  $\vec{R} = n_1\vec{a}_1 + n_2\vec{a}_2 + n_3\vec{a}_3$  dove  $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$  sono tre vettori non complanari e  $n_1, n_2, n_3$  numeri interi. Viene poi definita la cella elementare come quel volume di spazio che traslato dei vettori del reticolo di Bravais riempie lo spazio senza vuoti né sovrapposizioni. Un sistema di questo genere presenta una condizione che si rivela cruciale per molte delle sue caratteristiche fisiche: la Hamiltoniana che lo descrive presenta una invarianza traslazionale.

Quelle che qui vogliamo descrivere sono le proprietà fisiche di sistemi che violino radicalmente queste condizioni di ordine, usando un modello, quello introdotto da Anderson nel 1958 [1] che, pur nella sua semplicità, si è rivelato in grado, attraverso l'introduzione di concetti come quello di stato localizzato, o come quello di mobility-edge, di spiegare numerosi esempi di transizione metallo-isolante. Il modello di Anderson si propone di studiare le proprietà elettroniche e di conduzione di un reticolo i cui siti (che supporremo disposti su di un reticolo regolare, e che interagiscono fra di loro) hanno energie assegnate in modo del tutto casuale. Nonostante il modo con cui questo modello di solido si discosta da quello di un sistema ordinato, vedremo che, almeno in tre dimensioni e in certe condizioni di non alto disordine, lo spettro mantiene caratteristiche che fanno del solido un possibile conduttore. Quando però il disordine diventa grande rispetto al grado di sovrapposizione degli orbitali elettronici dei siti del reticolo, lo spettro assume caratteristiche del tutto peculiari e il sistema diventa isolante, perlomeno secondo i meccanismi di conduzione normalmente studiati. Questa flessibilità di comportamento non è invece presente nei sistemi unidimensionali e bidimensionali che sono isolanti per qualsiasi soglia di disordine.

Nella sezione 2 riassumeremo brevemente i concetti comunemente usati nello studio dei sistemi ordinati. Nella sezione 3 verrà esposto il nucleo dell'analisi di Anderson e i concetti nuovi da essa messi in luce. Nella sezione 4 saranno descritti due esempi in cui essi hanno trovato

una evidenza sperimentale. Infine, nella sezione 5 si accennerà brevemente ai casi bidimensionale e unidimensionale.

## 2. Sistemi ordinati.

La Hamiltoniana di un elettrone in un solido ordinato può essere scritta nel modo seguente:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + U(\vec{r}) \quad , \quad U(\vec{r}+\vec{R}) = U(\vec{r}) \quad (1)$$

L'ipotesi di invarianza traslazionale della Hamiltoniana, unita alla ipotesi della località del potenziale  $U$  presente in essa, basta ad assicurare la validità del teorema di Bloch, secondo il quale le autofunzioni elettroniche sono della forma:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} \quad , \quad u_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}) = u_{\vec{k}}(\vec{r}) \quad (2)$$

Esse sono cioè composte di una fase e di una parte periodica nel reticolo. Sono quindi funzioni estese su tutto il sistema, e godono della proprietà:

$$\psi_{\vec{k}}(\vec{r}+\vec{R}) = \psi_{\vec{k}}(\vec{r}) e^{i\vec{k}\cdot\vec{R}} \quad (3)$$

Gli autovalori del sistema sono distribuiti secondo funzioni continue (bande di energia)  $\epsilon_n(\vec{k})$  del vettore d'onda  $\vec{k}$  il quale, nel limite di cristallo infinito, può essere considerato (per ogni direzione) una variabile continua.

Riassumendo, lo spettro di un solido ordinato risulta essere composto da intervalli continui di energie permesse per il sistema (bande) i cui autovettori sono "delocalizzati" su tutto il sistema. Il teorema di Bloch consente di dare una spiegazione delle proprietà conduttrici di un solido con le caratteristiche di ordine menzionate prima proprio grazie a questa

peculiarità delle funzioni d'onda elettroniche. L'elettrone, nel suo moto all'interno del solido subisce un fenomeno di scattering da parte degli ioni; tuttavia, l'ordine con cui questi sono disposti determina un processo di interferenza costruttiva grazie al quale la propagazione su tutto il sistema può aver luogo. Naturalmente non è sufficiente che le funzioni d'onda siano delocalizzate per avere trasporto di carica: basti pensare ai cristalli isolanti. Un'altra cosa che occorre infatti tenere presente è che contribuiscono al trasporto di carica solo gli elettroni appartenenti a bande *parzialmente occupate*. In altre parole, se l'energia di Fermi del solido è compresa in un gap, separando così bande completamente occupate da bande vuote, il solido è un isolante.

### 3. Il modello di Anderson per un solido non cristallino.

Il carattere di perfetta periodicità di un solido reale è naturalmente una idealizzazione. Anche i solidi che meglio rispettano quella condizione di ordine e che vengono studiati nelle loro caratteristiche come descritte dal teorema di Bloch, possiedono certamente impurezze, difetti, distorsioni, oltre ovviamente alle vibrazioni reticolari.

Con il modello di Anderson, vogliamo con decisione spostare il nostro punto di vista e studiare un modello di solido disordinato. Con questo termine qui definiremo un solido strutturalmente ordinato, ma con energie di sito assegnate in modo casuale.

Consideriamo dunque un reticolo cristallino i cui atomi possiedano energie di sito  $a_n$  e che interagiscono coi primi vicini con intensità  $V_{nn'}$ . Le energie  $a_n$  siano assegnate casualmente secondo una distribuzione di probabilità per semplicità scelta uniforme (pari a  $1/W$ ) e cui estremi siano  $-W/2$  e  $W/2$ . I risultati, a parte dettagli inessenziali, sono indipendenti dalla forma della distribuzione di probabilità. L'approssimazione entro cui lavoreremo è quella di tight-binding, in cui gli orbitali elettronici si suppongono molto concentrati attorno al sito di appartenenza e le autofunzioni elettroniche sono ricercate all'interno di combinazioni lineari di autofunzioni atomiche. La Hamiltoniana dell'elettrone nel solido nella rappresentazione dei vettori  $|\ln, \alpha\rangle$  è della forma:

$$H = \sum_n \sum_{\alpha, \beta=1}^v a_{n, \alpha \beta} |n, \alpha\rangle \langle n, \beta| + \sum_{n, n'} \sum_{\alpha, \beta=1}^v V_{nn', \alpha \beta} |n, \alpha\rangle \langle n', \beta| \quad (4)$$

dove  $n$  è il numero d'ordine del sito e  $\alpha, \beta$  indicano gli orbitali atomici di ciascun sito. Nel seguito, per semplificare le notazioni, porremo  $v = 1$ . L'equazione del moto per l'ampiezza  $u_n(t) = \langle n | \psi(t) \rangle$  è:

$$i \dot{u}(t) = a_n u_n + \sum_{n'} V_{nn'} u_{n'} \quad (5)$$

Facendo la trasformata di Laplace al primo e secondo membro della (5) si verifica che, a patto di porre  $u_m(0) = \delta_{nm}$ , cioè di mettere l'elettrone a  $t = 0$  nel sito  $n$ -esimo, vale la relazione:  $\tilde{u}_n(z) = i\tilde{G}_{nn}(iz)$ , dove  $z = E + i\eta$  (energia complessa) e:

$$\tilde{G}_{nn}(z) = \int e^{-zt} G_{nn}(t) dt, \quad \tilde{G}_{nn}(z) = \left\langle n \left| \frac{1}{z-H} \right| n \right\rangle \quad (6)$$

Per studiare le proprietà elettroniche di un sistema come quello prima descritto, Anderson partì da una idea molto intuitiva di trasporto che può essere così riassunta: supponiamo che l'elettrone stia, come già detto, nel sito  $n$ -esimo del reticolo per  $t=0$ , e osserviamo come si comporta l'ampiezza  $u_n(t)$  per tempi infiniti. Se, per  $t \rightarrow \infty$  si trova che  $u_n(t) \rightarrow u \neq 0$ , questo significa che dopo un tempo infinito la particella ha ancora probabilità finita di trovarsi in quel sito, restandovi in qualche modo confinata. Si potrà quindi concludere che la sua funzione d'onda è *localizzata* in un intorno nello stesso sito. Se  $u_n(t) \rightarrow 0$ , allora l'elettrone è libero di trovarsi su tutto il reticolo e la autofunzione è *delocalizzata*, o *estesa*. Tutto viene quindi ricondotto allo studio della evoluzione temporale di  $G_{nn}(t)$  e quindi alle proprietà analitiche della funzione di Green. Tuttavia, per evitare di soffermarci su delicate questioni di trasporto sfrutteremo qui esclusivamente le proprietà della funzione di Green. Per questo seguiremo un ragionamento semplificato rispetto a

quello originale di Anderson e che non ha la pretesa di essere del tutto rigoroso [2,3].

La funzione di Green può essere scritta nella forma:

$$\tilde{G}_{nn}(z) = \frac{1}{z - \Delta_n(z)} \quad (7)$$

dove la quantità  $\Delta_n(z)$  è detta self-energia. Ricordiamo che le singolarità della funzione di Green sull'asse reale, cioè per  $\eta \rightarrow 0$ , corrispondono agli autostati del sistema. In particolare, le singolarità al taglio, dove la parte immaginaria è diversa da zero sull'asse reale, corrispondono agli stati estesi dello spettro. Per trovare una condizione di localizzazione ci dovremo soffermare al caso  $\text{Im}(\tilde{G}_{nn}) = 0$  sull'asse reale, e quindi dove anche  $\Delta_n(z)$  è reale. La self-energia  $\Delta_n(z)$  ha uno sviluppo perturbativo simile a quello di Dyson per la funzione di Green che può essere scritto:

$$\Delta_n(z) = a_n + \sum_{n'} V_{nn'} \frac{1}{z - a_{n'}} V_{n'n} + \sum_{n', n''} V_{nn'} \frac{1}{z - a_{n'}} V_{n'n''} \frac{1}{z - a_{n''}} V_{n''n} + \dots \quad (8)$$

Se  $z$  è reale ( $\eta = 0$ ) la serie di  $\Delta_n(z)$ , in caso di convergenza, avrà come somma un numero reale. Pertanto condizione per la localizzazione di uno stato sarà la convergenza della serie (8). Anzi, si potrebbe anche dimostrare che gli intervalli dove la serie (8) non converge sono proprio i tagli della funzione di Green. Cerchiamo di stimare dunque quando si verifica questa convergenza. Il termine in  $V^{L+1}$  della serie (consideriamo  $V$  come interazione costante) sarà a sua volta la somma di  $N^L$  addendi contenenti  $V^L/(z - a_n)^L$ , dove  $N$  è il numero dei primi vicini di ogni sito (numero di coordinazione del solido,  $N=6$  ad esempio per il cubico semplice). Questi addendi assumeranno valori casuali come casuali saranno, in particolare, i loro segni. Per portare a termine la nostra stima, dovremo quindi effettuare delle opportune operazioni di media; inoltre converrà sostituire ai vari termini i loro valori assoluti. Si può dimostrare [4] che il termine di ordine  $L$ -esimo della nostra serie può essere scritto:

$$N^L V^L \exp \left\{ L \left\langle \ln \left| \frac{V}{z - a} \right| \right\rangle \right\}$$



A causa del valore assoluto che vi compare, questo è il termine L-esimo di una serie geometrica. Se questa converge, lo stesso farà anche quella originale coi segni casuali. La condizione per la convergenza è:

$$N V \exp \left\{ \left\langle \ln \left| \frac{V}{z-a} \right| \right\rangle \right\} < 1 \quad (9)$$

Il primo membro della disuguaglianza (9) in caso di distribuzione di probabilità uniforme diventa:

$$N V \exp \left\{ \left\langle \ln \left| \frac{V}{z-a} \right| \right\rangle \right\} = N V \exp \left\{ -\frac{1}{W} \int_{\frac{w}{2}}^{\frac{w}{2}} \ln |z-a| da \right\}$$

Se ci mettiamo al centro dello spettro ( $z=0$ ) la condizione (9) diventa:

$$N V \exp \left\{ -\ln \frac{W}{2} + 1 \right\} = \frac{2 N V e}{W} < 1 \quad (10)$$

dove  $e$  è il numero di Nepero. Abbiamo cioè trovato che l'autostato al centro della banda si localizza quando il rapporto tra la larghezza  $W$  della distribuzione di probabilità entro cui possono fluttuare le energie di sito e la larghezza di banda  $2NV$  del sistema "imperturbato" diventa circa 3. Va notato che questo numero, a causa delle semplificazioni contenute nel nostro ragionamento, va preso con le dovute cautele, pur non essendo troppo lontano dal valore ritenuto più attendibile, che è circa 1. Osserviamo a questo punto che lo stato al centro della banda è quello che ha la minor tendenza a localizzarsi: infatti gli stati ai bordi dello spettro sono il risultato della sovrapposizione di orbitali di sito maggiormente fluttuanti rispetto a quelli del centro. Perciò la soglia trovata è quella della completa localizzazione dello spettro. Come ci si poteva aspettare, le quantità in competizione risultano essere il disordine

del sistema (regolato da  $W$ ) e la sovrapposizione tra gli orbitali dei siti atomici, misurata da  $V$ .

Possiamo osservare a questo punto che con gli stati localizzati in una porzione finita di reticolo si ha l'introduzione di un concetto del tutto nuovo nella fisica dei sistemi non cristallini. La discontinuità rispetto ai concetti usati nella fisica dei sistemi ordinati viene rappresentata schematicamente nella Fig.1.

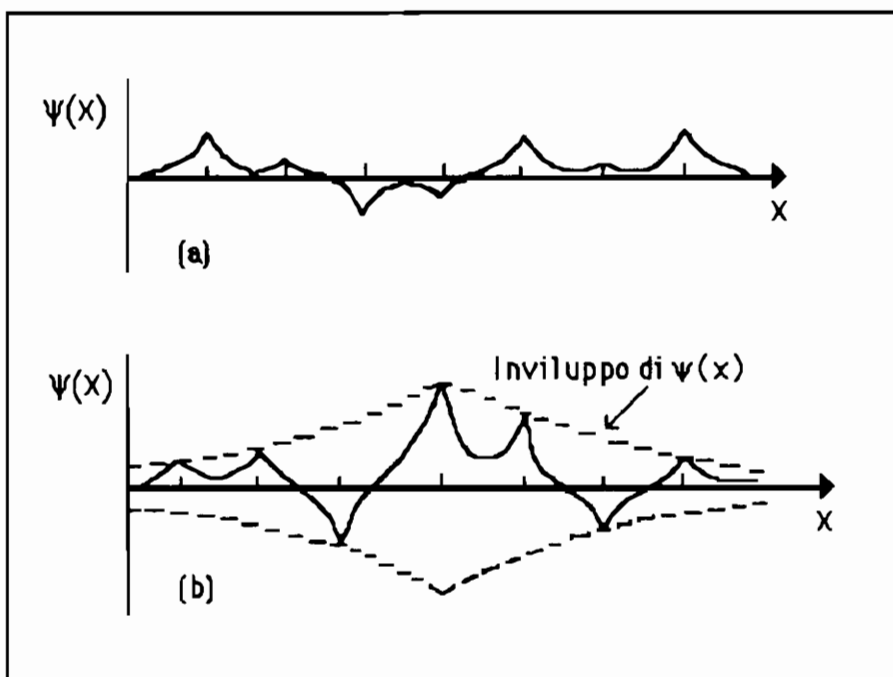


Fig.5: *Rappresentazione schematica di (a) uno stato rapidamente fluttuante ma esteso sul reticolo e (b) uno stato localizzato su una sua porzione finita.*

Nel caso del cristallo perfetto la funzione d'onda elettronica (di Bloch) è caratterizzata da un vettore d'onda  $k$  ben determinato. Per tenere in considerazione i fenomeni di scattering a cui è soggetto l'elettrone, può essere introdotta una variazione  $\Delta k$  nel vettore d'onda, che è legata al cammino libero medio della particella  $\lambda$  dalla relazione  $\Delta k \lambda \approx 1$ . La

condizione  $\Delta k \ll k$  corrisponde ad un lungo libero cammino medio. In una situazione di forte interazione,  $\Delta k \approx k$ , e quindi  $k \lambda \approx 1$ ; si avrà in questo caso un piccolo libero cammino medio, situazione visualizzata nella parte (a) della figura. In tutti questi casi tuttavia lo stato continua ad essere esteso su tutto il reticolo. La peculiarità dello stato localizzato sta nel totale confinamento dell'elettrone in una zona finita del reticolo, che si realizza attraverso un andamento dell'involuppo rapidamente decrescente della funzione d'onda (parte (b) della figura); il caso più frequente è quello di un involuppo esponenzialmente decrescente. In questo caso, la funzione d'onda avrà la seguente forma:

$$\psi(r) \approx \psi_0 \exp(-|r-r'|/\xi) \quad (11)$$

La quantità  $\xi$  è chiamata *lunghezza di localizzazione* dello stato; il suo inverso viene di solito chiamato coefficiente di Lyapunov e indicato con  $\gamma$ .

Il procedimento seguito da Anderson portò dunque a stabilire una soglia di disordine capace di provocare la completa localizzazione dello spettro. Nessuna indicazione veniva però data su quello che si verifica quando gradualmente si passa dalla condizione di ordine a questa soglia di disordine. Risultati successivi misero alla luce una dinamica che descriveremo brevemente. Al crescere del disordine il processo di localizzazione riguarda prima gli stati posti nelle zone laterali dello spettro e per ultimo lo stato al centro [5-7]. A partire da  $W = 0$  (assenza di disordine), quando la banda degli stati estesi copre l'intervallo  $(-NV, NV)$ , aumentando il valore di  $W$ , lo spettro del sistema tende ad allargarsi (a causa del maggior *range* di valori che possono assumere le energie di sito) e contemporaneamente le parti più laterali dello spettro diventano composte di stati localizzati. Più precisamente, in un certo punto dello spettro (chiamato *mobility-edge*) esiste una transizione *stretta* fra un continuo di stati estesi (quello consueto della banda) e un *continuo di stati localizzati*. I due *mobility-edge* (posti simmetricamente rispetto al centro dello spettro) tendono a spostarsi verso il centro al crescere del disordine, andando a coincidere in corrispondenza alla soglia trovata da Anderson. L'evoluzione dello spettro al crescere del disordine è riportato nella Fig.2.

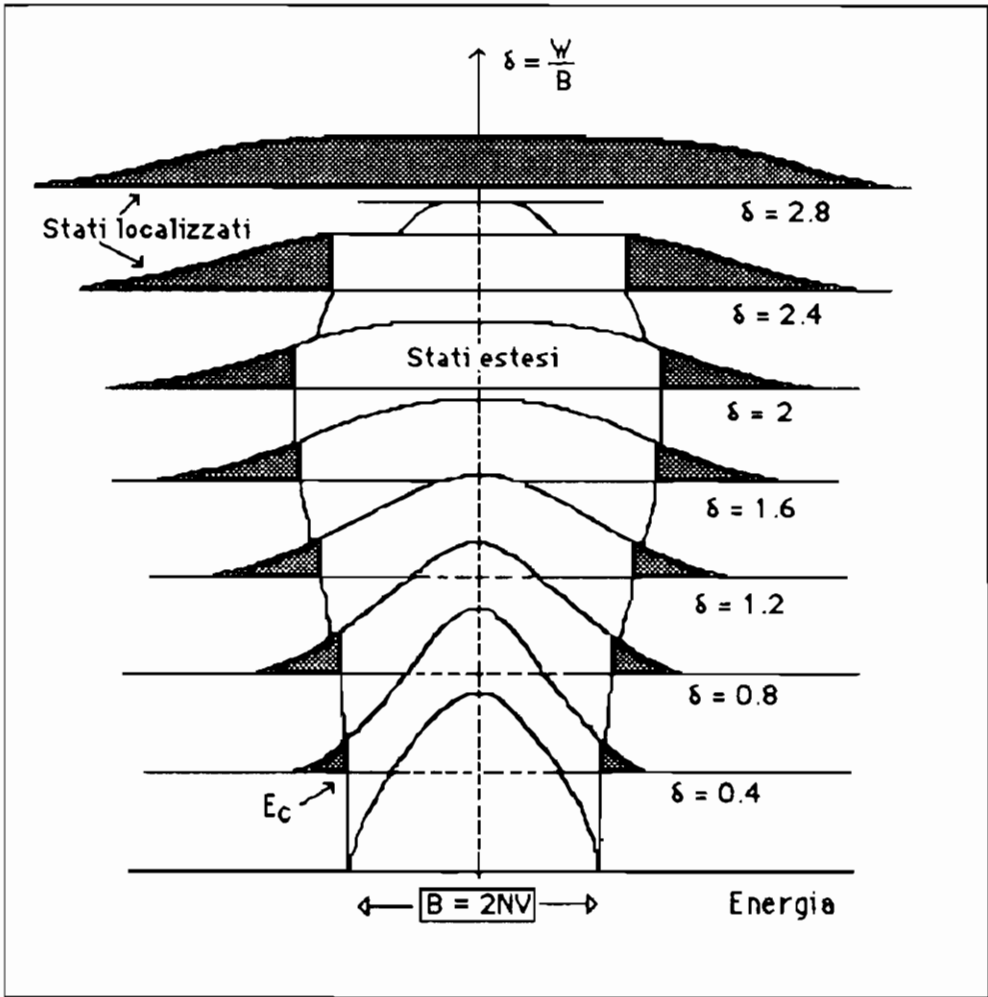


Fig.2: *Rappresentazione schematica della trasformazione dello spettro energetico al crescere del disordine assegnato al sistema, misurato dalla larghezza della distribuzione di probabilità  $W$  delle energie di sito.*

Anche l'esistenza dei mobility edge nello spettro fu dimostrata sfruttando le proprietà della funzione di Green [4, 8-10], e la condizione del loro congiungimento fece ritrovare la soglia di completa localizzazione di Anderson. In questo modo, i concetti di continuo di autovalori e quello di stati estesi, che nei sistemi cristallini vanno sempre congiunti, nei sistemi non cristallini si separano; il concetto di continuo di autostati localizzati fu accettato con una certa difficoltà. Un solido non

cristallino si comporta come un isolante (perlomeno secondo gli usuali meccanismi di conduzione) non solo se l'energia di Fermi è in un gap, ma anche se si trova entro un intervallo di stati localizzati. Se si ha la possibilità di pilotare la posizione dell'energia di Fermi da una zona di stati estesi ad una zona di stati localizzati si osserverà in generale nel sistema una transizione metallo-isolante (transizione di Anderson).

Ci si può chiedere a questo punto se esiste la possibilità di trasporto elettronico nel solido quando la sua energia di Fermi sia nella parte di spettro contenente stati localizzati. La risposta è affermativa, e porta direttamente alla possibilità di riscontri sperimentali del fenomeno della localizzazione di Anderson. Infatti è possibile un fenomeno di *hopping* dell'elettrone da uno stato localizzato in una certa regione del reticolo ad uno in un'altra a patto che le loro energie siano vicine e le funzioni d'onda abbiano una certa sovrapposizione spaziale [11,12]. Questo meccanismo ha bisogno della mediazione del campo elastico cristallino attraverso l'assorbimento o l'emissione di fononi, e quindi è, contrariamente a quello più comune, favorito da un aumento della temperatura in quanto, in questo modo, aumenta il numero di fononi disponibili. Questa peculiarità lo rende sperimentalmente riconoscibile, come faremo vedere nella prossima sezione.

La probabilità con cui questo *hopping termicamente attivato* avviene può essere stimata con la seguente espressione:

$$p \approx v_{ph} \exp(-\Delta E/kT) \exp(-2\gamma R) \quad (12)$$

In questa formula è presente innanzitutto la quantità  $v_{ph}$  dipendente dall'intensità dell'interazione elettrone-fonone nel sistema. Compare poi un fattore che dà conto della separazione  $\Delta E$  delle energie degli autostati interessati al "salto". Infine, l'ultimo fattore contiene la sovrapposizione dei due stati:  $\gamma$  è il coefficiente di Lyapunov ed  $R$  è la distanza fra i siti, cioè in pratica il salto spaziale dell'elettrone.  $\gamma$  in generale dipenderà, oltre che da altre grandezze, dalla distanza fra le energie degli autostati in gioco e l'energia del mobility edge, cioè dalla distanza che le separa dalle energie corrispondenti agli stati estesi.

#### 4. Evidenze sperimentali.

In questa sezione descriveremo brevemente due esempi in cui si osserva una localizzazione degli stati che segue il meccanismo descritto da Anderson e in cui vengono evidenziate le novità introdotte da questo fenomeno.

Il primo riguarda alcuni semiconduttori contenenti Fosforo (Si:P, Ge:P) compensati [13,14]. Questo significa che il semiconduttore è drogato in prevalenza da un tipo di impurezze, nel nostro esempio saranno donori, ma possiede anche, in minoranza, impurezze accettrici. Come vedremo, proprio quest'ultimo tipo di impurezze provocherà la localizzazione degli stati. Il modo ordinario con cui si può dar luogo a conduzione è l'eccitazione di un elettrone nella banda di conduzione del semiconduttore (alla destra nella Fig.3). Indichiamo con  $\epsilon_1$  l'energia necessaria per attivare questo meccanismo.

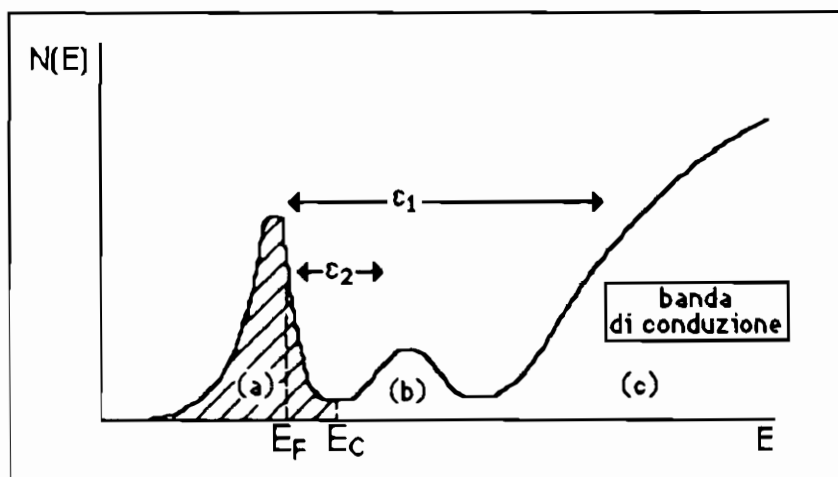


Fig.3: *Rappresentazione schematica della densità degli stati in un semiconduttore compensato. La parte di spettro tratteggiata contiene stati localizzati.  $\epsilon_1$  è l'energia necessaria per eccitarvi un elettrone nella banda di conduzione.  $\epsilon_2$  è l'energia necessaria per l'eccitazione di un elettrone nella superiore delle due bande a sinistra dovute alla interazione fra le impurezze ed  $\epsilon_2$ .  $E_F$  ed  $E_C$  sono rispettivamente l'energia di Fermi e l'energia del mobility edge.*

Come si può vedere dal grafico di densità degli stati della Fig.3, oltre alla banda di conduzione, si presentano nello spettro anche altri intervalli di energie permesse. Essi sono dovuti alle impurezze maggioritarie che formano, al crescere della concentrazione e quindi della loro interazione reciproca, una banda energetica, che tuttavia, per ragioni di correlazione elettronica, tende a separarsi in due aprendo un gap. Indicheremo l'energia necessaria per portare un elettrone nella sotto-banda superiore delle impurezze con  $\epsilon_2$ . In questa situazione la conduzione avviene per passaggio dell'elettrone da un donore neutro (cioè occupato) ad un altro donore neutro. Al crescere della concentrazione le due sottobande tendono ad allargarsi fino ad eliminare il gap che le separa (situazione riprodotta nella figura). Se l'energia di Fermi in precedenza cadeva nel gap, l'eliminazione del gap in un sistema cristallino provoca una transizione isolante-metallo; invece, dopo quanto detto sulla fisica dei sistemi disordinati questo non è affatto scontato. Infatti gli accettori minoritari, che sono carichi negativamente, provocano la formazione di un campo che agisce sulle impurezze maggioritarie provocando una ridefinizione in modo casuale delle energie di sito. Ecco quindi che rientriamo nelle condizioni previste da Anderson-Mott perché una parte dello spettro (in questo caso quella delle energie più basse) sia composto di stati localizzati. Se l'energia di Fermi si trova a sinistra del mobility edge, la conduzione avverrà per hopping termicamente attivato e la sua energia di attivazione è indicata con  $\epsilon_3$  [12]. Questa quantità è in sostanza una stima della differenza fra le energie assunte dall'elettrone prima e dopo il salto. Ad esempio se siamo in un regime di forte localizzazione e a temperature non basse, l'elettrone in generale passerà al sito primo vicino; in questo caso possiamo stimare la differenza di energia in  $\approx 1/[N(E)a^3]$ , dove  $N(E)$  è la densità degli stati per le energie in considerazione ed  $a$  è la costante reticolare. Tipicamente  $\epsilon_3$  è di un ordine di grandezza più piccola di  $\epsilon_2$ . A temperature basse, essendoci meno disponibilità di fononi per il salto energetico, l'elettrone potrà preferire un salto spaziale più lungo per trovare, all'interno di uno shell più ampio di siti, la possibilità di scarti energetici più piccoli. Se invece l'energia di Fermi si trova alla destra del mobility edge, il meccanismo sarà quello usuale, e dovuto alla delocalizzazione della funzione d'onda. In sintesi, la conduttività in un semiconduttore compensato è composta di tre contributi e può essere scritta nel modo seguente:

$$\sigma \approx \sigma_1 e^{-\epsilon_1/k_B T} + \sigma_2 e^{-\epsilon_2/k_B T} + \sigma_3 e^{-\epsilon_3/k_B T}; \quad (13)$$

le tre energie di attivazione soddisfano la relazione:  $\epsilon_3 < \epsilon_2 < \epsilon_1$ .

Un altro esempio in cui entra in azione una conduzione via hopping attivato termicamente, che può essere messa in evidenza attraverso il peculiare andamento della resistività in funzione della temperatura, è quello riguardante il composto  $Ce_2S_3$  [13,15]. Ne riproduciamo le curve della resistività nella Fig.4 [16].

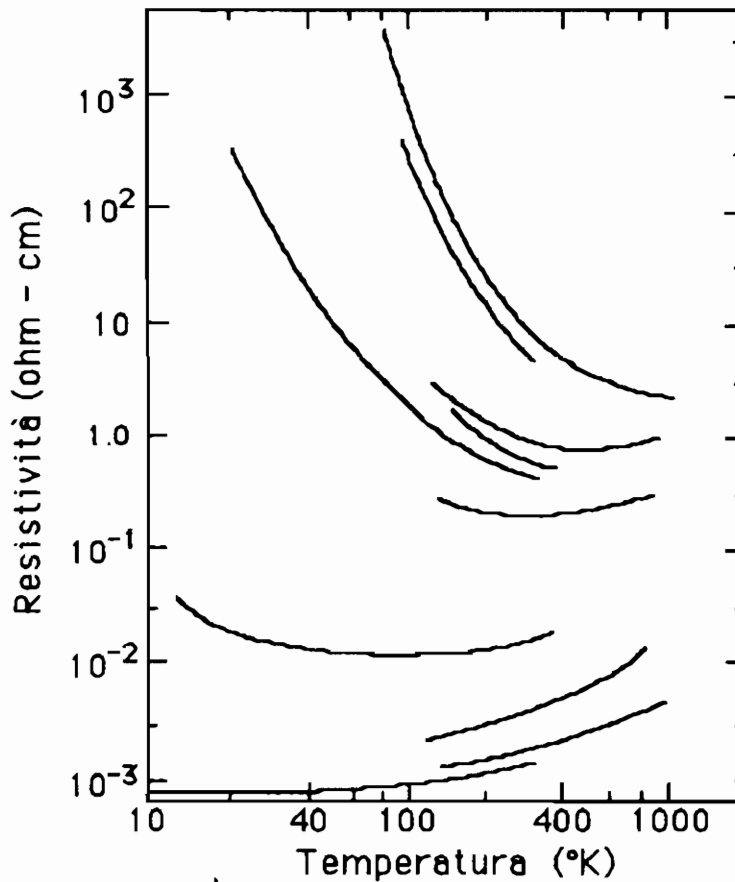


Fig.4: Grafici della resistività per il composto  $Ce_2S_3$  per varie concentrazioni di atomi di Cerio aggiunti. Dall'alto verso il basso, il valore di  $x$  e la concentrazione degli elettroni conduttori aumentano.



Il composto  $Ce_2S_3$  ha una struttura cristallina che può essere scritta in modo più conveniente come  $Ce_{3-x}S_4$  con  $x=1/3$ . In sostanza esso ha la struttura cristallina del composto  $Ce_3S_4$ , ma possiede una lacuna ogni 9 siti di Cerio, ed è un isolante. Le lacune sono distribuite casualmente nel reticolo e determinano così un campo casualmente fluttuante che può essere pensato come sovrapposto a quello del reticolo. Come al solito, questo tipo di perturbazione tende a localizzare una parte della banda degli stati elettronici. Al crescere del parametro  $x$ , cioè introducendo atomi di Cerio, si modifica in modo poco sensibile il campo delle lacune, ma si introducono, per ogni atomo di Cerio, tre elettroni nella banda, spostando così l'energia di Fermi del sistema che può essere quindi portata da una zona "localizzata" dello spettro ad una "estesa". Questo si riflette in un graduale cambiamento del meccanismo di conduzione presente nel solido, come si può vedere infatti nella Fig.4. Le curve più alte (corrispondenti a basse densità di atomi di Cerio aggiunti, e quindi ad una energia di Fermi al di quà del mobility edge) presentano una resistività che cresce al diminuire della temperatura. Questo significa che la conduzione avviene per hopping termicamente attivato. Le curve più basse, corrispondenti ad una alta concentrazione di atomi aggiunti, mostrano una resistività che decresce a basse temperature, come avviene negli usuali meccanismi di conduzione elettronica in un solido. Si possono osservare anche delle curve che possiedono un minimo. Queste curve corrispondono alla concentrazione di atomi di Cerio tali che  $E_F < E_C$ , ma  $E_F + kT > E_C$ . In questo caso, un contributo alla conduzione può ancora venire dagli usuali meccanismi di banda, che predominano alle alte temperature. Il meccanismo di hopping, anch'esso presente in questa situazione intermedia, è prevalente a basse temperature.

## 5. Sistemi con dimensionalità minore di 3.

In questa sezione delineiamo brevemente il problema della localizzazione di Anderson in sistemi unidimensionali e bidimensionali. La proprietà che accomuna questi due casi e che li distingue da quello trattato in precedenza è che non è più necessario spingere il disordine oltre una certa soglia per eliminare la presenza degli stati estesi dallo spettro, ma basta un disordine comunque piccolo per localizzare tutti gli stati dello spettro. Di questo fatto si hanno prove numeriche, ma,

perlomeno nel caso unidimensionale, è possibile dare anche spiegazioni basate su considerazioni analitiche.

Il caso bidimensionale è molto difficile da studiare, sia analiticamente [17,18], che numericamente [19,20]. Le tecniche numeriche prevedono in genere un numero di operazioni molto elevato, e tale numero cresce molto rapidamente col crescere della dimensione del sistema. Un metodo frequentemente usato è quello di ricondursi, attraverso un cambiamento di base, ad una Hamiltoniana tridiagonale, e quindi ad un nuovo sistema "effettivo" unidimensionale. Tale Hamiltoniana viene poi diagonalizzata numericamente. Questo metodo mostra i suoi limiti sicuramente quando si debbono studiare sistemi molto grandi. Inoltre può soffrire di perdite di ortogonalità nel cambio di base e perciò richiede molte cautele.

E' quindi molto difficile trarre delle conclusioni che siano valide per il sistema infinito, come è invece possibile per i sistemi unidimensionali. Questo spiega perché il caso bidimensionale sia stato a lungo controverso per ciò che concerne la presenza o meno di stati estesi nello spettro a basso disordine. Solo di recente il problema sembra essere stato chiarito, e la situazione è riassunta nelle Figg.5. Un sistema bidimensionale mostra completa localizzazione degli stati dello spettro per qualsiasi soglia di disordine introdotta. Esso sembra tuttavia esibire diversi tipi di localizzazione coesistenti nello spettro. Era stato inizialmente ipotizzato che una parte dello spettro fosse localizzata nel consueto modo esponenziale, mentre un'altra parte con una legge di potenza del tipo  $\psi(r) \approx r^{-\alpha}$  [21]. In realtà successivamente è stato chiarito che la localizzazione è ovunque esponenziale, ma con brusche variazioni nell'andamento della lunghezza di localizzazione [19,20], o più in generale della trasmissività del sistema come quelle riprodotte nelle Figg.5. I grafici riportati presentano dei "kink", la cui posizione in energia dipende solo dalla quantità di disordine che c'è nel sistema; essi sono stati chiamati "pseudo mobility-edge" in quanto ricordano le energie che separano stati estesi da stati localizzati nel caso tridimensionale. In questo caso tuttavia i pseudo mobility-edge separano regioni di minore localizzazione da regioni di maggiore localizzazione. Questo fatto pone i sistemi bidimensionali in un certo senso in una posizione intermedia fra quelli unidimensionali e quelli tridimensionali. Per meglio visualizzare questa proprietà possiamo considerare il nostro sistema bidimensionale racchiuso fra due mezzi perfettamente conduttori; i due grafici riportati nelle Figg.5 riproducono il logaritmo

naturale della trasmittività del sistema da un estremo all'altro in funzione dell'energia per due soglie di disordine.

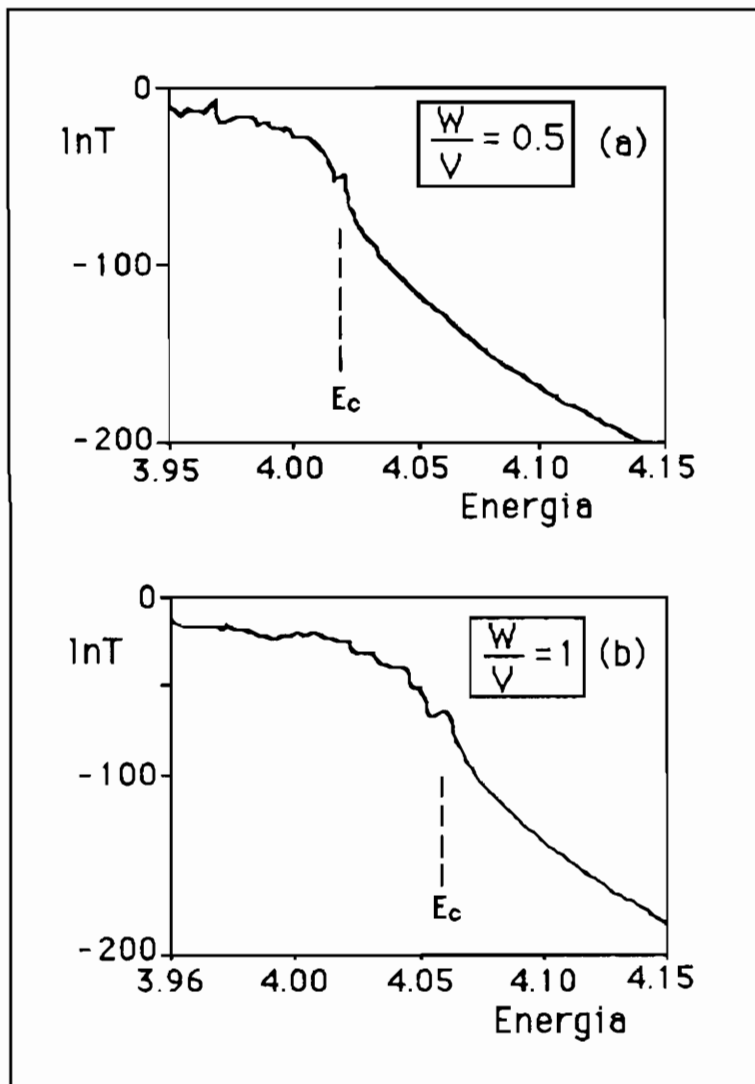


Fig.5: Grafici del logaritmo della trasmittività di un sistema bidimensionale disordinato per due valori della larghezza di distribuzione di probabilità delle energie di sito:  $W=0.5V$  (a) e  $W=V$  (b). Con  $E_c$  è indicata la posizione dello pseudo-mobility edge (da [20]).

In un reticolo quadrato, in assenza di disordine ( $W=0$ ) lo spettro energetico si estende nell'intervallo  $(-4V, 4V)$  dove  $V$  è l'interazione coi primi vicini. Una volta introdotta una fluttuazione casuale delle energie di sito larga  $W$ , il numero delle energie permesse del sistema aumenta, e il nuovo intervallo ha estremi  $(-4V-W/2, 4V+W/2)$ . In corrispondenza di uno spettro localizzato, la trasmittività  $T$  tra due mezzi perfettamente conduttori è sempre molto bassa, come deve essere per un sistema isolante; tuttavia è facile vedere dalle Figg. 5a e 5b, che corrispondono ai livelli di disordine  $W=0.5V$  e  $W=V$ , come l'andamento del logaritmo naturale di  $T$  presenti bruschi cambiamenti in corrispondenza delle energie indicate con  $E_c$  (pseudo mobility edge), che separano due regimi sostanzialmente diversi, uno più fortemente isolante ed uno meno. Sebbene le Figg.5 riguardino la trasmittività del sistema e non propriamente il coefficiente di Lyapunov, è noto che (sempre nella parte di spettro localizzato) la quantità  $-\ln(T)/na$  tende (a parte semplici fattori numerici) al coefficiente di Lyapunov nel limite di  $n \rightarrow \infty$ , cioè al crescere della distanza fra gli estremi conduttori misurata da  $n$  volte il passo reticolare a [22]. Quindi i risultati riportati nelle Figg.5 sono implicitamente validi anche per la lunghezza di localizzazione degli stati.

Il caso unidimensionale [22,23] è ovviamente il più semplice da trattare. Questo fatto ha consentito non solo l'applicazione di numerose tecniche numeriche molto diverse fra di loro, ma anche la derivazione di risultati analitici [24] e di teoremi generali che hanno consentito una comprensione generale del problema al di là dei singoli risultati. Il punto fondamentale è che nei sistemi unidimensionali si ha completa localizzazione degli stati per ogni soglia di disordine [22,24] con involuppo esponenziale della funzione d'onda. Infatti la quantità che abbiamo indicato con  $\gamma$  (coefficiente di Lyapunov), che è nulla quando lo stato è esteso oppure quando la localizzazione è più debole di quella esponenziale, è come vedremo sempre positiva.

Fra le tecniche numeriche più usate c'è la diagonalizzazione diretta della matrice Hamiltoniana che, in questo caso, è una matrice tridiagonale, e quindi facilmente trattabile. Questa tecnica tuttavia non è molto economica dal punto di vista computazionale, e dà molte più informazioni di quelle che in realtà siano veramente necessarie. Sicuramente più efficaci sono le tecniche iterative che consentono di calcolare particolari elementi di matrice della funzione di Green del reticolo [25,26]. Esse sono basate in generale su trasformazioni in cui, una volta effettuata una partizione dello spazio di Hilbert in due sottospazi di cui uno sia di interesse, vengono preservate le

informazioni riguardanti questo sotto-sistema mentre vengono rimossi i gradi di libertà relativi all'altro. Il risultato che si ottiene in generale è una Hamiltoniana "efficace" avente l'importante proprietà che, applicata ai vettori del sottospazio di interesse (che indichiamo con  $A$ ), fornisce la funzione di Green del sistema, proiettata su quel sottospazio:

$$G_{AA}(E) = \left\langle A \left| \frac{1}{E - H_{\text{eff}}(E)} \right| A \right\rangle \quad (14)$$

Come è noto, a partire dalla funzione di Green è possibile ricavare numerose informazioni sul sistema, come per esempio la densità degli stati. L'utilità di avere disponibile la funzione di Green in un problema come quello qui trattato è legata alla possibilità di avere informazioni sulle proprietà di localizzazione degli stati del sistema. A questo proposito, è stata derivata una relazione che collega direttamente il coefficiente di Lyapunov per gli autostati di un sistema disordinato alla densità degli stati elettronici  $n(E)$  [27,28]:

$$\gamma(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln \left| \frac{E - E'}{V} \right| dn(E') \quad (15)$$

Ancora più diretta, è la seguente relazione in forma di limite [28]:

$$\gamma(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left| \frac{G_{nn}(E)}{G_{on}(E)} \right| \quad (16)$$

nella quale, si noti, si ha bisogno di due soli elementi di matrice della funzione di Green.

Un'altra tecnica frequentemente usata fa ricorso alle cosiddette *matrici di trasferimento*. Esse sono definite a partire dalle energie di sito  $a_n$  e dall'interazione  $V$  nel modo seguente:

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{E - a_n}{V} & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (17)$$

La proprietà fondamentale della matrice  $T_n$  è che, fissato un autostato di energia  $E$  consente di calcolare tutte le ampiezze  $u_n$  della funzione d'onda sul reticolo note le prime due  $u_0$  ed  $u_1$  tramite la relazione ricorsiva:

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = T_n T_{n-1} \dots T_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} \quad (18)$$

La matrice  $T_n$ , che ha determinante 1, ha la proprietà di possedere, nelle zone di spettro continuo del sistema, gli autovalori unimodulari e il modulo della traccia limitato superiormente da 2.

La connessione con le proprietà di localizzazione di un sistema unidimensionale è fornita dal "fattore di crescita esponenziale" definito come:

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} [\ln (u_N^2 + u_{N+1}^2)] \quad (19)$$

che, per quanto detto prima, è nullo negli intervalli di energia contenenti stati estesi (spettro continuo). Esso ha una connessione molto semplice con il coefficiente di Lyapunov:  $\lambda(E) = 2 \gamma(E)$ .

La tecnica delle matrici di trasferimento consente di dare una risposta rigorosa alla questione della localizzazione degli stati in un sistema unidimensionale disordinato. Infatti, se le energie  $a_n$  sono variabili casuali, le matrici  $T_n$  sono matrici casuali non commutanti con determinante unitario; in queste condizioni può essere applicato il teorema di Furstenberg [29] il quale afferma che, con probabilità 1, dato un vettore  $v$  (in questo caso di  $\mathbf{R}^2$ ), il risultato dell'applicazione:

$T_n T_{n-1} \dots T_1 v$  ha norma esponenzialmente crescente con  $n$ . Cioè, più precisamente:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln [\|T_N(E) \dots T_1(E)v\|] = \lambda(E) > 0 \quad (20)$$

per qualsiasi energia, e solo dall'energia dipende il limite  $\lambda$ . Come si vede, questo prova la completa localizzazione esponenziale degli stati nel caso unidimensionale.

## 6. Conclusioni.

Abbiamo visto come una schematizzazione piuttosto semplice come quella data da Anderson nel 1958 di un solido disordinato è in grado di dare risultati estremamente interessanti. Il caso per primo affrontato è stato quello di un sistema tridimensionale, attraverso la riduzione del problema della localizzazione di un autostato alla convergenza di una serie perturbativa. Questa soluzione del problema, dovuta alla intuizione di Anderson, che ha avuto bisogno di messe a punto nel rigore dei suoi argomenti, tuttavia ha mostrato di essere sostanzialmente corretta. Essa ha messo in luce il concetto di stato localizzato, e come può essere possibile un trasporto di carica quando gli elettroni sono confinati in una parte del reticolo. Il nuovo tipo di conduzione elettrica entra in gioco quando l'energia di Fermi del sistema si trova in una parte di spettro che è composta di stati localizzati, e quindi in questo tipo di sistemi si dovrà sempre tener presente la reciproca posizione dell'energia di Fermi e del mobility edge.

La coesistenza di stati estesi e di stati localizzati nello spettro, che nei sistemi tridimensionali è presente in caso di basso disordine, non si verifica mai in sistemi di dimensionalità inferiore a tre. In questi casi si sono cercate soluzioni al problema non perturbative ma complete, anche se numeriche. Nel caso unidimensionale, in particolare, ad esse si sono affiancati anche risultati matematicamente rigorosi.

## Bibliografia

- [1] P.W. Anderson, Phys. Rev. **109**, 1492 (1958).
- [2] J. M. Ziman, J. Phys. **C2**, 1230 (1969).
- [3] J.M. Ziman, *Models of Disorder*, Cambridge University Press, 1979.
- [4] E.N. Economou e M.H. Cohen, Phys. Rev. **B5**, 2932 (1972).
- [5] N.F. Mott, Adv. Phys. **16**, 49 (1967).
- [6] N.F. Mott, J. Non-Crystalline Solids **1**, 1 (1967).
- [7] N.F. Mott, Phil. Mag. **17**, 1259 (1968).
- [8] E.N. Economou e M.H. Cohen, Phys. Rev. Lett. **25**, 1445 (1970).
- [9] D.C. Licciardello e E.N. Economou, Phys. Rev. **B11**, 3697 (1975).
- [10] D.J. Thouless, J. Phys. **C3**, 1559 (1970).
- [11] A. Miller e E. Abrahams, Phys. Rev. **120**, 745 (1960).
- [12] N.F. Mott e W.D. Twose, Adv. Phys. **10**, 107 (1961).
- [13] N.F. Mott e E. A. Davis, *Electronic processes in non crystalline materials*, Clarendon Press, Oxford 1971.
- [14] N.F. Mott, *Metal-Insulator Transitions*, Taylor&Francis LTD, 1974.
- [15] M. Cutler e N.F. Mott, Phys. Rev. **181**, 1336 (1969).
- [16] M. Cutler e J.F. Leavy, Phys. Rev. **133**, A1153 (1964).
- [17] E. Abrahams, P.W. Anderson, D.C. Licciardello e T.V. Ramakrishnan, Phys. Rev. Lett. **42**, 673 (1979).
- [18] D. Vollhardt e P. Woelfle, Phys. Rev. Lett. **45**, 482 (1980).
- [19] T.J. Godin e R. Haydock, Europhys. Lett. **14**, 137 (1991).
- [20] T.J. Godin e R. Haydock, Phys. Rev. **B46**, 1528 (1992).
- [21] M. Kaveh e N.F. Mott, J. Phys. **C18**, 2235 (1983).
- [22] K. Ishii, Suppl. Progr.Theor. Phys. **53**, 77 (1973).
- [23] D.J. Thouless, Phys. Rep. **13C**, 94 (1974).
- [24] E.N. Economou e M.H. Cohen, Phys. Rev. **B4**, 396 (1971).
- [25] G. Grosso e G. Pastori Parravicini, Adv. Chem. Phys. **62**, 81 (1986); **62**, 131 (1986).
- [26] P. Giannozzi, G. Grosso, S. Moroni e G. Pastori Parravicini, Appl. Num. Math. **4**, 273 (1988).
- [27] D.C. Herbert e R. Jones, J. Phys. **C4**, 1145 (1971).
- [28] D.J. Thouless, J. Phys. **C5**, 77 (1972).
- [29] H. Furstenberg, Trans. Amer. Math. Soc. **108**, 377 (1963).



**Matteo Paris**  
**Dipartimento di Fisica A. Volta**  
**Università di Pavia**

# Breve introduzione alla Teoria Quantistica della Stima

**Seminario tenuto il 6 Novembre 1992**

# 1 Introduzione

In Meccanica Classica per stima di una grandezza si intende generalmente una misura indiretta. Quando determinati parametri che caratterizzano un sistema non possono essere valutati con misure dirette questi devono essere inferiti da altre esperienze e la procedura di inferenza é, appunto, la stima. Un altro problema di stima si ha se, in seguito ad una misura, si debba decidere in quale stato, tra  $M$  possibile scelte, sia un determinato sistema fisico. Una teoria della stima in Meccanica Classica é dunque qualcosa che formalizza, ed in secondo luogo ottimizza, la procedura di inferenza ma non riguarda problemi di teoria della misurazione.

In Meccanica Quantistica viceversa il concetto di misura e la sua descrizione sono riferiti ad una procedura ben precisa che comporta la costruzione di operatori autoggiunti o equivalentemente di misure a valori di proiettore. Tale descrizione é valida per una altrettanto precisa classe di grandezze che costituiscono appunto le osservabili. Questo schema non esaurisce però le possibili osservazioni che é possibile effettuare su di un sistema, si pensi, ad esempio, alla misura congiunta di osservabili che non commutano oppure alla misura generalizzata di parametri della teoria cui non sono associate osservabili. La necessaria generalizzazione del concetto di misura quantistica é legata al concetto di stima ed una teoria quantistica della stima é qualcosa che precisa le procedure per osservazioni generalizzate. Nel seguito stima quantistica sarà dunque sinonimo di misura quantistica generalizzata. Non ho però voluto abbandonare completamente questa denominazione poich'è é nella generalizzazione quantistica della teoria della stima classica dove sono state sviluppate le procedure che ottimizzano una qualsiasi misura generalizzata. Nel primo paragrafo ho brevemente riassunto cosa si intenda per misura quantistica generalizzata e come questo concetto si leghi alla definizione usuale. Nel paragrafo 2 viene analizzata dettagliatamente la teoria di una stima classica nel suo caso piú semplice e viene indicato come si debba procedere per una generalizzazione al caso quantistico. Nel paragrafo 3, infine, sono descritti alcuni esempi di stima quantistica che aiutano a comprendere le differenze tra parametri che sono osservabili in senso proprio o generalizzato. Il paragrafo 4 chiude questa breve nota con alcune considerazioni conclusive.

## 2 Misure quantistiche generalizzate

In Meccanica Quantistica si parla di misura di una o piú osservabili quando a queste corrisponde un operatore autoaggiunto o un insieme di operatori autoggiunti che commutano e che possiamo rappresentare come:

$$\hat{X}_i = \int x_i d\hat{E}(\mathbf{x}) \quad i = 1, \dots \quad (2.1)$$

$$d\hat{E}(\mathbf{x}) = |\mathbf{x}\rangle\langle\mathbf{x}|d\mathbf{x} , \quad (2.2)$$

l'insieme degli  $|\mathbf{x}\rangle$  é un sistema ortonormale completo di autovettori di  $\hat{X}$  o comuni agli  $\hat{X}_i$  nel caso di misura congiunta.

La funzione

$$\mathbf{x} \longrightarrow d\hat{E}(\mathbf{x}) , \quad (2.3)$$

é una misura a valori di proiettore (PVM).

Se il sistema é nello stato  $\hat{\rho}_S$  la distribuzione di probabilitá per l'osservabile  $X$  sará data da:

$$dP(\mathbf{x}) = \text{tr}\{\hat{\rho}_S d\hat{E}(\mathbf{x})\} = \langle\mathbf{x}|\hat{\rho}_S|\mathbf{x}\rangle d\mathbf{x}; \quad (2.4)$$

Questo schema non é però abbastanza generale. Le osservazioni quantistiche che non sono misure quantistiche senso proprio sono classificabili in due categorie essenziali:

- misura congiunta di osservabili che non commutano;
- misura di grandezze classiche cui non corrisponde una osservabile quantistica.

Per misura congiunta di osservabili non compatibili si intende, ad esempio, la misura simultanea di posizione e momento di una particella [Yue82], che é un'osservazione possibile ma per la quale la relazione di incertezza di Heisemberg si scrive:

$$\Delta p \Delta q \geq 1 \quad (2.5)$$

e prevede [Art88] un rumore aggiunto di 3 dB rispetto alla consueta relazione

$$\Delta p \Delta q \geq \frac{1}{2} \quad (2.6)$$

che si riferisce all'incertezza sulla misura di una delle osservabili quando il sistema é preparato in uno stato di incertezza fissata nell'altra osservabile.

Una misura congiunta di notevole importanza sperimentale é compiuta comunemente nei laboratori di ottica quando si rivelano due quadrature <sup>1</sup> di un'onda elettromagnetica realizzando una misura eterodina [Yue78]. Nella seconda classe ricadono invece osservazioni singole di grandezze come la fase o l'angolo cui non corrispondono analoghi operatori quantistici. Quando si cercano, infatti, di costruire quelli che dovrebbero essere i coniugati canonici rispettivamente dell'operatore numero  $\hat{n}$  e dell'operatore momento angolare  $\hat{L}$  si va incontro a problemi di consistenza non risolvibili (si veda ad esempio [Peg89] ed i riferimenti ivi contenuti).

L'esistenza di di procedure di osservazione piú generali delle misure quantistiche é giá suggerito, in maniera formale, dalla (2.4). Affinchè  $dP(\mathbf{x})$  sia un densità di probabilità non é necessario, infatti, che l'operatore su cui si traccia la matrice densità del sistema sia un proiettore ortogonale.

Le condizioni minimali su tale operatore

$$\hat{X}(\mathbf{x}) = \int \mathbf{x} d\hat{X}(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

sono espresse da :

1.  $d\hat{X}(\mathbf{x})$  misura autoggiunta
2.  $d\hat{X}(\mathbf{x})$  misura positiva

---

<sup>1</sup>In sostanza due misure di campo elettrico o magnetico sfasate di un quarto di periodo

3.  $d\hat{X}(\mathbf{x})$  risolve l'identità

$$\int d\hat{X}(\mathbf{x}) = \hat{1}. \quad (2.8)$$

La funzione

$$\mathbf{x} \longrightarrow d\hat{X}(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

é una misura a valori di operatore di probabilità (POM).

Il legame con la teoria convenzionale é piú stretto di una semplice generalizzazione, una stima quantistica infatti puó essere sempre vista come una misura propria [Hol82], [Oza91], [Nai40] su uno spazio di Hilbert  $\mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$  allargato agli stati dell'apparato di misurazione rispetto allo spazio  $\mathcal{H}_S$  che descrive solo gli stati del sistema.

Se  $|\psi_{\mathbf{x}}\rangle \in \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_P$  sono autevettori simultanei degli operatori "allargati" allora possiamo costruire una densità di probabilità in modo proprio come:

$$\frac{dP(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \text{tr}(\hat{\rho}_S \otimes \hat{\rho}_P |\psi_{\mathbf{x}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{x}}|) = \text{tr}_S[\hat{\rho}_S \text{tr}_P(\hat{\rho}_P |\psi_{\mathbf{x}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{x}}|)]. \quad (2.10)$$

La POM si ottiene come traccia parziale sullo spazio dell'apparato di misura (Probe)

$$d\hat{X}(\mathbf{x}) = \text{tr}_P(\hat{\rho}_P |\psi_{\mathbf{x}}\rangle \langle \psi_{\mathbf{x}}|) \equiv \langle \psi_{\mathbf{x}} | \hat{\rho}_P | \psi_{\mathbf{x}} \rangle \quad (2.11)$$

ed il fatto che non sia, in generale, un proiettore ortogonale é il ricordo che in una misura generalizzata non si puó separare l'osservazione dall'apparato sperimentale che la realizza.

### 3 Teoria della Stima

Il risultato di una osservazione su un sistema classico é dato in generale da  $N$  numeri reali  $\mathbf{v}$  la cui distribuzione di probabilità  $p_j(\mathbf{v})$  dipende dallo stato  $j$  in cui si trova il sistema in esame.

Il problema della stima nella sua versione piú semplice riguarda il test delle ipotesi su quale sia lo stato del sistema che si fanno in seguito all'osservazione  $\mathbf{v}$ .

Chiameremo *scelta* la singola inferenza

$$\mathbf{v} \longrightarrow i \quad i = 1, 2, \dots, M \quad (3.12)$$

che ipotizza il sistema nello stato  $i$  quando si é osservato  $\mathbf{v}$  mentre chiameremo *strategia* la procedura generale che indica quale sia la scelta da effettuare in seguito alla generica osservazione  $\mathbf{v}$ .

Descriveremo tale strategia attraverso la funzione dei dati

$$\pi_i(\mathbf{v}) \quad \textit{Strategia} \quad (3.13)$$

che esprime la probabilitá che sia scelta l'ipotesi  $i$  in seguito all'osservazione  $\mathbf{v}$ , essendo una probabilitá  $\pi_i(\mathbf{v})$  dovrà soddisfare le condizioni:

$$0 \leq \pi_i(\mathbf{v}) \leq 1 \quad (3.14)$$

$$\sum_i^M \pi_i(\mathbf{v}) = 1. \quad (3.15)$$

Ammetteremo inoltre che i diversi stati possibili del sistema abbiamo diverse probabilitá *a priori*  $\chi_i$  di essere occupati.

Ad ogni scelta (3.12) é associato un costo  $C_{ij}$  che tiene conto dell'errore che si commette compiendola nel caso il sistema sia in realtá in un diverso stato  $j$ , ad ogni ipotesi  $i$  viene cosí associata una funzione dei dati  $\mathbf{v}$

$$W_i(\mathbf{v}) = \sum_j \chi_j C_{ij} p_j(\mathbf{v}) \quad \textit{Rischio totale} \quad (3.16)$$

che esprime il costo totale della scelta dell'ipotesi  $i$  a prescindere da quale sia effettivamente lo stato del sistema cioé sommando su tutti i possibili casi di veritá.

Il costo medio della strategia si ottiene sommando i costi di tutte le possibile scelte ed integrando su tutte le possibili osservazioni:

$$\bar{C} = \int d\mathbf{v} \sum_i W_i(\mathbf{v}) \pi_i(\mathbf{v}) \quad \textit{Costo della Strategia.} \quad (3.17)$$

Occupiamoci ora di ottimizzare la procedura: la strategia migliore é quella che porta ad un costo medio minore,  $\bar{C}$  é minimo se é minimo l'integrando per ogni valore di  $\mathbf{v}$  cioè se scegliamo

$$\pi_i(\mathbf{v}) = 1 \quad \pi_j(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall j \neq i \quad (3.18)$$

nel caso succeda che

$$W_i(\mathbf{v}) \leq W_j(\mathbf{v}). \quad (3.19)$$

In altre parole: la strategia migliore é quella che sceglie l'ipotesi con rischio minore.

Possiamo riassumere questo risultato nelle equazioni di ottimizzazione:

$$\begin{cases} \{W_i(\mathbf{v}) - \Upsilon(\mathbf{v})\}\pi_i(\mathbf{v}) = 0 \\ W_i(\mathbf{v}) - \Upsilon(\mathbf{v}) \geq 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

ove

$$\Upsilon(\mathbf{v}) = \min_i W_i(\mathbf{v}) = \sum_i W_i(\mathbf{v})\pi_i(\mathbf{v}) \quad (3.21)$$

é il minimo tra le funzioni rischio.

Si può mostrare inoltre che la strategia definita dalle (3.20) é unica ed una altra qualsiasi strategia porta ad un costo medio  $\bar{C}$  maggiore.

La strategia ottima é cosí determinata una volta che siano stati assegnati i costi relativi alle singole scelte. L'esempio piú semplice e piú intuitivo di costo é dato assegnando:

$$C_{ij} = 1 \quad \forall j \neq i, \quad C_{ii} = 0 \quad (3.22)$$

che premia la scelta esatta e penalizza in maniera eguale ogni errore.

Un altro tipico problema di stima classica riguarda le misure indirette ovvero quando la distribuzione di probabilità dei dati osservati  $\mathbf{v}$  che scriviamo come  $P(\mathbf{v}|\bar{\theta})$  dipende dal valore di alcuni parametri  $\bar{\theta}$ .

Il valore di tali parametri sia ignoto e ad esso si vuole risalire attraverso l'osservazione  $\mathbf{v}$ . Le stime di tali valori saranno delle funzioni dei dati  $\bar{\theta}(\mathbf{v})$  dette appunto funzioni stima.

I costi saranno funzioni delle stime e del valore vero dei parametri, due semplici esempi sono dati dal costo gaussiano

$$C(\bar{\theta}, \theta) = (\bar{\theta} - \theta)^2 \quad (3.23)$$

o dall'analogo continuo dei costi espressi in (3.22)

$$C(\bar{\theta}, \theta) = - \prod_i \delta(\bar{\theta}_i - \theta_i). \quad (3.24)$$

Questo problema non é altro che la versione continua del problema relativo al test delle ipotesi, con gli opportuni cambiamenti di notazione la soluzione rimane la stessa determinata dalle (3.20) cioè la strategia migliore é ancora quella che comporta il rischio minore, il cambiamento fondamentale rispetto al caso discreto riguarda la struttura del rischio che non é piú rappresentato da M funzioni dei dati  $W_i(\mathbf{v})$  ma diventa una funzione dei dati e delle delle stime

$$W(\bar{\theta}, \mathbf{v}) = \int d\theta z(\theta) C(\bar{\theta}, \theta) P(\mathbf{v}|\bar{\theta}) \quad (3.25)$$

ove  $z(\theta)$  é la probabilità a priori per i valori dei parametri. Per arrivare alla strategia ottima si dovranno quindi assegnare i costi ed in seguito minimizzare il rischio rispetto alle stime.

Seguendo questo procedimento per il costo gaussiano (3.23) si ottiene come miglior stima il valore atteso

$$\bar{\theta}_j(\mathbf{v}) = \int d\theta \theta_j P(\mathbf{v}|\bar{\theta}) \quad (3.26)$$

per la distribuzione di probabilità condizionata dei dati.

Utilizzando il costo-delta (3.24), il rischio diventa

$$W(\bar{\theta}, \mathbf{v}) = -z(\bar{\theta}) P(\mathbf{v}|\bar{\theta}) \quad (3.27)$$

e sostituendo nell'espressione del costo medio della strategia si ottiene che il valore minimizzato é espresso da

$$\bar{C}_{MIN} = - \int d\theta z(\theta) q(\theta|\bar{\theta}). \quad (3.28)$$

L'espressione  $q(\bar{\theta}|\theta)d\theta$  esprime la probabilità di stimare il valore dei parametri in un intorno del valore  $\bar{\theta}$  quando il valore vero é dato da



$\theta$  la strategia ottima che si ottiene dal costo-delta (3.24) massimizza perciò la probabilità di stimare il valore vero, per questo motivo ci si riferisce al risultato di tale strategia come alla stima di massima verosimiglianza che vedremo avere un grosso interesse in ambito quantistico.

In teoria classica della stima la strategia si rappresenta come probabilità di stimare un certo valore di parametri  $\theta$  in seguito ad una certa misura, passando al caso quantistico un'analogha probabilità si costruisce come traccia sull'operatore densità del sistema di un opportuna misura autoggiunta [Hel76]  $d\hat{X}(\theta)$ :

$$dP(\bar{\theta}, \mathbf{x}) = \text{tr} [\rho(\theta)d\hat{X}(\theta)] \quad (3.29)$$

che sarà associato ad una PVM o ad una POM a seconda che si tratti di misura propria o generalizzata<sup>2</sup>.

Il nostro intento è quello di fornire indicazioni per stimare grandezze che non si possono misurare in senso proprio, la teoria quantistica della stima si occuperà quindi della ricerca della POM che realizza la strategia ottima relativa a determinati costi.

La trattazione segue la falsariga del caso classico fino a scrivere le equazioni di ottimizzazione

$$\begin{cases} \{\hat{W}(\bar{\theta}) - \hat{Y}\} d\hat{X}(\theta) = 0 \\ \hat{W}(\bar{\theta}) - \hat{Y} \geq 0 \end{cases} \quad (3.30)$$

ove

$$\hat{W}(\bar{\theta}) = \int d\theta z(\theta) C(\bar{\theta}, \theta) \rho(\theta) \quad (3.31)$$

è l'operatore hermitiano rischio e  $\hat{Y}$  è l'operatore hermitiano analogo alla funzione minimo  $\hat{Y}(\mathbf{v})$ .

Il costo medio della strategia è espresso da

$$\bar{C} = \text{tr} \int \hat{W}(\bar{\theta})d\hat{X}(\theta). \quad (3.32)$$

---

<sup>2</sup>Una stima quantistica descrive quindi entrambi. Come sarebbe auspicabile accade che in generale, cioè per un'ampia classe di costi, la miglior stima di una osservabile è la misura propria.

Per il costo delta (3.24) si ottiene la stima quantistica di massima verosimiglianza che massimizza la probabilità

$$q(\theta|\theta)d\theta = \text{tr}[d\hat{X}(\theta)\rho(\theta)] \quad (3.33)$$

di stimare il valore vero.

## 4 Stima Quantistica di uno Sfasamento

Illustriamo ora il procedimento di stima quantistica di uno sfasamento, [Hel74], [Hol78] consideriamo un sistema inizialmente in uno stato puro  $\hat{\rho}_0 = |\psi\rangle\langle\psi|$  e successivamente sfasato  $\hat{\rho}_\theta = e^{-i\hat{A}\theta}\hat{\rho}_0 e^{i\hat{A}\theta}$ , al variare dell'operatore  $\hat{A}$  il parametro  $\theta$  assume differenti significati fisici:

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{A} = \hat{P} \quad \longrightarrow \theta \text{ é una posizione} \\ \hat{A} = a^\dagger a \quad \longrightarrow \theta \text{ é una fase} \\ \hat{A} = \hat{L}_3 \quad \longrightarrow \theta \text{ é un angolo} \end{array} \right. \quad (4.34)$$

e cosí via.

Andremo a cercare la POM che realizza la stima di massima verosimiglianza cioé assegnamo il costo-delta (3.24), si noti comunque che assegnando il costo gaussiano<sup>3</sup> si giunge alla medesima POM che possiamo quindi considerare come naturale (che non dipende arbitrariamente dai costi) per la stima di uno sfasamento.

Sostituendo l'espressione del costo (3.24) nelle equazioni di ottimizzazione (3.20) e cercando POM della forma

$$d\hat{X}(\theta) = d\theta \underbrace{e^{-i\hat{A}\theta} \hat{\xi}_0 e^{i\hat{A}\theta}}_{\hat{\xi}(\theta)} \quad (4.35)$$

si ottengono le:

$$\left\{ \begin{array}{l} [\hat{Y}(\mathbf{v}) - \hat{\rho}(\theta)]\hat{\xi}(\theta) = \mathbf{0} \\ \hat{Y}(\mathbf{v}) - \hat{\rho}(\theta) \geq \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (4.36)$$

<sup>3</sup>Piú precisamente  $C(\bar{\theta}, \theta) = \sin^2[\frac{1}{2}(\bar{\theta} - \theta)]$  che é l'approssimazione di un costo gaussiano per una grandezza periodica

Le (4.36) sono risolte dalla POM:

$$d\hat{X}(\theta) = \frac{d\theta}{2\pi} e^{-i\hat{A}\theta} |\gamma\rangle \langle \gamma| e^{i\hat{A}\theta} \quad (4.37)$$

dove  $|\gamma\rangle$  é un vettore fissato le cui componenti nella base di autovettori  $|k\rangle$  di  $\hat{A}$  sono date da:

$$\gamma_k = \begin{cases} \langle k|\gamma\rangle = e^{ix_k} & x_k \neq 0 \\ 1 & x_k = 0 \end{cases} \quad (4.38)$$

$x_k$  sono le componenti nella medesima base del vettore di stato iniziale  $|\psi\rangle$ .

É a questo livello che possiamo notare la differenza tra una stima vera e propria cioè una misura generalizzata ed una stima che invece é equivalente ad una misura propria, infatti gli stati  $|\gamma(\theta)\rangle = e^{-i\hat{A}\theta} |\gamma\rangle$  sono ortogonali (e quindi la POM una PVM) se e solo se

$$\langle \gamma(\theta)|\gamma(\theta')\rangle = \sum_k e^{-ik(\theta-\theta')} \quad (4.39)$$

é eguale alla  $\delta(\theta - \theta')$ , cosa che non succede ne per la fase ne per gli angoli (gli autovalori sia di  $\hat{n}$  sia di  $\hat{L}_3$  sono solo positivi) ma che succede per la posizione. La stima della posizione é quindi la misura dell'operatore posizione anche se concettualmente la prima é la stima della localizzazione del pacchetto d'onde che descrive una particella la seconda é la misura quantistica della posizione della particella.

Viceversa la stima di massima verosimiglianza di una fase o di un angolo é la miglior procedura per una valutazione quantistica di tali parametri.

## 5 Conclusioni

Non tutte le misure sperimentali che si possono eseguire su di un sistema quantistico sono descritte dalla consueta teoria della misura quantistica basata sulle misure a valori di proiettore.

La teoria quantistica della stima risolve brillantemente il problema concettuale di fornire delle prescrizioni per la realizzazione di misure generalizzate giungendo alla POM di massima verosimiglianza che é l'oggetto naturale (non dipendente dai costi assegnati) per questa realizzazione, cosí come l'assegnazione di operatori autoaggiunti od equivalentemente di una misura a valori di proiettore realizza una misura quantistica propria.

La realizzazione di una misura generalizzata passa attraverso una misura su uno spazio allargato come descritto nel paragrafo 2, tale riduzione non é unica, esistono cioé infinite misure su spazi allargati a differenti apparati di misurazione che tracciano la medesima stima.

Il limite della teoria quantistica della stima sta nel fatto che le equazioni di ottimizzazione sono complicate da trattare ed in pratica non si risolvono oltre gli esempi nel paragrafo 4.

## Bibliografia

- [Art88] E. Arthurs, M. S. Goodman *Phys. Rev. Lett.* **60**, 2447 (1988)
- [Hel74] C. W. Helstrom *Int. J. Theor. Phys.* **11**, 357 (1974);
- [Hel76] C. W. Helstrom *Quantum Detection and Estimation Theory* (Academic Press New York, 1976)
- [Hol78] A. S. Holevo *Rep. Math Phys* **13**, 287 (1978)
- [Hol82] A. S. Holevo *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory*, North-Holland Pub.Comp., 1982
- [Nai40] M. A. Naimark *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.* **4**, 227 (1940)
- [Oza91] M. Ozawa, Operator algebras and nonstandard analysis in *Current Topics in Operator Algebras* ed. by H. Araki et. al., World Scientific,
- [Peg89] D. T. Pegg, S. M. Barnett, *Phys. Rev.* **A39**, 1665 (1989)
- [Yue82] H. P. Yuen *Phys. Lett.* **91A**, 101 (1982)
- [Yue78] H. P. Yuen and J. H. Shapiro, *IEEE Trans. Inf. Theory*, **24**, 657 (1978); **25**, 179 (1979); **26**, 78 (1980)



**Matteo Cacciari**

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica  
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare  
Sezione di Pavia**

# Susy

**Seminario tenuto il 24 Novembre 1992**

# 1 Introduzione

WAKE UP LITTLE SUSY  
Paul Simon & Art Garfunkel

Fin dalla sua invenzione, da parte di J. Wess e B. Zumino, nel 1973, la Supersimmetria [1] ha affascinato un gran numero di fisici<sup>1</sup>. La ragione di ciò è probabilmente da ricercarsi nel fatto che, a fronte di una caratterizzazione iniziale della teoria estremamente limitata<sup>2</sup>, essa conduce alla soluzione di una serie di problemi concettuali completamente indipendenti tra loro.

Possiamo, probabilmente per difetto, elencare tre di questi problemi:

- *Il “problema della naturalezza”*. È quello più spesso richiamato quando si parla di supersimmetria. Non è spiegabile in poche parole e ad esso sarà dedicata la Sezione seguente.
- *Relazioni tra bosoni e fermioni*. Nelle teorie attuali queste due classi di particelle sono indipendenti. Entrambe sono necessarie ma non esiste alcun rapporto che leghi l’una all’altra, eccetto il fatto che la prima sia costituita dai portatori delle forze e la seconda dai campi di materia (il che - tra l’altro - è più una distinzione che un legame). È evidente come la ricerca di una descrizione sempre più compatta ed essenziale della natura non possa prescindere da un’unificazione - di qualunque genere si voglia - della descrizione, del ruolo e delle proprietà di bosoni e fermioni.

---

<sup>1</sup>Questa frase sembra essere divenuta il modo standard di introdurre un lavoro sulla Supersimmetria. Si vedano ad esempio E. Witten [2] e H.P. Nilles [4].

<sup>2</sup>Questa affermazione potrà apparire ad alcuni quantomeno sorprendente, il principale argomento dei detrattori della Supersimmetria essendo proprio il fatto che essa conduca ad una eccessiva proliferazione di particelle. È tuttavia opinione dell’autore (e, cosa indiscutibilmente più confortante, di fisici che nella Supersimmetria credono) che questa caratteristica non sia un segnale di “artificialità” della teoria. Essa discende infatti in modo molto semplice dalla sua struttura generale, e altrettanto semplicemente potrà a risolvere, ad esempio, il problema della naturalezza: il tutto senza che la Supersimmetria fosse stata inizialmente concepita per questo scopo.



- *Il Santo Graal dei fisici: la Gravità.* È l'unica delle forze conosciute che ancora sfugge alla quantizzazione, e la più lontana dal prender parte a qualche teoria unificata. Così come le teorie di gauge è ben descritta, a livello classico, da una richiesta di invarianza sotto una simmetria (quella spazio-temporale). Questa analogia non ha però finora aiutato a connetterla alle teorie quantistiche.

Nel seguito, dopo una descrizione del problema della naturalezza (Sez. 2) ci dedicheremo alla costruzione di una teoria supersimmetrica (Sez. 3). Mostreremo come essa possa discendere dalla semplice richiesta di avere un'interazione non banale tra le simmetrie interne (di gauge) e la simmetria spazio-temporale.

Da questa limitata ipotesi deriveranno in modo naturale sia le relazioni tra bosoni e fermioni che le proprietà che fanno della supersimmetria un buon candidato per la soluzione della questione della naturalezza.

Successivamente - appurate le buone premesse - descriveremo sommariamente (Sez. 4) come, nell'ambito della cosiddetta Supergravità, possa essere costruito un modello realistico che mira a descrivere la natura alla scala del TeV: il Modello Standard Supersimmetrico Minimale.

## 2 Il problema della naturalezza

Dare una definizione precisa di cosa si intenda con "problema della naturalezza" non è facile. Da un lato esso è legato a considerazioni in un certo qual modo "estetiche", che dunque sfuggono ad una caratterizzazione completa e immutabile. D'altro canto autori diversi hanno usato lo stesso nome legandolo a concetti e contesti differenti, contribuendo dunque a rendere il suo significato sempre più impreciso.

Si possono, a mio parere, individuare due principali definizioni del cosiddetto "concetto di naturalezza" di una teoria.

- *Definizione à la Susskind* [5]  
Questa definizione richiede che le proprietà osservabili della

teoria siano *stabili* rispetto a variazioni *minute* dei suoi parametri fondamentali.

• Definizione à la 't Hooft [6]

In questo caso una teoria valida fino ad un'energia  $\Lambda$  è considerata naturale se un parametro  $\delta$  piccolo (rispetto a  $\Lambda$ ) è associato ad una *simmetria approssimata* della teoria, in modo tale che la simmetria ridiventi esatta per  $\delta \rightarrow 0$ .

I due approcci non sono evidentemente equivalenti. Si potrebbe anzi arguire che il secondo implica il primo. Infatti, data un'osservabile naturalmente (secondo 't Hooft) piccola, essa rimarrà tale anche in presenza di variazioni dei parametri fondamentali in quanto tali modifiche dovranno obbedire alla simmetria generale che regola la teoria e non potranno dunque portare a risultati in contrasto con essa. Viceversa, la stabilità di un'osservabile non garantisce probabilmente - di per sé - la presenza di una simmetria sovrastante che la protegge.

Consideriamo ora il Modello Standard e in particolare le correzioni radiative alla massa della sua unica particella scalare, il bosone di Higgs. Troviamo che esse dipendono quadraticamente dal cut-off superiore di energia:

$$\delta M_H^2 \sim g^2 \Lambda^2 \quad (2.1)$$

Poiché il Modello Standard è rinormalizzabile  $\Lambda$  può essere preso grande a piacere, al limite dell'ordine della massa di Planck ( $M_P \sim 10^{19}$  GeV). Questo fa sì che la correzione possa divenire molto più grande del valore della massa permesso dalla fenomenologia, dell'ordine del TeV. Contrariamente a quanto può essere intuitivo pensare, e a quanto si trova talvolta scritto, questo *non* è un problema per il Modello Standard, almeno da un punto di vista pratico<sup>3</sup>. Sempre grazie alla rinormalizzabilità, il valore della massa dell'Higgs che entra nella lagrangiana non è una previsione della teoria ma bensì

---

<sup>3</sup>Notare tuttavia come nemmeno i problemi successivamente menzionati portino a conseguenze irreparabili di ordine pratico. Queste sono tutte considerazioni di carattere "estetico" che mirano alla costruzione di una teoria il più possibile "plausibile". Niente vieta di considerare "antiestetica" e dunque innaturale anche una correzione molto grande, quantunque rinormalizzabile, di questo tipo.

un parametro nudo da fissare per confronto con l'esperimento. Non è dunque importante se la sua correzione è molto grande.

Si potrebbe a questo punto chiedersi perché preoccuparsi - anche solo a livello estetico - della correzione a un parametro che è in ogni modo non calcolabile. Trovo molto interessante la risposta a questo quesito data da R. Barbieri in [8]. Consideriamo infatti la lagrangiana di una teoria valida fino ad un'energia  $\Lambda$ , e indichiamola con  $\mathcal{L}(\Lambda)$ . Al suo interno nulla ci consente di calcolare il parametro piccolo  $m$ , ed è dunque solo relativamente preoccupante se la correzione  $\delta m(\Lambda)$  diviene molto grande al crescere di  $\Lambda$ . Supponiamo ora di voler - prima o poi - calcolare questa quantità. Ciò richiederà evidentemente un ampliamento della lagrangiana da  $\mathcal{L}(\Lambda)$  a  $\mathcal{L}(\Lambda')$ , con  $\Lambda' > \Lambda$ . Per definizione questo allargamento non modificherà le correzioni fino a  $\Lambda$ . Si avrà allora

$$\delta m = \delta m(\Lambda) + \delta m(\Lambda, \Lambda') \quad (2.2)$$

È chiaro che se il primo termine  $\delta m(\Lambda)$  è estremamente grande sarà necessaria una cancellazione molto accurata tra il contributo di bassa e quello di alta energia per mantenere piccolo il valore di  $m$ . In assenza di una simmetria che conduca in modo naturale a questa cancellazione essa può avvenire solo per un accidente dinamico. Si introduce allora una dipendenza delle osservabili di bassa energia dai dettagli del settore di alta energia, rendendo così *instabili* le previsioni che vorremmo fare per i loro valori: questa situazione è in contrasto con l'assunto iniziale che  $\mathcal{L}(\Lambda)$  fosse una "buona" teoria efficace per il settore di bassa energia.

L'unico modo per impedire che una situazione simile si verifichi è evitare la presenza della correzione grande  $\delta m(\Lambda)$ . Affinché questo accada occorre che  $\Lambda$  non diventi molto grande:  $\mathcal{L}(\Lambda)$  può essere una valida teoria efficace solo per valori di  $\Lambda$  sufficientemente piccoli da non generare grandi correzioni radiative. Poiché la fenomenologia del Modello Standard fissa la massa dell'Higgs nella regione del TeV occorre che anche il limite superiore della sua validità non sia molto oltre questa soglia, in modo che

$$\delta M_H^2 \sim g^2 \Lambda^2 \sim O(M_H^2) \quad (2.3)$$

Una situazione di questo tipo evita la necessità del fine-tuning sopra menzionato.

Un problema per certi versi analogo, anche se forse più pressante perché di immediato interesse “tecnico”, nasce allorché si voglia passare a una teoria di grande unificazione tipo  $SU(5)$ . In questo caso il valore della massa dell’Higgs del Modello Standard (altrimenti detto “Higgs leggero”) viene fissato da una particolare combinazione delle masse degli Higgs pesanti. Il valore fenomenologico  $M_H = O(1 \text{ TeV})$  viene ottenuto attraverso un fine-tuning di masse molto più grandi,  $O(10^{15} \text{ TeV})$ . Questo è ciò che viene usualmente detto “problema delle gerarchie di gauge” ed è un problema a due stadi: la gerarchia va prima creata (attraverso il fine tuning) e poi mantenuta (evitando che le correzioni radiative la annullino, spingendo la massa dell’Higgs leggero alla scala di grande unificazione).

Il problema delle gerarchie [7] è la manifestazione pratica del problema della naturalezza (o, come viene talvolta definito, la sua “parte tecnica”): la non-naturalezza della teoria (il parametro piccolo “massa dell’Higgs leggero” non è legato ad alcuna simmetria approssimata, quindi non abbiamo alcuna “comprensione” del perché sia così piccolo) si materializza nella necessità di un fine-tuning artificiale (cioè innaturale, appunto...). L’ulteriore presenza di grandi correzioni radiative che tendono a distruggere il fine-tuning non farà poi che peggiorare il problema, rendendo necessario un riaggiustamento della teoria ordine per ordine.

Tutto ciò porta a concludere che in teorie quali il Modello Standard o sue estensioni di Grande Unificazione la presenza di particelle scalari leggere (o non massive, se confrontiamo 1 TeV con la scala di Planck) è *non naturale*: esse non sono legate ad alcuna simmetria della teoria (non esiste per loro l’analogo della simmetria chirale che mantiene i fermioni non massivi) e dunque possono essere soggette a grandi correzioni radiative per le loro masse.

Nella teoria supersimmetrica che svilupperemo nel seguito vedremo come la non massività delle particelle scalari apparirà in modo naturale grazie al legame che verrà creato ponendo scalari e fermioni (non i fermioni già noti ma i partner supersimmetrici degli scalari in questione) nello stesso supermultipletto. Grazie a questa simmetria anche le correzioni radiative a queste masse saranno

nulle, ricevendo contributi del tipo

$$\delta M_H^2 \sim \overbrace{g^2 \Lambda^2}^{\text{loop bosonico}} - \overbrace{g^2 \Lambda^2}^{\text{loop fermionico}} = 0 \quad (2.4)$$

In presenza di una rottura della supersimmetria questa correzione potrà divenire finita, assumendo il valore

$$\delta M_H^2 \sim g^2 |m_{\text{bosone}}^2 - m_{\text{fermione}}^2| \quad (2.5)$$

Rifacendoci a quella che è forse una terza definizione di naturalezza, che richiede che la correzione a un'osservabile non sia superiore al suo valore iniziale, potremo allora considerare naturale una teoria supersimmetrica nella quale la rottura della supersimmetria abbia generato un mass-splitting tra particella e sparticella (il partner supersimmetrico) dell'ordine della massa dell'Higgs leggero, cioè non superiore al TeV. Questa è la considerazione che ci porta a ritenere che, se la Supersimmetria è una valida teoria per la descrizione della Natura, le particelle da essa predette devono avere masse dell'ordine del TeV. Se così non fosse anche una teoria supersimmetrica non sarebbe naturale, e verrebbe dunque a cadere una delle principali motivazioni per la sua introduzione.

### 3 Susy

Nell'Introduzione abbiamo osservato come, al di là della risoluzione del problema della naturalezza del Modello Standard, caratteristiche almeno "estheticamente" apprezzabili di una nuova teoria siano la presenza di relazioni tra bosoni e fermioni e, possibilmente, l'esistenza di un rapporto non banale tra l'azione delle trasformazioni spazio-temporali (cioè appartenenti al gruppo di Lorentz-Poincaré) e l'azione di simmetrie interne.

Vedremo ora in questa Sezione come - abbastanza sorprendentemente - il solo cercare di soddisfare quest'ultimo punto ci condurrà ad una teoria che lega effettivamente bosoni e fermioni, collocandoli all'interno di un'unica rappresentazione irriducibile. Inoltre, senza introdurre ulteriori ipotesi, la stessa teoria godrà - rispetto alle correzioni radiative - di proprietà tali da renderla competitiva verso

la soluzione del problema della naturalezza: certi suoi parametri non verranno infatti rinormalizzati a nessun ordine e manterranno dunque il valore *classico* a loro inizialmente assegnato.

### 3.1 Le Simmetrie della Matrice $S$

Esistono due teoremi che portano ad una caratterizzazione abbastanza precisa della teoria che voglia mettere in relazione la simmetria spazio-temporale con eventuali simmetrie interne. In entrambi i casi le ipotesi sono sostanzialmente legate alla richiesta che sia possibile costruire una teoria di campo.

- **Teorema di Coleman e Mandula [9] (1967)**

In termini tecnici, esso afferma che la più generale algebra di Lie delle simmetrie della matrice  $S$  (e dunque della fisica) contiene l'operatore energia-quantità di moto  $P_\mu$ , il generatore delle rotazioni di Lorentz  $M_{\mu\nu}$  e un numero finito di operatori  $T_l$ , scalari di Lorentz, tali che

$$[P_\mu, T_l] = 0 \quad [M_{\mu\nu}, T_l] = 0 \quad (3.1)$$

ove i  $T_l$  costituiscono un'algebra di Lie:

$$[T_l, T_m] = iC_{lmk}T_k \quad (3.2)$$

In termini (leggermente) più pratici, questo porta al risultato che il gruppo di simmetria della matrice  $S$  è *al più un prodotto diretto* del gruppo di simmetria interna (di gauge, ad esempio) e del gruppo di Poincaré. Le trasformazioni spazio-temporali e quelle di simmetria interna "vivranno" allora indipendentemente le une dalle altre e non potrà esserci tra le loro azioni alcun rapporto.

- **Teorema di Haag, Lopuszanski e Sohnius [10] (1975)<sup>4</sup>**  
Questo teorema mostra che rilassando una ipotesi del teorema

---

<sup>4</sup>Notare che questo teorema è posteriore alla cosiddetta invenzione della supersimmetria da parte di Wess e Zumino nel 1973. Se così non fosse ai tre autori andrebbe la priorità della scoperta. L'originalità del lavoro non sta invece nell'aver scoperto una nuova simmetria ma nell'aver precisato le relazioni dell'algebra sottostante con le simmetrie della matrice  $S$ .

di Coleman-Mandula, e cioè il limitarsi a considerare algebre di Lie, si può verificare l'esistenza di generatori di simmetrie per la matrice  $S$  tali da avere *relazioni di commutazione non banali* con i generatori del gruppo di Poincaré.

In particolare, l'usuale algebra di Lie viene estesa ad una cosiddetta "superalgebra", o "Graded Lie Algebra" (GLA), tramite l'uso di anticommutatori. Introdotta la carica spinoriale (di Majorana)  $Q_a$ ,  $a = 1, \dots, 4$ , la superalgebra risulterà definita dalle seguenti regole:

$$\begin{aligned} [Q_a, P_\mu] &= 0 & [Q_a, M^{\mu\nu}] &= \sigma_4^{\mu\nu} Q_a \\ \{Q_a, \bar{Q}_b\} &= 2\gamma_{ab}^\mu P_\mu \end{aligned} \quad (3.3)$$

Le  $\gamma^\mu$  sono le usuali matrici di Dirac e  $\sigma_4$  è definita da  $\sigma_4^{\mu\nu} = \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu]$ .

## 3.2 Algebra Supersimmetrica e Supercampi

L'algebra (3.3) definisce a tutti gli effetti la Supersimmetria. A partire da essa è possibile ricavare tutte le caratteristiche di questa teoria (ad esempio quella fondamentale, come vedremo, che il numero di gradi di libertà bosonici deve coincidere con il numero di quelli fermionici).

È a questo punto conveniente introdurre il cosiddetto formalismo dei *superspazi*, dovuto a Salam e Strathdee [3]. Tramite di esso è infatti possibile giungere in modo relativamente semplice ad una *rappresentazione* delle trasformazioni supersimmetriche. Il lettore interessato esclusivamente al risultato di questo procedimento potrà passare alla Sez. 3.3.

Come primo passo verso questa rappresentazione, riscriviamo l'algebra (3.3) in termini di cariche spinoriali di Weyl a due componenti  $Q_a$  e  $\bar{Q}_{\dot{a}}$ ,  $a, \dot{a} = 1, 2$ . Troviamo

$$\begin{aligned} \{Q_a, Q_b\} &= 0 & \{\bar{Q}_{\dot{a}}, \bar{Q}_{\dot{b}}\} &= 0 \\ \{Q_a, \bar{Q}_{\dot{b}}\} &= 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu \end{aligned} \quad (3.4)$$

Così come per avere una teoria manifestamente Lorentz-invariante dobbiamo estendere lo spazio euclideo tridimensionale a quel-

lo minkowskiano quadridimensionale, in modo analogo per avere una teoria manifestamente supersimmetrica dobbiamo estendere lo spazio minkowskiano. Facciamo ciò introducendo quattro coordinate fermioniche (spinori di Weyl) soddisfacenti un'algebra di Grassmann:

$$\{\theta_a, \theta_b\} = 0 \quad \{\bar{\theta}_a, \bar{\theta}_b\} = 0 \quad \{\theta_a, \bar{\theta}_b\} = 0 \quad (3.5)$$

Un punto del nuovo superspazio sarà allora definito dalle otto coordinate  $(x_\mu, \theta_a, \bar{\theta}_a)$ .

Tramite le nuove coordinate anticommutanti introdotte possiamo trasformare la GLA (3.4) in una ordinaria algebra di Lie. Vale infatti<sup>5</sup>:

$$\begin{aligned} [\theta^a Q_a, \theta^b Q_b] &= 0 & [\bar{\theta}_a \bar{Q}^a, \bar{\theta}_b \bar{Q}^b] &= 0 \\ [\bar{\theta}^a Q_a, \bar{\theta}_b \bar{Q}^b] &= 2\theta^a \sigma_{ab}^\mu \bar{\theta}^b P_\mu \end{aligned} \quad (3.6)$$

Una generica trasformazione di supersimmetria, dipendente dai parametri  $y, \alpha, \bar{\alpha}$  può essere definita come:

$$S(y, \alpha, \bar{\alpha}) \equiv \exp(-iy_\mu P^\mu + i\alpha Q + i\bar{\alpha} \bar{Q}) \quad (3.7)$$

Utilizzando la formula di Baker-Campbell-Hausdorff e le regole di commutazione (3.6) vediamo che la composizione di due trasformazioni sarà data da

$$S(y, \alpha, \bar{\alpha}) S(z, \beta, \bar{\beta}) = S(y + z - i\beta\sigma\bar{\alpha} + i\alpha\sigma\bar{\beta}, \alpha + \beta, \bar{\alpha} + \bar{\beta}) \quad (3.8)$$

Un *supercampo*  $\phi(x, \theta, \bar{\theta})$  sarà allora definito dalla seguente legge di trasformazione supersimmetrica:

$$\begin{aligned} S_{y,\alpha,\bar{\alpha}}[\phi(x, \theta, \bar{\theta})] &\equiv S(y, \alpha, \bar{\alpha})\phi(x, \theta, \bar{\theta})S^{-1}(y, \alpha, \bar{\alpha}) = \\ &= \phi(x + y - i\alpha\sigma\bar{\theta} + i\theta\sigma\bar{\alpha}, \theta + \alpha, \bar{\theta} + \bar{\alpha}) \end{aligned} \quad (3.9)$$

Per determinare la rappresentazione nel superspazio degli operatori introdotti ( $P, Q$  e  $\bar{Q}$ ) e delle trasformazioni supersimmetriche procediamo ora nel modo usuale, considerando la versione infinitesima

---

<sup>5</sup>È evidentemente sottintesa la sommatoria sugli indici ripetuti. Inoltre, si utilizzeranno d'ora in poi le posizioni  $\theta Q \equiv \theta^a Q_a$  e  $\bar{\theta} \bar{Q} \equiv \bar{\theta}_a \bar{Q}^a$ . Per una descrizione esaustiva del calcolo spinoriale si rimanda a [11].



della legge di trasformazione (3.9). Espandendo in serie (fino al primo ordine) l'esponenziale possiamo scrivere

$$\begin{aligned}\phi + \delta_T \phi &\equiv T_{y, \alpha, \bar{\alpha}}[\phi(x, \theta, \bar{\theta})] = \\ &= \phi(x, \theta, \bar{\theta}) - iy[P, \phi] + i[\alpha Q, \phi] + i[\bar{\alpha} \bar{Q}, \phi] \quad (3.10)\end{aligned}$$

Possiamo ora confrontare questa espressione con quella di  $\delta_T \phi$  ricavabile dall'espansione di Taylor della (3.9), e cioè

$$\delta_T \phi = \left[ y^\mu \partial_\mu + \alpha \frac{\partial}{\partial \theta} + \bar{\alpha} \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}} + i(\theta \sigma^\mu \bar{\alpha} - \alpha \sigma^\mu \bar{\theta}) \partial_\mu \right] \phi(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.11)$$

Come risultato otteniamo le seguenti rappresentazioni:

$$\begin{aligned}P_\mu &= i \partial_\mu \\ Q_\alpha &= -i(\partial_\alpha - i \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu) \\ \bar{Q}^{\dot{\alpha}} &= -i(\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} - i \bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu)\end{aligned} \quad (3.12)$$

avendo definito

$$\partial_\alpha \equiv \frac{\partial}{\partial \theta^\alpha} \quad \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} \equiv \frac{\partial}{\partial \bar{\theta}^{\dot{\alpha}}} \quad (3.13)$$

Per futura utilità, possiamo ripetere quanto fatto dalla (3.7) in poi utilizzando differenti definizioni per la trasformazione supersimmetrica. In particolare, possiamo definire

$$\begin{aligned}S_L(y, \alpha, \bar{\alpha}) &\equiv \exp(-iy_\mu P^\mu + i\alpha Q) \exp(i\bar{\alpha} \bar{Q}) \\ S_R(y, \alpha, \bar{\alpha}) &\equiv \exp(-iy_\mu P^\mu + i\bar{\alpha} \bar{Q}) \exp(i\alpha Q)\end{aligned} \quad (3.14)$$

Questo ci porta ad introdurre i nuovi supercampi  $\phi_L$  e  $\phi_R$ , legati alla rappresentazione originale  $\phi$  dalla relazione

$$\phi(x, \theta, \bar{\theta}) = \phi_L(x + i\theta \sigma \bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) = \phi_R(x - i\theta \sigma \bar{\theta}, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.15)$$

e le nuove rappresentazioni per le supercariche

$$\begin{aligned}Q_\alpha^L &= -i \partial_\alpha & \bar{Q}_L^{\dot{\alpha}} &= -i(-\bar{\partial}^{\dot{\alpha}} + 2i \bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu) \\ \bar{Q}_R^{\dot{\alpha}} &= -i \bar{\partial}^{\dot{\alpha}} & Q_\alpha^R &= -i(-\partial_\alpha - 2i \sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu)\end{aligned} \quad (3.16)$$

Possiamo infine definire le *derivate covarianti*  $D$ , tali cioè da commutare con le trasformazioni supersimmetriche:

$$[D, \delta_S] = 0 \quad (3.17)$$

È possibile ottenere derivate covarianti per ciascuno dei tre tipi di supercampi precedentemente considerati:

$$\begin{cases} D_a = \partial_a + i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \\ \bar{D}^{\dot{a}} = \bar{\partial}^{\dot{a}} + i\bar{\sigma}^\mu \theta \partial_\mu \end{cases} \quad (3.18)$$

$$\begin{cases} D_a^L = \partial_a + 2i\sigma^\mu \bar{\theta} \partial_\mu \\ \bar{D}_a^L = -\bar{\partial}_a \end{cases} \quad (3.19)$$

$$\begin{cases} D_a^R = \partial_a \\ \bar{D}_a^R = -\bar{\partial}_a - 2i\theta\sigma^\mu \partial_\mu \end{cases} \quad (3.20)$$

### 3.3 Rappresentazioni dei Supercampi

Utilizzando gli operatori definiti nella Sez. 3.2 possiamo considerare supercampi che soddisfino a particolari *constraint*. Diremo allora supercampo chirale left-handed (right-handed) il supercampo che soddisfa  $\bar{D}\phi = 0$  ( $D\phi = 0$ ). Espresse nelle rappresentazioni  $L$  e  $R$  rispettivamente (vedi (3.18) e (3.20)) queste condizioni mostrano come  $\phi_L$  ( $\phi_R$ ), sottoposto al constraint di chiralità, non dipenda da  $\bar{\theta}$  ( $\theta$ ):

$$\phi_L \equiv \phi_L(x, \theta) \quad \phi_R \equiv \phi_R(x, \bar{\theta}) \quad (3.21)$$

Cerchiamo ora di esplicitare la rappresentazione (lineare) della trasformazione supersimmetrica nel caso particolare di un campo chirale left-handed. Espandendo in serie  $\phi_L(x, \theta)$  notiamo che, poiché esistono solo due variabili indipendenti  $\theta_a$ ,  $a = 1, 2$  e sono anticommutanti, la serie termina al secondo ordine:

$$\phi_L(x, \theta) = \varphi(x) + \sqrt{2}\theta\psi(x) + \theta\theta F(x) \quad (3.22)$$

ove  $\varphi$  e  $F$  sono campi scalari complessi e  $\psi$  è uno spinore di Weyl left-handed. Un supercampo può dunque essere identificato da un *multipletto* di campi ordinari:  $\phi = (\varphi, \psi, F)$ .

La variazione

$$\delta\phi_L(x, \theta) = \delta\varphi(x) + \sqrt{2}\theta\delta\psi(x) + \theta\theta\delta F(x) \quad (3.23)$$

può ora essere valutata facendo uso dell'analogo della (3.11) per la trasformazione di  $\phi_L$ . Si ottiene

$$\begin{cases} \delta\varphi = \sqrt{2}\alpha\psi \\ \delta\psi = \sqrt{2}\alpha F + i\sqrt{2}\sigma_\mu\bar{\alpha}\partial^\mu\varphi \\ \delta F = -i\sqrt{2}\partial^\mu\psi\sigma_\mu\bar{\alpha} \end{cases} \quad (3.24)$$

Questa rappresentazione della trasformazione supersimmetrica mostra due caratteristiche importanti:

- La trasformazione “promuove” un membro del multipletto all'ordine superiore:  $\varphi \rightarrow \psi$  e  $\psi \rightarrow F$  (è in questo senso che si dice che la supersimmetria trasforma bosoni in fermioni e viceversa)
- La variazione del termine più alto del multipletto,  $\delta F$ , è data da una derivata totale. Questa, in particolare, è la caratteristica che nella Sez. 3.4 verrà utilizzata per giungere alla formulazione di una teoria supersimmetrica.

Prima di concludere questa sezione notiamo come oltre ai supercampi chirali (o altrimenti detti scalari) sia possibile definire anche i cosiddetti supercampi vettoriali. Essi soddisfano per costruzione la seguente condizione di realtà:

$$V(x, \theta, \bar{\theta}) = V^\dagger(x, \theta, \bar{\theta}) \quad (3.25)$$

A differenza dei supercampi chirali precedentemente considerati dipendono da tutti i quattro parametri anticommutanti, e dunque una loro rappresentazione in termini di un multipletto di campi ordinari si presenta più complessa. Vale tuttavia ancora la regola per la quale il termine più alto del multipletto si trasforma con una derivata totale. Posto

$$\begin{aligned} V(x, \theta, \bar{\theta}) = & C(x) + \theta\phi(x) + \bar{\theta}\bar{\phi}(x) + \\ & + \theta\theta M(x) + \bar{\theta}\bar{\theta}M^*(x) + \theta\sigma_\mu\bar{\theta}V^\mu(x) + \\ & + (\theta\theta)\bar{\theta}\bar{\lambda}(x) + (\bar{\theta}\bar{\theta})\theta\lambda(x) + (\theta\theta)(\bar{\theta}\bar{\theta})D(x) \end{aligned} \quad (3.26)$$

con  $C$  e  $D$  campi scalari reali,  $M$  campo scalare complesso,  $\lambda$  e  $\phi$  campi spinoriali complessi,  $V_\mu$  campo vettoriale reale, si avrà allora

$$\delta D = \frac{i}{2}(\partial_\mu \lambda \sigma^\mu \bar{\alpha} - \partial_\mu \bar{\lambda} \bar{\sigma}^\mu \alpha) \quad (3.27)$$

### 3.4 Una Lagrangiana Supersimmetrica

Abbiamo verificato nella Sez. 3.3 come, per trasformazioni supersimmetriche, le componenti più alte dei supercampi si trasformino tramite derivate totali. Ciò significa che l'integrale spazio-temporale  $\int d^4x$  di tali quantità è invariante sotto siffatte trasformazioni.

Possiamo utilizzare questo fatto per costruire un'azione supersimmetrica. Consideriamo anzitutto le regole di integrazione sulle coordinate spinoriali del superspazio:

$$\int d\theta = 0 \quad \int d\theta \cdot \theta = 1 \quad (3.28)$$

Dato un qualunque supercampo scalare  $\phi$ , l'integrazione  $\int d^2\theta \phi$  ne isolerà allora la componente  $F$ , mentre l'integrazione  $\int d^2\theta d^2\bar{\theta} V$  isolerà la componente  $D$  del supercampo vettoriale  $V$ .

Otterremo dunque un'azione invariante ponendo

$$S = \int d^4x \mathcal{L} = \int d^4x \left[ \int d^2\theta \Phi_F + \int d^2\theta d^2\bar{\theta} \Phi_D + \text{h.c.} \right] \quad (3.29)$$

ove  $\Phi_F$  è somma di supercampi scalari e  $\Phi_D$  di supercampi vettoriali.

Cerchiamo ora di dare una forma esplicita, in termini di campi scalari e spinoriali, alla lagrangiana  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_F + \mathcal{L}_D$  definita implicitamente nella (3.29). Poiché essa dovrà contenere termini almeno bilineari nei campi occorre preventivamente discutere il prodotto di supercampi. Consideriamo a questo proposito i supercampi scalari left- e right-handed (3.21). Poiché essi soddisfano rispettivamente le condizioni  $\bar{D}_L \phi_L = 0$  e  $D_R \phi_R = 0$  valgono allora anche le equazioni seguenti

$$\bar{D}_L \phi_L^n = 0 \quad D_R \phi_R^n = 0 \quad (3.30)$$

che mostrano come la potenza  $n$ -esima di un supercampo left-handed (right-handed) sia ancora un supercampo left-handed (right-handed). Prodotti di questo tipo sono allora candidati per costituire i termini di  $\mathcal{L}_F$ .

Prendiamo ora invece in esame il prodotto di un supercampo left-handed per il suo complesso coniugato, cioè un supercampo right-handed. Si può mostrare (vedi ad esempio [4]) come il prodotto  $\phi\phi^\dagger$  contenga un termine di tipo  $D$ : esso è dunque adatto per costruire  $\mathcal{L}_D$ .

Dato il supercampo scalare (left-handed)

$$\phi = \varphi + \sqrt{2}\theta\psi + \theta\theta F \quad (3.31)$$

scegliamo per  $\mathcal{L}$  la seguente *ansatz*:

$$\mathcal{L} = (\phi\phi^\dagger)_D + m(\phi^2)_F + \lambda(\phi^3)_F + \text{h.c.} \quad (3.32)$$

ove gli indici  $D$  e  $F$  indicano la proiezione del supercampo in questione sul suo componente più alto. Cerchiamo ora di sviluppare questa lagrangiana in termini di campi di particella.

- $F$ -term

Eseguendo le moltiplicazioni, e tenendo attentamente conto delle regole di anticommutazione degli spinori coinvolti, si ottiene

$$(\phi^2)_F = 2\varphi F - \psi\psi \quad (3.33)$$

e

$$(\phi^3)_F = 3\varphi^2 F - 3\varphi\psi\psi \quad (3.34)$$

Notiamo come questi termini non contengano derivate dei campi. Indicheremo d'ora in poi  $\mathcal{L}_F$ , che li conterrà, come "superpotenziale".

- $D$ -term

Il calcolo esplicito di questo termine è complicato dal fatto che i supercampi  $\phi$  e  $\phi^\dagger$  appartengono a rappresentazioni diverse. Per poter essere moltiplicati devono dunque essere espressi

nella stessa rappresentazione per mezzo della (3.15). Fatto ciò si ottiene

$$\begin{aligned}
 (\phi\phi^\dagger)_D &= FF^* - \varphi\partial_\mu\partial^\mu\varphi^* + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} \\
 &= FF^* + (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \\
 &\quad + \text{divergenze totali}
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

Appare evidente come la (3.35) contenga, sotto forma di termini che coinvolgono le derivate dei campi, i contributi di energia cinetica del campo scalare  $\phi$  e del campo spinoriale  $\psi$ .

Sostituendo ora nella (3.32) i termini espliciti otteniamo per la lagrangiana la seguente espressione:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= FF^* + (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} + \\
 &\quad + m(2\varphi F - \psi\psi + \text{h.c.}) + 3\lambda(\varphi^2 F - \varphi\psi\psi + \text{h.c.})
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Utilizzando le equazioni di Eulero-Lagrange per scrivere le equazioni di moto possiamo notare come il campo  $F$ , che per questa ragione sarà d'ora in poi detto "campo ausiliario", possa essere espresso in termini dei campi "fisici"  $\varphi$  e  $\psi$ . Si trova infatti

$$F = -2m\varphi^* - 3\lambda\varphi^{*2} \tag{3.37}$$

Sostituendo nell'eq. (3.36) otteniamo

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= (\partial_\mu\varphi)(\partial^\mu\varphi^*) + i\psi\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\psi} - m(\psi\psi + \bar{\psi}\bar{\psi}) + \\
 &\quad - 3\lambda(\varphi\psi\psi + \varphi^*\bar{\psi}\bar{\psi}) - |2m\varphi + 3\lambda\varphi^2|^2
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Questa è finalmente la nostra lagrangiana supersimmetrica. Notiamo alcune sue proprietà:

- Contiene un numero uguale di gradi di libertà bosonici e fermionici (e cioè, rispettivamente, i due del campo scalare complesso e i due dello spinore di Weyl)
- Il bosone e il fermione hanno la stessa massa  $2m$
- Le costanti di accoppiamento del vertice a quattro bosoni e del vertice trilineare tra bosone e fermioni sono legate tra loro

- L'ultimo termine della lagrangiana non contiene né derivate né campi fermionici. Esso è detto *potenziale scalare* e può essere ricavato direttamente dal superpotenziale come

$$V = |F|^2 = \left| \frac{\partial W(\varphi)}{\partial \varphi} \right|^2 \quad (3.39)$$

ove  $W(\varphi)$  denota i termini  $F$  della lagrangiana (3.32) con il supercampo  $\phi$  rimpiazzato dalla sua componente scalare  $\varphi$ .

### 3.5 Una Teoria di Gauge Supersimmetrica

Allo stato attuale delle cose la miglior descrizione della natura che siamo in grado di dare è espressa in termini di teorie di gauge. Se, in aggiunta a ciò, crediamo anche che il mondo che ci circonda sia supersimmetrico sarebbe utile poter conciliare questi due concetti, cioè creare teorie di gauge supersimmetriche.

Una descrizione matematicamente completa di questo processo è al di là dei nostri scopi e può comunque essere facilmente consultata nella letteratura disponibile. Ci limiteremo dunque ad elencare i passi principali tramite i quali si perviene alla costruzione di queste teorie e le loro caratteristiche più importanti.

In analogia alle usuali teorie di gauge, occorrerà introdurre un supercampo vettoriale e una sua opportuna legge di trasformazione, e cioè<sup>6</sup>

$$V \rightarrow V + i(\Lambda - \Lambda^\dagger) \quad (3.40)$$

ove  $\Lambda$  è un generico supercampo chirale. Una teoria invariante per questa trasformazione sarà data dalla lagrangiana [4] ( $\phi$  è il solito supercampo chirale)

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}(W^a W_a)_F + (\phi^\dagger \exp(2gV)\phi)_D \quad (3.41)$$

avendo definito

$$W_a \equiv (\bar{D}\bar{D})D_a V \quad (3.42)$$

---

<sup>6</sup>Esplicitando la trasformazione di  $V$  componente per componente ci si può rendere conto di come questa sia la generalizzazione supersimmetrica dell'usuale trasformazione di gauge di un campo vettore.

oppure la sua generalizzazione non abeliana

$$W_a \equiv (\bar{D}\bar{D})[\exp(-gV)D_a \exp(gV)] \quad (3.43)$$

La teoria di gauge supersimmetrica data dalla (3.41) ha le seguenti caratteristiche:

- Oltre all'usuale bosone di gauge  $V_\mu$  contiene anche un *fermione* di gauge  $\lambda$ , che diremo *gaugino*. Esso trasforma sotto il gruppo di gauge in modo analogo al bosone, ed è ugualmente non massivo.
- In aggiunta agli accoppiamenti noti dovuti all'invarianza di gauge esiste un accoppiamento aggiuntivo, trilineare, tra il campo di materia fermionico  $\psi$ , il suo partner scalare  $\varphi$  e il gaugino  $\lambda$ , pesato dalla costante di accoppiamento di gauge  $g$ .
- Il potenziale scalare è ora dato da

$$V = |F|^2 + \frac{1}{2}D^2 \quad (3.44)$$

ove  $D$  è il campo ausiliario (reale) del supercampo vettore  $V$ .

### 3.6 Rottura Spontanea della (Super)Simmetria

La supersimmetria non può evidentemente essere una simmetria esatta della natura. Non si osservano infatti partner supersimmetrici degeneri in massa con le particelle note. Occorre allora pensare a metodi che consentano di rompere questa simmetria.

Notiamo anzitutto quella che è una caratteristica fondamentale della supersimmetria, e che pone forti limitazioni alla costruzione di validi modelli fenomenologici: *la supersimmetria può essere spontaneamente rotta se e solo se l'energia dello stato di vuoto è diversa da zero*. Questa proprietà è talmente basilare che può essere dimostrata direttamente a partire dall'algebra (3.4) che definisce la supersimmetria. Consideriamo infatti l'anticommutatore

$$\{Q_a, \bar{Q}_b\} = 2\sigma_{ab}^\mu P_\mu \quad (3.45)$$



e prendiamo il valore di aspettazione sul vuoto di entrambi i membri. Otteniamo

$$|Q_a|0\rangle|^2 = \langle 0|H|0\rangle \quad (3.46)$$

Ricordando che - per definizione - una simmetria è detta "spontaneamente rotta" se  $Q_a|0\rangle \neq 0$ , è evidente come nel caso supersimmetrico ciò non possa avvenire senza che sia  $\langle 0|H|0\rangle \neq 0$ . Dalla forma del potenziale scalare<sup>7</sup> (3.44) vediamo come questo si verifichi allorché  $\langle F \rangle \neq 0$  e/o  $\langle D \rangle \neq 0$ . Meccanismi di rottura che sfruttano la prima condizione sono detti di tipo  $F$  o di O'Raifertaigh [12], mentre quelli che fanno uso della seconda sono detti di tipo  $D$  o di Fayet-Iliopoulos [13]. In entrambi i casi si verifica come la rottura spontanea della supersimmetria implichi la presenza di un fermione non massivo, che in analogia al bosone di Goldstone chiameremo *goldstino*.

Per poter apprezzare chiaramente le conseguenze della presenza di un meccanismo di rottura spontanea della supersimmetria consideriamo un esempio di "meccanismo di O'Raifertaigh". Si può dimostrare che affinché abbia luogo una rottura di simmetria occorre che siano presenti almeno tre supercampi scalari. Scriviamo allora la lagrangiana

$$\mathcal{L} = (XX^\dagger + YY^\dagger + ZZ^\dagger)_D + [(\lambda X(Z^2 - M^2) + gYZ)]_F + \text{h.c.} \quad (3.47)$$

Tramite le derivate del superpotenziale (vedi eq. (3.39)) possiamo ricavare i campi ausiliari e dunque il potenziale scalare. Si ottiene

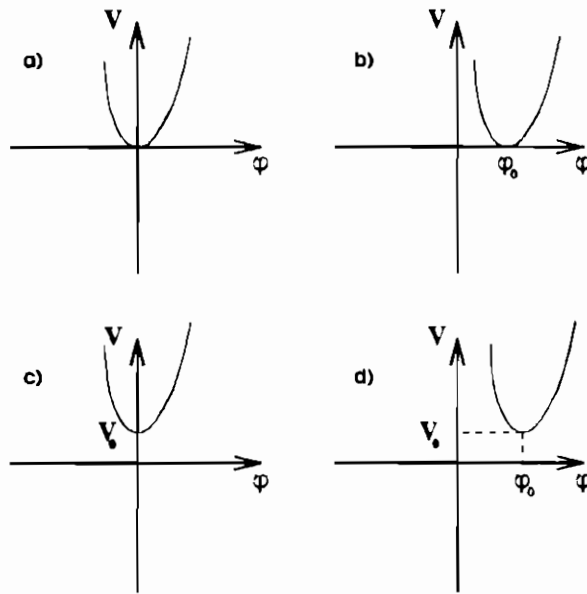
$$F_z^* = -\lambda(\varphi_z^2 - M^2) \quad F_y^* = -g\varphi_z \quad F_z^* = -g\varphi_y - 2\lambda\varphi_x\varphi_z \quad (3.48)$$

e di conseguenza

$$V = \lambda^2|\varphi_z^2 - M^2|^2 + g^2|\varphi_z|^2 + |g\varphi_y + 2\lambda\varphi_x\varphi_z|^2 \quad (3.49)$$

---

<sup>7</sup>La scelta del potenziale scalare come termine nel quale rompere la supersimmetria è fatta prevedendo di poter connettere la rottura della supersimmetria con la rottura di una usuale simmetria interna (e.g. di gauge). Quest'ultima si verifica infatti allorché un campo ha valore di aspettazione sul vuoto non nullo, e solo un campo scalare può avere questa proprietà senza violare l'invarianza per trasformazioni di Lorentz. Occorre tuttavia fare attenzione a non confondere il valore di aspettazione sul vuoto dell'hamiltoniana (e dunque del potenziale scalare) con il valore di aspettazione sul vuoto dei singoli campi scalari che essa contiene.



**Fig.1** Esempi di potenziali che portano o meno alla rottura spontanea delle simmetrie della teoria: a) simmetria interna (di gauge) e supersimmetria rimangono integre; b) solo la simmetria di gauge è rotta; c) solo la supersimmetria è rotta; d) sia la simmetria interna che la supersimmetria sono spontaneamente rotte.

Si può osservare come la situazione  $\langle F_x \rangle = \langle F_y \rangle = \langle F_z \rangle = 0$ , che lascerebbe la supersimmetria integra, non possa verificarsi. Supponiamo ora che sia  $M^2 < \frac{g^2}{2\lambda^2}$ . In questo caso si ha il minimo del potenziale scalare per  $\langle \varphi_y \rangle = \langle \varphi_z \rangle = 0$ , il che conduce a  $\langle F_x \rangle = \lambda M^2$  e dunque alla rottura spontanea. La teoria risultante descrive allora le seguenti particelle:

- il goldstino (fermione di Goldstone) *non massivo*  $\psi_x$ ;
- due fermioni massivi di massa  $g$ , combinazioni lineari di  $\psi_y$  e  $\psi_z$ ;
- un bosone non massivo,  $\varphi_x$ , e uno di massa  $g$ ,  $\varphi_y$ ;
- due bosoni massivi, legati a  $\varphi_z$  dalla relazione  $\varphi_z \equiv a + ib$ ,

con masse tali da rimuovere la degenerazione con i fermioni:

$$\begin{aligned} m_a^2 &= g^2 - 4\lambda^2 M^2 \\ m_b^2 &= g^2 + 4\lambda^2 M^2 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Già da questo semplice esempio possiamo notare alcune caratteristiche che rimangono valide in generale.

Anzitutto, vediamo come a questo livello di approssimazione (tree level) solo le masse di alcuni bosoni siano state modificate. Ciò è dovuto al fatto che la rimozione della degenerazione è “trasmessa” dall'accoppiamento con il goldstino  $\psi_x$ , e nella lagrangiana (3.47) solo il campo  $\varphi_z$  si lega ad esso tramite il termine  $gXZ^2$ .

Possiamo poi osservare come l'entità del *mass splitting* (liberamente interpretabile - grazie alla iniziale degenerazione - come differenza di massa tra bosoni o tra bosoni e fermioni) sia legata tanto alla scala di rottura della supersimmetria  $M_S^2 \equiv \langle F_x \rangle = \lambda M^2$  quanto all'intensità dell'accoppiamento con il goldstino. Si ha infatti

$$\Delta m^2 \sim \lambda^2 M^2 = \lambda M_S^2 \quad (3.51)$$

Notiamo infine come, anche in presenza di una rottura spontanea, le masse rimangano “in media” le stesse (vale  $m_a^2 + m_b^2 = 2g^2$ ) e come continui a sussistere (al tree level) la seguente relazione fra le matrici di massa fermioniche ( $J$  semintero) e quelle bosoniche ( $J$  intero):

$$\text{STr} \mathcal{M}^2 \equiv \sum_J (-1)^{2J} (2J + 1) M_J^2 = \sum M_{\text{bosoni}}^2 - \sum M_{\text{fermioni}}^2 = 0 \quad (3.52)$$

Questa relazione, ricavata da Ferrara, Girardello e Palumbo [14], mostra come in una teoria supersimmetrica (anche *spontaneamente* rotta), i bosoni non possano essere tutti più pesanti dei fermioni. È evidente come ciò sia una limitazione importante in vista della costruzione di modelli realistici. Vedremo in seguito come si potrà tentare di evitare questo problema.

Prima di terminare questa Sezione analizziamo brevemente anche il modo in cui la supersimmetria può essere spontaneamente rotta tramite il meccanismo di Fayet-Iliopoulos, e le conseguenze di

ciò. Per fare questo consideriamo la lagrangiana (3.41), che descrive una teoria di gauge supersimmetrica, e aggiungiamole un termine tramite il quale rompere la simmetria:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{32}(W^a W_a)_F + (\phi^\dagger \exp(2gV)\phi + 2\xi V)_D \quad (3.53)$$

Esplicitandola in termini dei campi ordinari possiamo riconoscere il potenziale scalare

$$V = \frac{1}{2}D^2 = \frac{1}{2}|\xi + g\varphi\varphi^*|^2 \quad (3.54)$$

Osserviamo che a seconda dei segni di  $g$  e  $\xi$  possono presentarsi due casi distinti, ugualmente fisicamente interessanti:

1.  $g$  e  $\xi$  hanno segni *opposti*. In questo caso il valore di aspettazione sul vuoto del potenziale è nullo, mentre quello del campo  $\varphi$  è diverso da zero. Questo lascia intatta la supersimmetria mentre rompe spontaneamente la simmetria di gauge (vedi Fig.1b).
2.  $g$  e  $\xi$  hanno segni *uguali*. Ora non è possibile annullare il potenziale, che viene minimizzato a  $V_{min} = \frac{\xi^2}{2}$  per  $\langle\varphi\rangle = 0$ . Ciò comporta evidentemente una rottura della supersimmetria pur lasciando integra la simmetria di gauge (vedi Fig.1c).

Consideriamo ora le due circostanze in maggior dettaglio. Nel primo caso assistiamo alla generalizzazione supersimmetrica del meccanismo di Higgs: il bosone di gauge  $V_\mu$  acquista una massa  $\sqrt{-\xi g}$  assorbendo uno scalare reale. Grazie alla supersimmetria, la stessa massa l'hanno poi l'altro scalare reale e il fermione di Dirac massivo che nasce dalla combinazione dei due fermioni di Weyl  $\psi$  e  $\lambda$ .

Nel secondo caso, in cui abbiamo rottura spontanea della supersimmetria, notiamo anzitutto la presenza di un goldstino. Come nel caso precedente, esso sarà il partner fermionico del campo ausiliario che ha valore di aspettazione sul vuoto non nullo. È dunque identificabile nel gaugino  $\lambda$ . Poiché la simmetria di gauge è integra sia il bosone di gauge  $V_\mu$  che il goldstino/gaugino  $\lambda$  rimangono

non massivi, insieme al fermione  $\psi$ , mentre acquista una massa  $\sqrt{\xi}g$  il bosone  $\varphi$ . Considerando questo spettro di massa possiamo verificare come valga ancora la regola per la stima dell'ordine di grandezza del mass splitting:

$$\Delta m^2 \sim g\xi = gM_S^2 \quad (3.55)$$

Viene invece ora violata l'equazione (3.52) per la supertraccia della matrice di massa. In presenza di una simmetria di gauge  $U(1)$  in cui la supersimmetria sia spontaneamente rotta essa viene modificata in<sup>8</sup>

$$S\text{Tr}\mathcal{M}^2 = 2\text{Tr}Q\langle D \rangle \quad (3.56)$$

ove  $Q$  è la matrice di carica dei campi chirali eventualmente utilizzati.

Osserviamo infine come, per mezzo di superpotenziali opportunamente scelti, sarà in generale possibile pervenire ad una rottura spontanea contemporanea della supersimmetria e della simmetria di gauge.

### 3.7 Non-Rinormalizzazione e Soft Breaking

Il capitolo riguardante la supersimmetria *globale* non può terminare senza un accenno a una proprietà fondamentale delle teorie supersimmetriche.

Avevamo precedentemente speculato come una teoria contenente opportune relazioni tra bosoni e fermioni potesse risolvere il problema delle divergenze che rendono innaturale il Modello Standard. Avendo ora sviluppato il formalismo supersimmetrico potremmo dimostrare la validità della seguente affermazione: *le teorie supersimmetriche sono prive di divergenze quadratiche (ammesso che  $\text{Tr}Q = 0$ ) [2] e, inoltre, i parametri del superpotenziale non ricevono correzioni radiative ad alcun ordine [15].*

---

<sup>8</sup>Notare che questa formula non risolve, all'atto pratico, il problema di quella precedente di condurre a uno spettro di massa non realistico per bosoni e fermioni. Infatti allorché si voglia costruire un modello fenomenologicamente valido occorre, per evitare anomalie, fare in modo che la traccia della matrice di carica si annulli, e ciò porta immediatamente a ricadere nel caso di supertraccia nulla.

Le supersimmetrie finora discusse sarebbero dunque un'ottima soluzione per i problemi di naturalezza che affliggono il Modello Standard se da esse si potessero ricavare modelli realistici. Perché questo accada la supersimmetria deve però essere rotta, e come abbiamo visto in precedenza fare ciò tramite una rottura spontanea porta a relazioni tra le masse che non favoriscono una corretta descrizione della natura.

Una possibile via d'uscita da questo problema ci viene da un secondo teorema: *esiste la possibilità di rompere esplicitamente la supersimmetria senza per questo introdurre divergenze quadratiche*. Comprensibilmente, la classe di termini non supersimmetrici che consente di fare ciò è ristretta. Essi sono detti *termini di soft-breaking* e si è dimostrato [16] che possono essere esclusivamente della forma seguente:

$$m^2\varphi\varphi^* \quad m^2(\varphi^2 + \varphi^{*2}) \quad A(\varphi^3 + \varphi^{*3}) \quad \mu\lambda\lambda \quad (3.57)$$

Questi termini descrivono masse e interazioni trilineari per gli scalari  $\varphi$  e masse per i fermioni di gauge  $\lambda$ .

Appare evidente come, con la possibilità di aggiungere termini a piacimento, possa ora diventare semplice costruire modelli supersimmetrici realistici. È però altrettanto ovvio che, contenendo molti parametri liberi, questi modelli avranno poco potere predittivo.

## 4 SuperGravità e MSSM

Una delle argomentazioni che avevamo addotto per giustificare l'investigazione delle teorie supersimmetriche, oltre alla più pressante necessità di formulare una teoria "naturale", era la possibilità di giungere tramite esse a una unificazione con la gravità. Speranze in questo senso sono alimentate dalla forma dell'algebra (3.3), che lega le trasformazioni supersimmetriche a quelle di Lorentz-Poincaré.

Ricordando che la Relatività Generale discende dal requisito di invarianza per trasformazioni *locali* di Poincaré, appare naturale pensare che la promozione della trasformazione supersimmetrica da *globale a locale* (cioè con parametro della trasformazione dipendente dallo spaziotempo,  $\alpha = \alpha(x)$ ) faccia entrare in gioco la gravità.

Vedremo nelle sezioni successive come questa aspettativa si riveli corretta: la gravità entra necessariamente nelle teorie localmente supersimmetriche, che per questa ragione prendono il nome di *Supergravità*.

Scopriremo poi che rompendo spontaneamente una supergravità accoppiata con la materia non si presentano più le caratteristiche negative che nel caso della supersimmetria globale impedivano la formulazione di validi modelli fenomenologici.

Infine, osserveremo come il limite di bassa energia della supergravità *spontaneamente* rotta coincida con una supersimmetria globale *esplicitamente* rotta. Questa avrà però meno parametri liberi di quella costruibile *ad hoc* con le regole del capitolo precedente, e consentirà dunque la costruzione di modelli dotati di un discreto grado di predittività. Il Modello Standard Supersimmetrico Minimale apparterrà a questa categoria.

## 4.1 La Lagrangiana della SuperGravit 

Riconsideriamo la lagrangiana supersimmetrica (3.38) e il set di trasformazioni (3.24). Questa lagrangiana  , per costruzione, invariante (o, come specificato nella Sez. 3.4, modificata per una derivata totale) sotto l'azione delle trasformazioni sopra citate.   per  evidente come, a causa della presenza di derivate spazio-temporali, questa invarianza venga a mancare allorch  il parametro della trasformazione abbia una dipendenza locale:  $\alpha = \alpha(x)$ . La situazione   in tutto e per tutto analoga a quella che si affronta quando si passa da una trasformazione di gauge globale a una locale: la lagrangiana perde la sua invarianza e per ripristinarla occorre aggiungere nuovi campi con opportuni accoppiamenti e leggi di trasformazione.

Nel caso in esame si pu  mostrare<sup>9</sup> come occorra introdurre uno spinore di Majorana di spin 3/2 con la seguente legge di trasforma-

---

<sup>9</sup>Ora e in seguito, a causa dell'esiguit  dello spazio a disposizione, della complicit  dei calcoli e infine della volont  di presentare pi  lo sviluppo logico della materia che non una sua descrizione dettagliata, solo i risultati principali verranno di norma esplicitati e commentati, mentre per tutti i dettagli si rimanda alla letteratura citata.

zione:

$$\psi_a^\mu \rightarrow \psi_a^\mu + \kappa^{-1} \partial^\mu \alpha_a(x) \quad (4.1)$$

Rispetto alle usuali teorie di gauge abbiamo due importanti differenze:

- il “campo di gauge”  $\psi_a^\mu$  non ha spin 1 ma bensì spin 3/2
- la sua costante di accoppiamento è *dimensionale*:  $\kappa$  ha infatti la dimensione dell’inverso di una massa

L’introduzione di questo campo non ci consente ancora di scrivere una lagrangiana supersimmetrica: occorre introdurre anche il suo partner supersimmetrico, e cioè una particella di spin 2.

Ricordando che il gravitone ha 5 gradi di libertà possiamo identificarlo con questa particella, e dare il nome “gravitino” al suo partner. Legando infine la costante di accoppiamento dimensionale del gravitino alla costante di gravitazione, in modo che  $\kappa = \sqrt{8\pi G_N} = 1/M_P$ , essendo  $M_P$  la cosiddetta “massa di Planck”, dell’ordine di  $10^{19}$  GeV, possiamo scrivere la seguente *lagrangiana della SuperGravità pura* [17], invariante per trasformazioni locali di supersimmetria:

$$\mathcal{L}_{SG} = -\frac{1}{2\kappa^2} \sqrt{g} R - \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \bar{\psi}_\mu \gamma_5 \gamma_\nu D_\rho \psi_\sigma \quad (4.2)$$

Il primo termine è l’usuale lagrangiana di Einstein della Relatività Generale, mentre il secondo è una lagrangiana di Rarita-Schwinger per particelle a spin 3/2, resa covariante rispetto alla gravità per mezzo dell’introduzione della derivata  $D_\rho = \partial_\rho + \frac{1}{2} \omega_\rho^{mn} \sigma_{mn}$ , ove  $\omega_\rho^{mn}$  è la cosiddetta “connessione di spin”.

Un’analisi di questo tipo, benché semplicemente accennata, mostra come la promozione della supersimmetria da legge di invarianza globale a locale porti effettivamente - a causa della necessità di introdurre particelle a spin 3/2 e dunque i loro partner a spin 2 - ad una imprescindibilità dagli effetti gravitazionali. Questo realizza le speranze della Sez. 1: la supersimmetria (locale!!) conduce ad un contesto nel quale le simmetrie di gauge sono legate alle simmetrie spazio-temporali.



## 4.2 Il Modello Standard Supersimmetrico Minimale (MSSM)

Ciò che viene comunemente definito Modello Standard Supersimmetrico Minimale (MSSM) è il risultato finale di un processo che non ha la pretesa di condurre ad una teoria fondamentale, ma che cerca piuttosto di portare ad una descrizione della fisica alla scala del TeV che sia allo stesso tempo il più possibile generale (cioè indipendente da ipotesi eccessivamente arbitrarie o *ad hoc*) e predittiva (e dunque dipendente da un numero *limitato* di parametri “ragionevoli”).

Il primo passo di questo processo consiste nello scrivere una lagrangiana contenente la Supergravità e tutti i suoi possibili accoppiamenti con una teoria di Yang-Mills localmente supersimmetrica [18]. Una tecnica che consente di fare ciò, e che porta a espressioni particolarmente lunghe e complicate che non riporteremo, è detta “calcolo tensoriale”. Ovviamente il risultato di questo procedimento non avrà nulla di predittivo<sup>10</sup>: nello scrivere gli accoppiamenti non ci siamo infatti serviti di alcun principio guida (che, se esistesse, sarebbe probabilmente la tanto agognata “Teoria del Tutto”) ma abbiamo semplicemente ammesso tutto quanto è supersimmetricamente invariante.

Analizzando la lagrangiana ottenuta possiamo identificarvi, dopo aver fatto alcune ipotesi semplificative, il potenziale scalare<sup>11</sup> [18]

$$V[g] = \exp\left(\frac{z_i z^{*i}}{M_P^2}\right) \left[ \left| \frac{\partial g(z_i)}{\partial z_i} + \frac{z^{*i} g(z_i)}{M_P^2} \right|^2 - \frac{3|g|^2}{M_P^2} \right] \quad (4.3)$$

Gli  $z_i$  sono le componenti scalari dei supercampi, e  $g$  è un - per ora - generico superpotenziale.

La teoria così costruita si presta ad una sua rottura spontanea tramite il “meccanismo di super-Higgs” [19, 18], cosiddetto in

---

<sup>10</sup>A meno di non credere che la Supersimmetria Locale sia la Risposta Finale. Ma questo, probabilmente, non lo pensa nessuno. Inoltre, la teoria risultante non è rinormalizzabile.

<sup>11</sup>È importante ricordare come, a causa delle semplificazioni fatte, questa non sia la più generale forma di potenziale che è possibile scrivere e dalla quale sia possibile giungere a teorie “ragionevoli”.

quanto il gaugino - e cioè il gravitino - acquista massa. Le caratteristiche di questa rottura spontanea si differenziano da quelle delle supersimmetrie globali per alcuni punti fondamentali<sup>12</sup>:

- Il “parametro d’ordine”, cioè il termine che assumendo valore di aspettazione sul vuoto non nullo causa la rottura spontanea, non è più semplicemente la derivata del superpotenziale (vedi (3.39) e la Sez. 3.6) ma bensì

$$f^i = \frac{\partial g(z_i)}{\partial z_i} + \frac{z^{*i} g(z_i)}{M_P^2} \quad (4.4)$$

- Il potenziale scalare  $V$  permette, grazie all’ultimo termine con segno negativo, la rottura spontanea della supersimmetria anche con *valore di aspettazione sul vuoto nullo*,  $V_0 = 0$ .
- Nell’ipotesi<sup>13</sup>  $V_0 = 0$ , la scala di rottura della supersimmetria,  $M_S$ , e il mass-splitting gravitone-gravitino (in questo caso, la massa del gravitino  $m_{3/2}$ , in quanto il gravitone rimane non massivo) sono depressi, rispetto a una tipica scala  $\mu$  per il v.e.v. dei campi  $z_i$ , di potenze di  $M_P$ . Si trova infatti

$$M_S^2 = \langle f^i \rangle = \frac{\sqrt{3}}{M_P} \langle g(z_i) \rangle \sim \frac{\lambda \mu^3}{M_P} \quad (4.5)$$

$$m_{3/2} \sim \frac{M_S^2}{M_P} \sim \frac{\lambda \mu^3}{M_P^2} \quad (4.6)$$

---

<sup>12</sup>Notare come queste caratteristiche non siano legate a questa particolare forma di potenziale, ma siano invece proprie anche delle teorie più generali menzionate nella nota precedente.

<sup>13</sup>Fare quest’ipotesi è necessario in quanto il valore del potenziale nel minimo è la cosiddetta *costante cosmologica*. Un suo valore non nullo può venire ignorato nelle normali teorie di campo (tutto è misurato rispetto al vuoto) ma non allorché si voglia includere la gravità. Esso misura infatti la curvatura dello spazio-tempo in *assenza* di energia e materia, e nella Relatività Generale si suppone che questa quantità sia nulla. È importante ricordare come una supersimmetria globale non ci avrebbe permesso di annullare la costante cosmologica.

- La formula per la supertraccia è ora data da [18]

$$\text{STr.}\mathcal{M}^2 = 2(N - 1)m_{3/2}^2 \quad (4.7)$$

ove  $N$  è il numero di supercampi chirali considerati. Questo è un risultato fondamentale. Esso ci dice infatti che, anzitutto, i bosoni saranno in media più pesanti dei fermioni - risultato molto utile per la costruzione di modelli - e inoltre che il mass-splitting è ora governato non dalla scala di rottura della supersimmetria ma dalla massa del gravitino che, come indica la (4.6), può differire da  $M_S$  anche di molti ordini di grandezza.

Appurate queste caratteristiche apparentemente favorevoli della “teoria” possiamo ora apprestarci a compiere il secondo passo, e cioè una sua semplificazione. Allo stato attuale essa è ancora troppo generale per poter essere di qualche utilità pratica, e in più non è rinormalizzabile. La semplificazione consiste anzitutto nel fare una distinzione tra un cosiddetto “settore nascosto” di alta energia, non osservabile e utilizzato per la rottura spontanea, e un settore osservabile, di bassa energia, che conterrà tra le altre anche le particelle note oggigiorno [20, 21]. Poniamo a questo scopo

$$g(z_i, y_a) = h(z_i) + \hat{l}(y_a) \quad (4.8)$$

ove il superpotenziale  $h$  contiene i campi del settore nascosto,  $\hat{l}$  quelli del settore osservabile. Rompiamo ora la simmetria nel settore nascosto richiedendo<sup>14</sup>

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial z_i} \right\rangle \sim \mu^2 \quad \langle z_i \rangle \sim M_P \quad \langle h \rangle \sim \mu^2 M_P \quad (4.9)$$

Per le considerazioni precedenti, questa situazione porta a una  $M_S^2 = \mu^2$  e a un mass-splitting dell'ordine  $\mu^2/M_P$ . Per  $\mu \sim 10^{11}$  GeV il mass-splitting sarà dell'ordine del TeV, mentre il settore nascosto

---

<sup>14</sup>Ci possono essere differenti forme del superpotenziale  $h$  che conducono a questa situazione. Un classico esempio è il superpotenziale di Polonyi  $h(z) = \mu^2(z + \beta)$ , con  $\beta$  opportunamente scelto in modo che  $V_0 = 0$ .

sarà posto ad energie molto alte e dunque non di interesse per la fisica attualmente osservabile. Possiamo allora “eliminare” quest’ultimo settore e limitarci a considerare quello osservabile prendendo il *limite di bassa energia* della teoria così costruita<sup>15</sup>, e cioè

$$\begin{cases} M_P \rightarrow \infty \\ m_{3/2} \text{ fissata} \end{cases} \quad (4.10)$$

Ridefinendo in maniera opportuna il superpotenziale del settore osservabile,  $\hat{l} \rightarrow l$ , otteniamo

$$V[l] = |l_a|^2 + m_{3/2}^2 |y_a|^2 + m_{3/2} [y_a l_a + (A - 3)l + \text{h.c.}] \quad (4.11)$$

ove  $A$  è un parametro numerico che dipende dalla forma specifica del superpotenziale del settore nascosto. Osservando i termini di questo potenziale scalare e confrontandoli con i termini di soft-breaking (3.57) possiamo trarre la seguente importantissima conclusione:

Il limite di bassa energia di una supergravità *spontaneamente* rotta coincide con una teoria globalmente supersimmetrica *esplicitamente* rotta da termini di soft-breaking.

Il vantaggio rispetto a quando i termini di soft-breaking venivano introdotti manualmente è evidentemente dato dal minor numero di parametri liberi. In questo senso, l’essere passati attraverso la supergravità conferisce alla teoria un maggior grado di predittività.

Siamo ora pronti al terzo passo, e cioè alla vera e propria formulazione del MSSM. In ultima analisi, ciò significa scegliere quali particelle inserirvi. La scelta *minimale* compatibile con la supersimmetria è quella seguente

MS	MSSM
particella	particella + sparticella
1 doppietto di higgs	2 doppietti di higgs e higgsini
Gruppo di gauge: $SU(3)$ $SU(2) \otimes U(1)$	

<sup>15</sup>Questo limite equivale a trascurare gli effetti gravitazionali ma non quelli super-gravitazionali. Questi ultimi sono quelli che “trasmettono” la rottura della supersimmetria al settore di bassa energia.

Date queste particelle e questo gruppo di gauge (lo stesso del modello Standard<sup>16</sup>) possiamo ottenere una teoria di gauge supersimmetrica per mezzo delle regole della Sez. 3.5 e introdurre gli opportuni termini di massa e di interazione. Occorre a questo punto fare un'ulteriore ipotesi, e supporre la conservazione della cosiddetta *R-parità*, una simmetria discreta definita da

$$R = (-1)^{3B+L+2S} \quad (4.12)$$

ove  $B$ ,  $L$  e  $S$  indicano rispettivamente il numero barionico, il numero leptonico e lo spin di una particella. È facile verificare che tutte le particelle supersimmetriche hanno  $R$  dispari, mentre quelle ordinarie sono stati ad  $R$  pari. La richiesta di conservazione di  $R$  limita la forma del superpotenziale ed implica la non-violazione del numero barionico e leptonico, impedendo l'introduzione nella lagrangiana di termini supersimmetrici che violerebbero queste conservazioni. Inoltre fa sì che gli stati supersimmetrici possano essere prodotti solo in coppie e che la particella supersimmetrica più leggera (la cosiddetta LSP, lightest supersymmetric particle) sia *assolutamente stabile*.

Tenendo conto della *R-parità* possiamo allora scrivere il superpotenziale<sup>17</sup>

$$\begin{aligned} W &= W_3 + W_2 \\ W_3 &= \lambda_E^{ab} L^a \bar{E}^b H + \lambda_D^{ab} Q^a \bar{D}^b H + \lambda_U^{ab} Q^a \bar{U}^b \bar{H} \\ W_2 &= \rho H \bar{H} \end{aligned} \quad (4.13)$$

e il potenziale di soft-breaking

$$V_{soft} = m_{3/2}^2 \sum_{\text{scalari}} |z_i|^2 + B m_{3/2} W_2 + A m_{3/2} W_3 + M \sum_{\text{gaugini}} \bar{\lambda}_a \lambda_a + \text{h.c.} \quad (4.14)$$

Nella (4.13)  $L^a$  e  $Q^a$  sono doppietti (leptonici e di quark) di  $SU(2)$ ,  $H$  e  $\bar{H}$  sono i due doppietti di Higgs mentre  $\bar{E}^b$ ,  $\bar{D}^b$  e  $\bar{U}^b$  sono singoletti. L'indice si riferisce alle generazioni.

<sup>16</sup>In modo analogo potremmo costruire una Teoria di Grande Unificazione Supersimmetrica utilizzando, ad esempio,  $SU(5)$ .

<sup>17</sup>È importante ricordare che in un modello supersimmetrico  $H$  e  $\bar{H}$  sono due campi *indipendenti*.

In osservanza della forma generale per i termini di soft-breaking stabilita dal potenziale di bassa energia della supergravità (4.11),  $V_{soft}$  contiene termini di massa comuni per gli scalari ( $m_{3/2}$ ) e per i gaugini ( $M$ ) e interazioni di forma analitica, al massimo trilineari, fra i vari campi.

Il Modello Standard Supersimmetrico Minimale dipende dunque, oltre alle normali costanti di accoppiamento e di Yukawa già proprie del Modello Standard, dai seguenti 5 parametri<sup>18</sup>:

$m_{3/2}$	$\rho$	$A$	$B$	$M$
-----------	--------	-----	-----	-----

Lo spettro di massa delle particelle supersimmetriche sarà poi ottenuto evolvendo all'energia del TeV questi parametri, ipotizzati universali ad un'energia di grande unificazione  $M_X$ , possibilmente dell'ordine di  $M_P$ .

Prima di concludere vediamo quali sono le particelle previste dal MSSM in aggiunta al MS:

- Esistono anzitutto i partner di tutti i fermioni di materia del Modello Standard: squark e sleptoni. Questo è il settore più "simmetrico".
- Abbiamo poi i partner dei bosoni di gauge, cioè i campi fermionici  $\tilde{W}$  e  $\tilde{B}$ . Essi si mixano con gli higgsini, partner fermionici dei bosoni di Higgs, per dare gli autostati di massa detti *chargini* e *neutralini*.
- Viene infine il settore di Higgs, che è quello più profondamente modificato. Abbiamo visto come esistano due doppietti di Higgs, per un totale di otto gradi di libertà bosonici e otto fermionici. Quelli fermionici si mixano con i gaugini, mentre tre degli otto bosonici danno massa a  $W^\pm$  e  $Z^0$ . I restanti 5 sono tutte particelle fisiche: due scalari carichi, due neutri e uno pseudoscalare neutro.

---

<sup>18</sup>Il parametro  $\rho$  qui utilizzato è usualmente indicato con  $\mu$ . Si è scelto di modificare la notazione per non generare confusione con il  $\mu$  dell'usuale settore di Higgs del Modello Standard.

### 4.3 Il settore di Higgs del MSSM

In questa Sezione vogliamo considerare in un qualche dettaglio una caratteristica apparentemente gradevole del MSSM: la possibilità di connettere la rottura della simmetria elettrodebole a quella supersimmetrica. Con ciò intendiamo che la prima non è inserita *ad hoc* nella teoria ma è piuttosto la conseguenza di sue caratteristiche generali, proprie di energie molto più alte.

Sappiamo come la rottura elettrodebole sia strettamente legata, nel MS, alla forma del potenziale di Higgs

$$V = -\mu^2 H^\dagger H + \frac{\lambda}{2} (H^\dagger H)^2 \quad (4.15)$$

e al segno relativo di  $\mu$  e  $\lambda$ . Nel caso supersimmetrico la parte del potenziale rilevante per la rottura della simmetria elettrodebole è data da<sup>19</sup>

$$V = \frac{g^2 + g'^2}{8} (|H^0|^2 - |\bar{H}^0|^2)^2 + m_1^2 |H^0|^2 + m_2^2 |\bar{H}^0|^2 - m_3^2 (H^0 \bar{H}^0 + \text{h.c.}) \quad (4.16)$$

e può condurre alla rottura solo se tra  $m_1, m_2, m_3$  sussistono opportune relazioni. Queste quantità, al pari degli altri parametri di bassa energia, sono calcolabili a partire dai 5 parametri fondamentali tramite equazioni di evoluzione. Si ottiene infatti [24]

$$\begin{aligned} m_1^2 &= m_{3/2} + e\rho^2 + fM^2 \\ m_2^2 &= -aM^2 - bAm_{3/2}M + cm_{3/2}^2 - dA^2m_{3/2}^2 + e\rho^2 \\ m_3^2 &= g\rho M + hB\rho m_{3/2} + kA\rho m_{3/2} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Queste equazioni dipendono, oltre che dai parametri supersimmetrici, anche da parecchi coefficienti adimensionali del gruppo di ri-normalizzazione ( $a, b, c$ , etc.) che a loro volta sono funzioni dei coupling di gauge e di Yukawa<sup>20</sup>. In questo modo i dettagli della

<sup>19</sup>Per una review del settore di Higgs supersimmetrico si veda ad esempio [23] e i riferimenti ivi indicati.

<sup>20</sup>In questo caso particolare solo del coupling di Yukawa del top, in quanto gli altri sono stati trascurati perché piccoli.

rinormalizzazione a bassa energia delle masse (dell'Higgs, in questo caso) dipendono dalle particelle contenute nella teoria. Si può dimostrare che è possibile concepire modelli realistici nei quali la rottura elettrodebole non è imposta artificialmente agendo direttamente sul settore di Higgs (4.16) ma è "indotta" da quella supersimmetrica: sono le equazioni di evoluzione (4.17) che portano ad una massa negativa per l'Higgs provocando così la rottura della simmetria<sup>21</sup>. Inoltre, cosa particolarmente interessante alla luce degli attuali limiti sperimentali, questi modelli richiedono tipicamente un top abbastanza pesante, ad esempio di massa compresa tra i 100 e i 190 GeV<sup>22</sup>. Occorre naturalmente ricordare a questo punto come l'aver ottenuto una struttura corretta per la rottura spontanea della simmetria elettrodebole non significhi che essa è stata *predetta* in termini della rottura supersimmetrica. Essa risulta infatti da opportune scelte dei parametri del MSSM, soprattutto dall'unico parametro dimensionale del superpotenziale, il termine di mixing  $\rho$  contenuto in  $W_2$ , che viene preso di ordine  $M_W$ . Il dover inserire un siffatto parametro "piccolo" può apparire una contraddizione alla luce delle speranze iniziali di evitare simili termini. Occorre tuttavia notare che, sebbene la sua presenza indebolisca indubbiamente la "predicibilità" del settore di bassa energia in termini di quello di alta energia, esso non crei però, grazie alle proprietà delle teorie supersimmetriche, i problemi di naturalezza del MS: una volta fissato ad un valore che porti a predizioni realistiche questo parametro non riceverà infatti grandi correzioni radiative in quanto protetto dal teorema di non-rinormalizzazione dei termini del superpotenziale (vedi Sez. 3.7).

Possiamo infine ricordare come esistano modelli non minimali che evitano l'introduzione di  $\rho$  tramite scelte particolari del settore nascosto. Non essendovi però alcuna evidenza sperimentale in merito sarebbe arduo cercare di privilegiare un modello piuttosto che

---

<sup>21</sup>Naturalmente il "problema" di scrivere qualcosa che porti a risultati ragionevoli non è eliminato ma solo spostato ad energie maggiori. D'altro canto sarà sempre così finché non avremo la Teoria del Tutto.

<sup>22</sup>Vale forse la pena ricordare come appena pochi anni fa il top venisse ritenuto molto più leggero, e modelli di questo tipo fossero dunque guardati con sospetto. La citazione seguente può forse meglio di qualunque altra cosa sottolinearlo: "La recente scoperta del  $t$ -quark nell'intervallo di massa di 40-60 GeV porta dunque a rigettare l'analisi semplicistica qui presentata"[22].



un altro. Anche la scelta del MSSM come teoria supersimmetrica di base tende a scegliere l'ipotesi più semplice che porta a una descrizione realistica. Se in futuro si avranno conferme sperimentali della supersimmetria si potrà poi cercare di individuare la classe di modelli che fornisce la descrizione migliore.

## 5 Verifiche Sperimentali (?)

È a questo punto legittima la domanda: “Ma esiste una qualche necessità/verifica sperimentale per l'esistenza di un mondo supersimmetrico al di là degli eterei requisiti estetici dell'Introduzione?”.

La risposta è purtroppo indiretta, e può essere affermativa solo a patto di introdurre almeno un'ulteriore ipotesi.

Occorre anzitutto rilevare come *non esista* alcuna evidenza sperimentale circa l'esistenza delle particelle supersimmetriche. Sulle loro masse esistono solo limiti inferiori, la cui validità è oltretutto legata alla particolare forma del modello (minimale o meno) utilizzato.

Esiste tuttavia quella che potrebbe essere ritenuta un'evidenza *indiretta* della presenza di *nuova fisica* al di là del Modello Standard. Il condizionale è d'obbligo in quanto è necessaria un'ipotesi: occorre presupporre che l'attuale gruppo di gauge  $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$  derivi dalla rottura ad alta energia di un unico gruppo di gauge “genitore”. Ciò implica la presenza di un'unica costante di accoppiamento all'energia di grande unificazione  $M_U$ . La sua evoluzione alla scala del TeV darà poi origine a tre distinti accoppiamenti che possono essere parametrizzati efficacemente da  $\alpha_{em}(M_Z)$ ,  $\sin \theta_W(M_Z)$  e  $\alpha_s(M_Z)$ .

Invertendo il procedimento possiamo cercare di verificare se l'evoluzione delle tre quantità sopra citate dall'energia  $M_Z$ , alla quale vengono misurate, alla scala  $M_U$  conduce effettivamente ad un'*unificazione* delle stesse. Poiché le equazioni di evoluzione dipendono dalle particelle descritte dalla teoria, la risposta dipenderà dal modello utilizzato.

Analisi in questo senso (si veda [25] e riferimenti ivi contenuti)

hanno mostrato che il Modello Standard *non* conduce all'unificazione degli accoppiamenti di gauge. Essa è invece ottenuta nell'ambito di sue estensioni supersimmetriche.

## 6 Conclusione

Il contenuto di questa breve *review* sulla Supersimmetria può essere schematicamente distinto in due parti.

Nella prima la Supersimmetria viene introdotta in modo formale, e si mostra come la sua struttura intrinseca la doti, senza necessità di ulteriori ipotesi *ad hoc*, di proprietà apparentemente "gradevoli" nei riguardi delle correzioni radiative ai parametri della lagrangiana: si assiste infatti a "miracolose" cancellazioni delle correzioni che in alcuni casi divengono complete, portando alla non-rinormalizzazione dei parametri stessi. Ciò pone la Supersimmetria in una posizione preminente fra le teorie che vogliono estendere il Modello Standard risolvendo nel contempo i problemi legati alla sua innaturalità.

Nella seconda parte si è cercato di mostrare come un modello capace di descrivere la fisica alle energie di interesse sperimentale attuale, cioè dell'ordine del TeV, possa essere formulato senza dover fare appello ad un numero eccessivo di postulati. Introducendo infatti quella che pare un'unificazione plausibile con la Gravità (e che ha il grande pregio di discendere esclusivamente dal requisito di invarianza locale per trasformazioni supersimmetriche), e rompendo *spontaneamente* la SuperGravità così ottenuta, è poi possibile "isolare" la fisica di interesse prendendo il limite di bassa energia della teoria. Il grande vantaggio di questo procedimento è che i termini di massa e di interazione che rompono ora *esplicitamente* la Supersimmetria - e che sarebbero altrimenti arbitrari - assumono in questo caso una forma precisa e una dipendenza da un numero limitato di parametri.

Il cosiddetto Modello Standard Supersimmetrico Minimale così costruito non ha naturalmente pretesa di verità assoluta. In un certo qual modo potrebbe essere considerato l'analogo del modello a quark degli anni '60,  $SU(3)$  di sapore, capace di "giustificare"

in modo empirico la proliferazione degli adroni: in mancanza di una teoria completa risulta particolarmente utile rifarsi a modelli che estendano - se non la comprensione - almeno il grado di classificazione della fisica, riducendone il numero di gradi di libertà. In questo caso verrebbe accennato un tentativo di unificazione tra bosoni e fermioni.

Il MSSM può dunque essere considerato come un possibile “ponte” fra la fisica odierna (il Modello Standard) e una possibile futura unificazione con la Gravità che conduca alla Teoria del Tutto.

In effetti, se guardiamo alla teoria delle stringhe, essa appare come l'unico approccio finora percorribile verso la quantizzazione della Gravità, e contemporaneamente sembra difficile svilupparla in modo finito e consistente senza che essa implichi un mondo supersimmetrico.

Questa è dunque probabilmente l'unica forte giustificazione attuale (che non sia solo estetica) per la Supersimmetria.

## Ringraziamenti

Desidero ringraziare il dr. Giacomo Polesello per avermi fornito parte della bibliografia e numerosi suggerimenti e consigli. Ringrazio inoltre il prof. L. Girardello per aver suggerito l'ultimo punto della Conclusione.

# Riferimenti

- [1] J. Wess e B. Zumino, Nucl. Phys. **B70** (1974) 39
- [2] E. Witten, Nucl. Phys. **B188** (1981) 513
- [3] A. Salam e J. Strathdee, Nucl. Phys. **B76** (1974) 477
- [4] ♣H.P. Nilles, Phys. Rep. **110** (1984) 1
- [5] L. Susskind, Phys. Rev. **D20** (1979) 2619
- [6] ♣G. 't Hooft, in "Recent developments in gauge theories", Cargese Lectures 1979, (Plenum Press 1980)
- [7] S. Weinberg, Phys. Lett. **B62** (1976) 111  
E. Gildener e S. Weinberg, Phys. Rev. **D13** (1976) 3333  
E. Gildener, Phys. Rev. **D14** (1976) 1667
- [8] ♣R. Barbieri, Riv. Nuovo Cim. **11** (1988) n.4
- [9] S. Coleman e J. Mandula, Phys. Rev. **159** (1967) 1251
- [10] R. Haag, J.T. Lopuszanski e M.F. Sohnius, Nucl. Phys. **B88** (1975) 257
- [11] ♣H.J.W. Müller-Kirsten e A. Wiedermann, Supersymmetry, World Scientific, Singapore 1987
- [12] L. O'Raifeartaigh, Nucl. Phys. **B96** (1975) 331
- [13] P. Fayet e J. Iliopoulos, Phys. Lett. **B51** (1974) 461
- [14] S. Ferrara, L. Girardello e F. Palumbo, Phys. Rev. **D20** (1979) 403
- [15] M.T. Grisaru, W. Siegel e M. Rocek, Nucl. Phys. **B159** (1979) 429  
R. Jackiw e C. Rebbi, Phys. Rev. **D16** (1977) 1053

---

<sup>22</sup> I Riferimenti preceduti da un ♣ contengono lavori di Review o comunque non originali, spesso utili per un primo approccio al problema.

- [16] L. Girardello e M.T. Grisaru, Nucl. Phys. **B194** (1982) 65
- [17] D.Z. Freedman, S. Ferrara e P. van Nieuwenhuizen, Phys. Rev. **D13** (1976) 3214  
S. Deser e B. Zumino, Phys. Lett. **B62** (1976) 335
- [18] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello e A. van Proeyen, Nucl. Phys. **B212** (1983) 413
- [19] D. Volkov e V. Soroka, JETP Lett. **18** (1973) 312  
S. Deser e B. Zumino, Phys. Rev. Lett. **38** (1977) 1433
- [20] R. Barbieri, S. Ferrara e C. Savoy, Phys. Lett. **B119** (1982) 343  
A. Chamseddine, R. Arnowitt e P. Nath, Phys. Rev. Lett. **49** (1982) 970
- [21] H.P. Nilles, Phys. Lett. **B115** (1982) 193  
L. Ibanez, Phys. Lett. **B118** (1982) 73
- [22] ♣R.N. Mohapatra, Unification and Supersymmetry, Springer-Verlag, New York 1986
- [23] ♣F. Zwirner, Proceedings del Workshop "Ten years of SUSY confronting experiment", CERN, 7-9 Settembre 1992, CERN-TH.6792/93
- [24] R. Barbieri e G.F. Giudice, Nucl. Phys. **B306** (1988) 63
- [25] J. Ellis, S. Kelley e D.V. Nanopoulos, Phys. Lett. **B249** (1990) 441  
U. Amaldi, W. de Boer e H. Fürstenau, Phys. Lett. **B260** (1991) 447  
P. Langacker e M. Luo, Phys. Rev. **D44** (1991) 817  
F. Anselmo, L. Cifarelli, A. Peterman e A. Zichichi, Nuovo Cim. **A104** (1991) 1817  
P. Langacker e N. Polonsky, preprint University of Pennsylvania, UPR-0513T, Ottobre 1992

## Bibliografia

Oltre ai testi indicati tra i Riferimenti possono essere utili - tra gli altri - i seguenti:

1. Supersymmetry: a Decade of Development, P. West ed., Adam Hilger, Bristol 1986
2. J.P. Derendinger, Low Energy Supersymmetry, Seminars on Physics Beyond the Standard Model, Frascati 1990
3. H. Haber e G. Kane, Phys. Rep. **117** (1985) 75
4. M.F. Sohnius, Phys. Rep. **128** (1985) 39
5. P. Chiappetta, Riv. Nuovo Cim. **13** (1990) n.4

**Fulvio Piccinini**

**Dipartimento di Fisica Nucleare e Teorica  
Università di Pavia**

**Istituto Nazionale di Fisica Nucleare  
Sezione di Pavia**

**MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS  
NEL MODELLO STANDARD**

**Seminario tenuto il 18/12/1992**

## 1. Introduzione

Gli esperimenti condotti ai grandi acceleratori di particelle degli ultimi anni (LEP, SLC, TEVATRON, HERA) hanno come obiettivo la verifica del Modello Standard delle particelle elementari di Glashow, Salam e Weinberg <sup>[1]</sup> e in particolare la ricerca delle due particelle previste teoricamente e non ancora rivelate sperimentalmente: il quark top e il bosone di Higgs <sup>[2]</sup>. Il primo è essenziale per completare la gerarchia dei fermioni fondamentali. Il Modello Standard prevede infatti l'esistenza di doppietti di particelle con isospin  $\frac{1}{2}$ , anche se non dà nessuna precisazione sul numero di tali doppietti. Le particelle materiali fondamentali scoperte fino ad ora possono organizzarsi in doppietti nel seguente modo:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t? \\ b \end{pmatrix}.$$

La presenza del quark  $b$ , rivelato sperimentalmente nel 1977, comporta la necessità dell'esistenza del quark top per mantenere la coerenza matematica del modello. Infatti la richiesta di rinormalizzabilità della teoria impone l'annullamento della carica totale all'interno di ogni famiglia (costituita da un doppietto leptonic e dal corrispondente barionico). Considerando la terza famiglia di particelle e tenendo conto della carica frazionaria dei quark di tipo down e del numero di colore, si vede facilmente che deve esistere una particella di tipo up con carica  $-1/3e$  per completare il doppietto barionico con il quark  $b$ .

Il bosone di Higgs, invece, è il responsabile della generazione delle masse dei bosoni vettoriali  $W^\pm$  e  $Z^0$  e dei fermioni. Infatti, l'invarianza di gauge della teoria comporta che le particelle abbiano massa nulla. Un modo per introdurre le masse è quello di assumere che la simmetria  $SU(2) \otimes U(1)$  su cui si basa il Modello Standard sia spontaneamente rotta, cioè assumere che la simmetria sia tale per la Lagrangiana ma non per lo stato di vuoto. Questo viene realizzato nel modo più semplice introducendo nella Lagrangiana un doppietto di campi scalari complessi (doppietto di Higgs) che, oltre a fornire in modo gauge invariante i termini



di massa dei bosoni  $W^\pm$  e  $Z^0$ , prevede l'esistenza di un bosone scalare neutro di massa non deducibile dalla teoria. Il Modello Standard con il doppietto di Higgs viene detto Modello Standard Minimale (MSM).

Lo scopo del presente articolo è quello di esaminare e discutere i valori che si ottengono per le masse del quark top e del bosone di Higgs sia sfruttando i dati sperimentali disponibili (in particolare i dati degli esperimenti LEP che hanno raggiunto un elevato grado di precisione) sia mediante un approccio puramente teorico. Nel paragrafo 2 viene mostrato come sia possibile stabilire dei limiti confrontando i dati sperimentali con le previsioni teoriche includenti i contributi delle correzioni radiative a un loop. Nel paragrafo 3 sono invece ricavati i valori di  $m_t$  e  $m_H$  quando si adotta la regolarizzazione di point-splitting delle divergenze ultraviolette presenti nelle correzioni radiative e si richiede l'annullamento delle divergenze quadratiche (divergenze tipiche del Modello Standard).

## 2. Masse del quark top e del bosone di Higgs dalle correzioni radiative

All'anello di accumulazione LEP vengono accelerati e fatti collidere elettroni e positroni con energie nel centro di massa prossime alla massa della  $Z^0$  ( $\simeq 91.2$  GeV). In questa interazione elettrodebole vengono prodotte coppie fermione-antifermione nello stato finale (es.  $e^+e^-$ ,  $\mu^+\mu^-$ ,  $\tau^+\tau^-$ ,  $\nu\bar{\nu}$ ,  $u\bar{u}$ ,  $d\bar{d}$ ,  $c\bar{c}$ ,  $s\bar{s}$ ,  $b\bar{b}$ ). Gli stati finali di tipo quark-antiquark non vengono rivelati direttamente a causa del processo di adronizzazione. Le quantità sperimentali tipicamente misurate sono le sezioni d'urto totali  $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow f\bar{f})$  e le asimmetrie forward-backward  $A_{FB} = \frac{\sigma_F - \sigma_B}{\sigma_F + \sigma_B}$ , dove  $\sigma_F$  e  $\sigma_B$  sono definite come le sezioni d'urto in avanti e indietro.

Il calcolo teorico di tali quantità è basato su uno sviluppo perturbativo. Al fine di raggiungere incertezze teoriche (dovute al trascurare gli ordini superiori dello sviluppo perturbativo) inferiori agli errori sperimentali e poter così verificare la validità del Modello Standard in modo significativo, occorre calcolare le osservabili misurate includendo le correzioni radiative a un loop per quanto riguarda il settore puramente debole. Viceversa le corre-

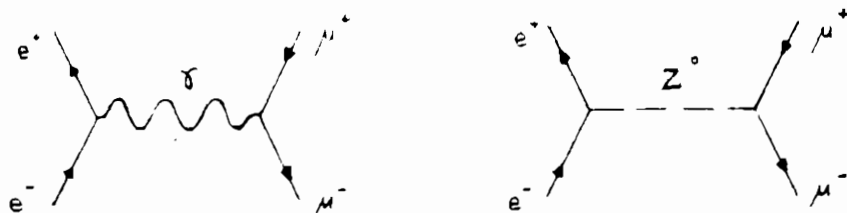
zioni puramente elettromagnetiche devono essere calcolate anche agli ordini superiori, per avere un controllo teorico dell'ordine di qualche parte su mille sulle quantità osservabili. In questo modo, anche se nei processi non compaiono direttamente il quark top e il bosone di Higgs, i risultati dipendono parametricamente dalle loro masse,  $m_t$  e  $m_H$ . Se consideriamo per esempio l'annichilazione  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ , rappresentandola con i diagrammi di Feynman, la somma dei due diagrammi di Fig. 1 corrisponde al primo termine dello sviluppo perturbativo (livello albero) mentre la classe dei diagrammi a un loop è genericamente rappresentata in Fig. 2, dove nei loop interni può propagarsi qualsiasi particella prevista dal Modello Standard con accoppiamenti deducibili dalla Lagrangiana ed in particolare il quark top e il bosone di Higgs. Dal calcolo esplicito delle correzioni radiative a un loop risulta che le osservabili dipendono in modo quadratico dalla massa del top e in modo logaritmico dalla massa dell'Higgs (quest'ultimo è l'effetto del teorema di screening di Veltman <sup>[3]</sup>). Ad esempio, adottando lo schema di rinormalizzazione on shell, si ottiene la seguente espressione per la costante di Fermi <sup>[4]</sup>:

$$G_\mu = \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}} \frac{1}{M_W^2 \sin^2 \theta_W} \frac{1}{1 - \Delta r},$$

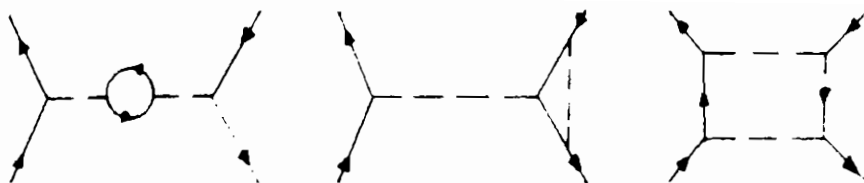
dove

$$\Delta r = \Delta\alpha - 3 \frac{G_\mu m_t^2}{8\pi^2 \sqrt{2}} + \frac{\sqrt{2} G_\mu M_W^2}{16\pi^2} \left[ \frac{11}{3} \left( \ln \frac{m_H^2}{M_W^2} - \frac{5}{6} \right) \right] + \dots$$

e  $\Delta\alpha$  rappresenta il contributo di polarizzazione di vuoto del fotone.



**Fig. 1:** Diagrammi di Feynman per l'ampiezza di scattering  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  al primo ordine dello sviluppo perturbativo.



**Fig. 2:** Correzioni radiative a un loop per l'ampiezza di scattering  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$ .

Dalle misure di precisione a LEP, attraverso una procedura di minimizzazione mediante il metodo dei minimi quadrati, è possibile determinare i valori di  $m_t$  e  $m_H$ , nonché le loro barre d'errore dalla forma del  $\chi^2$ . A causa della dipendenza logaritmica delle osservabili dalla massa del bosone di Higgs, questa non viene praticamente limitata in modo apprezzabile.

Per quanto riguarda il valore di  $m_t$ , la sua barra d'errore è anche determinata dagli errori con cui sono note le altre quantità presenti nell'espressione della sezione d'urto, in particolare la costante di accoppiamento delle interazioni forti  $\alpha_s$ . Riportiamo qui i risultati ottenuti mediando i valori dei best fit sui dati sperimentali pubblicati dalle quattro collaborazioni LEP [5]:

$$\alpha_s = 0.133 \pm 0.007 \quad m_t = 120_{-28}^{+31} \text{ GeV}, \quad (2.1)$$

con  $m_H = 300 \text{ GeV}$ . Variando il valore di  $m_H$  da 60 GeV a 1000 GeV, il valore centrale di  $m_t$  varia di circa 20 GeV.

Per effettuare un'analisi dei dati indipendente dal modello e quindi per evidenziare effetti di "nuova fisica" rispetto al Modello Standard, si possono anche determinare le varie osservabili in termini dei parametri della risonanza, quali le larghezze parziali  $Z^0 \rightarrow f\bar{f}$  (probabilità di decadimento della  $Z^0$  in una particolare coppia fermione-antifermione) e i valori di picco delle sezioni d'urto. Per esempio la sezione d'urto a livello albero per il processo  $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$  ( $f \neq e$ ) può essere espressa come somma dei seguenti

contributi:

$$\begin{aligned}\sigma_Z^0 &= \frac{12\pi \Gamma_f \Gamma_e}{M_Z^2 \Gamma_Z^2} \frac{s \Gamma_Z^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2} \\ \sigma_\gamma^0 &= \frac{4\pi\alpha^2}{3s} Q_f^2 N_c^f \\ \sigma_{\gamma Z}^0 &= -\frac{2\sqrt{2}\alpha}{3} Q_f G_F N_c^f g_{ve} g_{vf} \frac{(s - M_Z^2) M_Z^2}{(s - M_Z^2)^2 + M_Z^2 \Gamma_Z^2},\end{aligned}$$

dove  $g_{ve}$  e  $g_{vf}$  rappresentano rispettivamente l'accoppiamento vettoriale della  $Z^0$  con gli elettroni e con i fermioni di stato finale.  $N_c^f$  è il fattore di colore ( $N_c^f = 3$  per i quark e  $N_c^f = 1$  per i leptoni nello stato finale) e  $Q_f$  la carica (in unità elettroniche) delle particelle finali. L'asimmetria forward-backward per  $\sqrt{s} = M_Z$  assume la seguente forma:

$$A_{FB} = 3 \frac{g_{ve} g_{ae}}{g_{ve}^2 + g_{ae}^2} \cdot \frac{g_{vf} g_{af}}{g_{vf}^2 + g_{af}^2},$$

dove  $g_{ae}$  e  $g_{af}$  rappresentano rispettivamente l'accoppiamento assiale della  $Z^0$  con gli elettroni e con i fermioni di stato finale.

Con un best fit sui parametri della risonanza si ottiene

$$\alpha_s = 0.129 \pm 0.008 \quad m_t = 161_{-28}^{+24} \text{ GeV}, \quad (2.2)$$

in buon accordo, tenuto conto delle barre d'errore, con il valore (2.1).

### 3. Masse del quark top e del bosone di Higgs dalla cancellazione delle divergenze quadratiche

#### 3.1. Regolarizzazione di *point-splitting* ed esempio di applicazione in QED

In questo paragrafo vedremo come sia possibile dedurre dei valori della massa del top e del bosone di Higgs richiedendo la cancellazione delle divergenze quadratiche all'interno del Modello Standard Minimale. È necessario a questo proposito riconsiderare il problema della rinormalizzazione della teoria, che consente di eliminare le divergenze ultraviolette presenti nel calcolo delle correzioni radiative a un loop. Per esempio, considerando un diagramma di self-energia del tipo rappresentato in Fig. 3, si devono calcolare integrali divergenti del tipo

$$\int d^4q \frac{1}{(q^2 + m_1^2)((q+p)^2 + m_2^2)},$$

dove  $m_1$  ed  $m_2$  sono le masse delle particelle che circolano nel loop.

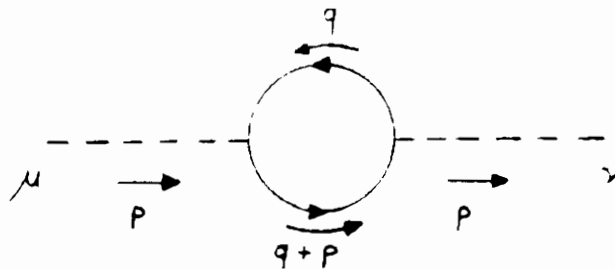


Fig. 3: Esempio di diagramma di self-energia.

Per poter effettuare calcoli a un loop è quindi necessario un criterio di regolarizzazione che permetta di definire in qualche modo gli integrali. Il metodo comunemente usato nel Modello Standard è la regolarizzazione dimensionale <sup>[6]</sup>, in cui si valutano gli

integrali in  $n \neq 4$  dimensioni dove sono definiti. Gli integrali risultano essere funzioni analitiche del numero di dimensioni  $n$ , per cui è possibile costruirne il prolungamento analitico, mediante il quale le divergenze ultraviolette ricompaiono sotto forma polare  $\left(\frac{1}{4-n}\right)$ . Dopo aver fissato i parametri della teoria (che nel caso del Modello Standard sono tre, la costante di accoppiamento di  $SU(2)$ , la massa del bosone  $W$  e il seno dell'angolo di mixing tra fotone e  $Z^0$ ) mediante altrettante relazioni con quantità misurate sperimentalmente, le divergenze ultraviolette si cancellano analiticamente nelle espressioni delle quantità fisiche, per cui a questo punto si può calcolare il limite  $n \rightarrow 4$ . La regolarizzazione dimensionale, rispetto ad altri metodi, ha il vantaggio di mantenere l'invarianza di gauge della teoria in tutti i passaggi intermedi.

Tuttavia, una caratteristica essenziale di ogni teoria che descriva le interazioni deboli è la non conservazione della parità, che nel Modello Standard viene realizzata dalla matrice  $\gamma^5$  attraverso la corrente assiale  $\bar{\psi}(x)\gamma^\mu\gamma^5\psi(x)$ , dove  $\psi(x)$  rappresenta il campo descrivente un fermione nel punto quadridimensionale  $x$ . La matrice  $\gamma^5$  è univocamente definita in quattro dimensioni e la sua estensione ad  $n$ -dimensioni, con  $n \neq 4$ , non è immediata, come risulta dalla letteratura [6].

Recentemente è stato proposto [7] di utilizzare in alternativa alla regolarizzazione dimensionale una versione modificata della regolarizzazione di "point-splitting" [8]. Esaminiamo brevemente questo metodo di regolarizzazione nel caso dell'elettrodinamica quantistica (QED), la più semplice teoria di gauge di notevole rilevanza fisica. L'accoppiamento tra fotoni ed elettroni è descritto dal prodotto scalare del campo  $A_\mu(x)$  con la corrente

$$J_\mu(x) = e\bar{\psi}(x)\gamma_\mu\psi(x),$$

dove  $A_\mu(x)$  e  $\psi(x)$  sono i campi descriventi rispettivamente il fotone e l'elettrone nel punto quadridimensionale  $x$ . La presenza delle divergenze ultraviolette negli sviluppi perturbativi è legata al fatto che i campi  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  sono calcolati nello stesso punto  $x$ . Un modo per eliminare le divergenze è quello di valutare  $\bar{\psi}$  e  $\psi$  in due punti separati di una quantità  $\delta$  (da cui il nome point-splitting),  $\bar{\psi}(x - \frac{1}{2}\delta)$  e  $\psi(x + \frac{1}{2}\delta)$ , perdendo però l'invarianza di gauge della

teoria. Quest'ultima può essere recuperata in senso perturbativo con la seguente prescrizione per la corrente:

$$J_{\mu}(x) = e\bar{\psi}\left(x - \frac{\delta}{2}\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x + \frac{\delta}{2}\right)\exp\left[-ie\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta}d\xi^{\nu}A_{\nu}(\xi)\right],$$

procedendo al limite  $\delta \rightarrow 0$  dopo aver calcolato le quantità fisiche di interesse. Al fine di utilizzare la teoria delle perturbazioni, si può sviluppare la corrente  $J_{\mu}(x)$  in serie della costante di accoppiamento:

$$\begin{aligned} J_{\mu}(x) = i\left\{ & -ie\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\delta\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x + \frac{1}{2}\delta\right) \right. \\ & + (-ie)^2\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\delta\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x + \frac{1}{2}\delta\right)\left[\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta}d\xi^{\nu}A_{\nu}(\xi)\right] \\ & + \frac{(-ie)^3}{2!}\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\delta\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x + \frac{1}{2}\delta\right)\left[\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta}d\xi^{\nu}A_{\nu}(\xi)\right]^2 \\ & + \frac{(-ie)^4}{3!}\bar{\psi}\left(x - \frac{1}{2}\delta\right)\gamma_{\mu}\psi\left(x + \frac{1}{2}\delta\right)\left[\int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta}d\xi^{\nu}A_{\nu}(\xi)\right]^3 \\ & \left. + \dots\right\}. \end{aligned}$$

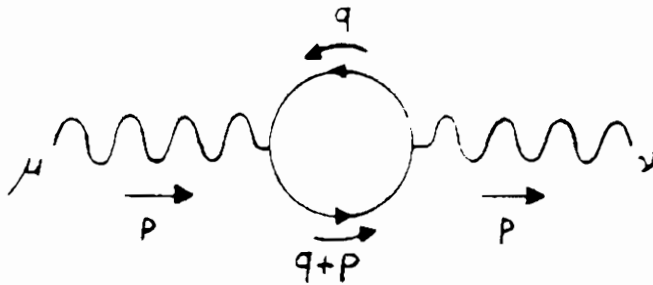
Tenendo conto della relazione che lega la corrente alla Lagrangiana

$$J_{\mu}(x) = \frac{\delta L}{\delta A^{\mu}(x)},$$

si trova la seguente densità di Lagrangiana di interazione:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(x) = i \left\{ & -ie\bar{\psi} \left( x - \frac{1}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{1}{2}\delta \right) \right. \\
& + \frac{(-ie)^2}{2!} \bar{\psi} \left( x - \frac{1}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{1}{2}\delta \right) \left[ \int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right] \\
& + \frac{(-ie)^3}{3!} \bar{\psi} \left( x - \frac{1}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{1}{2}\delta \right) \left[ \int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right]^2 \\
& + \frac{(-ie)^4}{4!} \bar{\psi} \left( x - \frac{1}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{1}{2}\delta \right) \left[ \int_{x-\frac{1}{2}\delta}^{x+\frac{1}{2}\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right]^3 \\
& \left. + \dots \right\}.
\end{aligned}$$

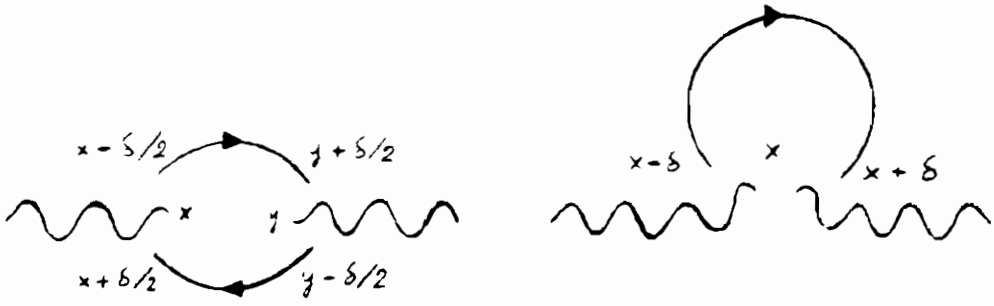
In questa densità di Lagrangiana il primo termine corrisponde a un vertice  $ee\gamma$ , il secondo a un vertice  $ee\gamma\gamma$ , il terzo a un vertice  $ee\gamma\gamma\gamma$  e così via. Mentre il vertice  $ee\gamma$  dà il solito accoppiamento fotone-fermione previsto dall'elettrodinamica, gli altri sono dovuti alla regolarizzazione di point-splitting (vertici peculiari). Per verificare l'invarianza di gauge si può considerare il diagramma di self-energia del fotone di Fig. 4, contrarlo con un momento esterno e controllare che tale contrazione risulti nulla.



**Fig. 4:** Diagramma di self-energia del fotone.

A causa della presenza dei vertici peculiari, per calcolare la self-energia del fotone occorre considerare i due diagrammi di Fig. 5.





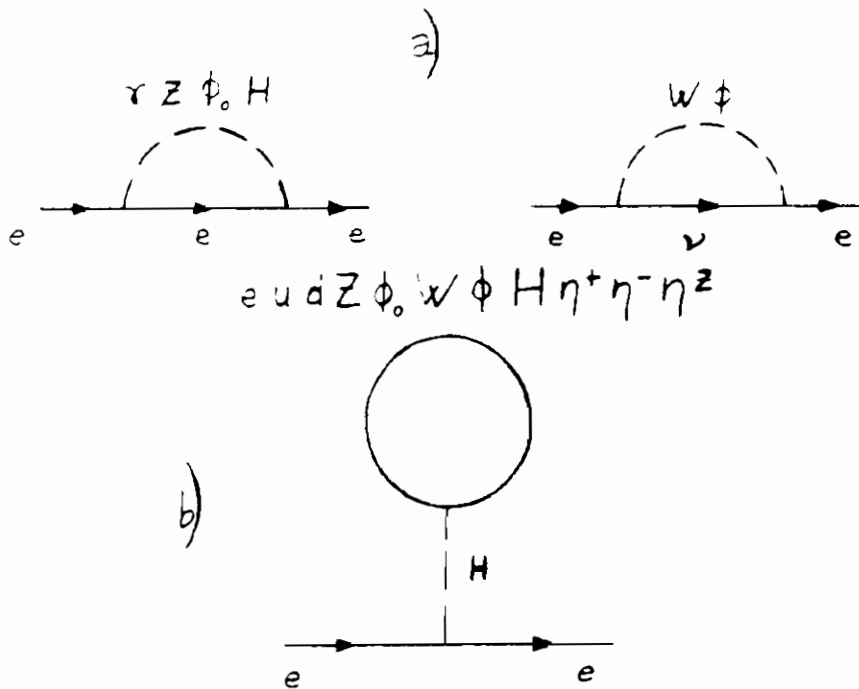
**Fig. 5:** Diagrammi di self-energia del fotone con la regolarizzazione di point-splitting.

Per annullare la contrazione risulta che nel vertice peculiare occorre usare  $2\delta$  al posto di  $\delta$ . Con argomentazioni simili si può mostrare che per il vertice  $ee\gamma\gamma$  si deve usare  $3\delta$  e per il vertice  $ee\gamma\gamma\gamma$   $4\delta$ . Quindi, tenendo conto della richiesta di invarianza di gauge, la densità di Lagrangiana precedente deve essere modificata nel seguente modo:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}(x) = & i \left\{ -ie\bar{\psi} \left( x - \frac{1}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{1}{2}\delta \right) \right. \\
 & + \frac{(-ie)^2}{2!} \bar{\psi} (x - \delta) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi (x + \delta) \left[ \int_{x-\delta}^{x+\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right] \\
 & + \frac{(-ie)^3}{3!} \bar{\psi} \left( x - \frac{3}{2}\delta \right) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi \left( x + \frac{3}{2}\delta \right) \left[ \int_{x-\frac{3}{2}\delta}^{x+\frac{3}{2}\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right]^2 \\
 & + \frac{(-ie)^4}{4!} \bar{\psi} (x - 2\delta) A^\mu(x) \gamma_\mu \psi (x + 2\delta) \left[ \int_{x-2\delta}^{x+2\delta} d\xi^\nu A_\nu(\xi) \right]^3 \\
 & \left. + \dots \right\}.
 \end{aligned}$$

### 3.2. Regolarizzazione di point-splitting nel Modello Standard e divergenze quadratiche

Dopo aver mostrato brevemente come funziona la regolarizzazione di point-splitting in elettrodinamica quantistica, torniamo al Modello Standard. In questo caso, a differenza della QED, esiste una classe di diagrammi a un loop che dà origine alle cosiddette divergenze quadratiche, strettamente collegate alla presenza degli accoppiamenti di Yukawa tra fermioni e campi di Higgs. In particolare le divergenze quadratiche si manifestano nel calcolo dei diagrammi di self-energia. Considerando per esempio la self-energia dell'elettrone, abbiamo i diciassette contributi mostrati in Fig. 6a e 6b.



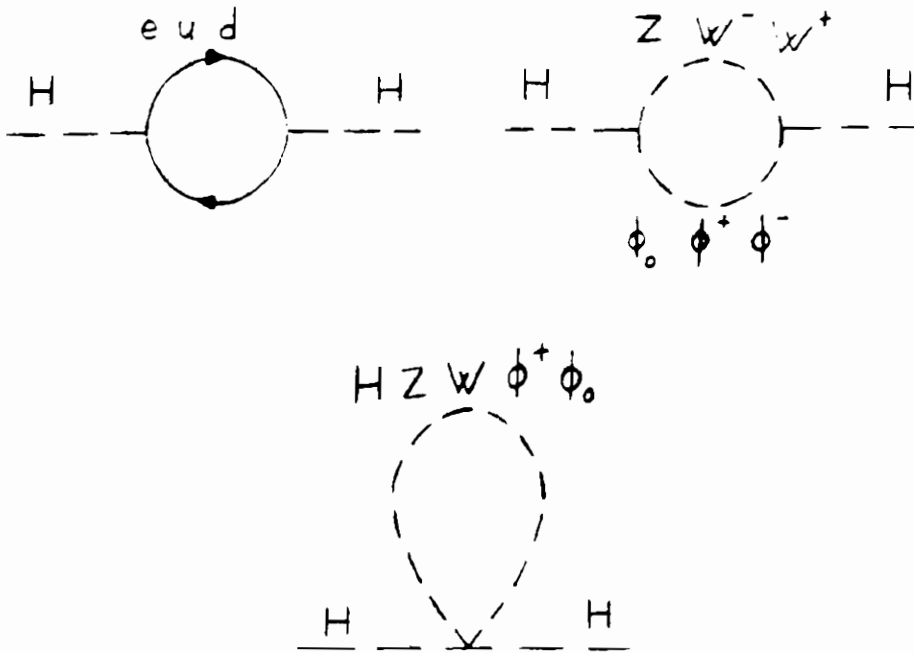
**Fig. 6:** Diagrammi contribuenti alla self-energia dell'elettrone [a) e b)]; i diagrammi di tipo b) vengono denominati diagrammi di tipo tadpole.

I diagrammi di tipo tadpole (Fig. 6b) danno origine alle divergenze quadratiche (termini proporzionali a  $\frac{1}{\delta^2}$ ) e inoltre non

dipendono dal particolare gauge adottato, anche se la somma di tutti i termini di self-energia non è gauge invariante. Il modo più semplice per eliminare il problema delle divergenze quadratiche è quello di richiedere l'annullamento del coefficiente di  $\frac{1}{\delta^2}$ , ottenendo una relazione tra le masse delle particelle previste dal Modello Standard:

$$\begin{aligned}
 & m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 + 3(m_u^2 + m_d^2 + m_c^2 + m_s^2 + m_b^2 + m_t^2) \\
 & = \frac{3}{2}M_W^2 + \frac{3}{4}M_Z^2 + \frac{3}{4}m_H^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.1}$$

In realtà i diagrammi di self-energia elettronica non sono gli unici a dare origine alle divergenze quadratiche. Considerando infatti la self-energia del bosone di Higgs, esistono undici tipi di diagrammi contenenti termini proporzionali a  $\frac{1}{\delta^2}$  (si veda la Fig. 7).



**Fig. 7:** Diagrammi contribuenti alla self-energia del bosone di Higgs e contenenti le divergenze quadratiche.

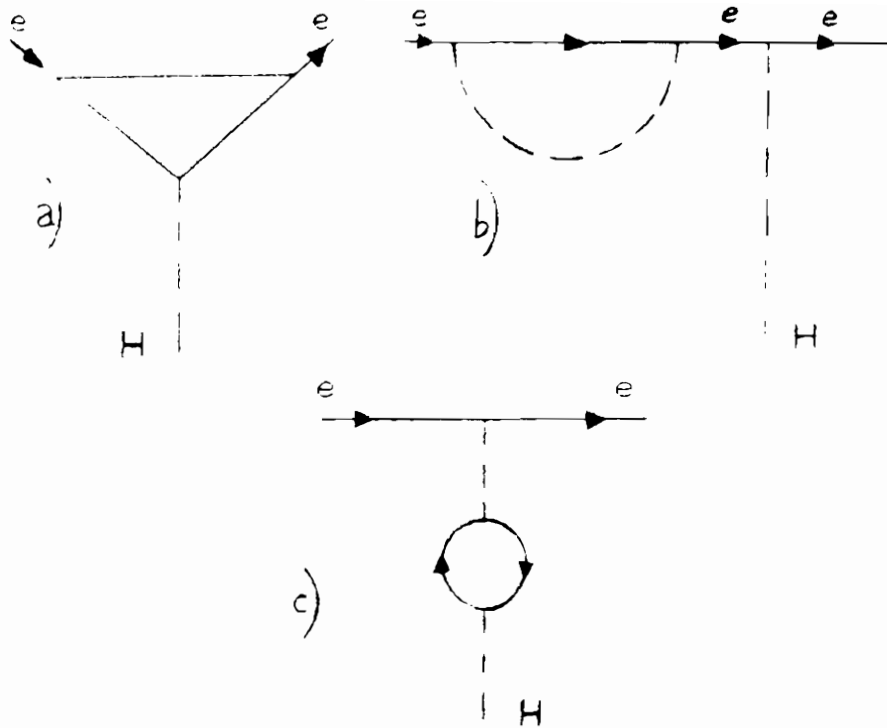
Tuttavia, sommando tutti i contributi, risulta che i termini

gauge dipendenti si cancellano e i rimanenti sono proporzionali alla stessa espressione presente nella self-energia dell'elettrone.

In questo modo, richiedendo l'annullamento delle divergenze quadratiche si ottiene un'importante relazione (cfr. (3.1)) che lega le masse del quark top e del bosone di Higgs. Usando la regolarizzazione dimensionale, invece, il problema delle divergenze quadratiche non si incontra, poiché i termini proporzionali a  $\frac{1}{\delta^2}$  si manifestano come singolarità polari in due dimensioni. Tuttavia la presenza di tali termini comporterebbe la dipendenza delle osservabili dal parametro  $n$  (numero delle dimensioni dello spazio tempo). Nel tentativo di superare il problema, Veltman <sup>[3]</sup>, con considerazioni di Supersimmetria <sup>[9]</sup> ricavò la relazione (3.1) azzerando il residuo del polo in due dimensioni. Il vantaggio di usare la regolarizzazione di point splitting è che si ricava la stessa relazione senza uscire dal Modello Standard.

### 3.3. Seconda relazione di massa dalle correzioni di vertice

Come detto nel paragrafo precedente, utilizzando la regolarizzazione di point-splitting si possono annullare le divergenze quadratiche e rendere automaticamente finita la self-massa dell'elettrone (con le correzioni radiative anche i termini di massa ricevono un contributo, che normalmente è divergente logaritmicamente). Questo permette di considerare le divergenze logaritmiche delle correzioni di vertice. Consideriamo in particolare le correzioni a un loop al vertice  $eeH$ . Indipendentemente dalla procedura di regolarizzazione adottata, le divergenze sono soltanto di tipo logaritmico ( $\ln|\delta|$  con la regolarizzazione di point-splitting e  $\frac{1}{4-n}$  con la regolarizzazione dimensionale). Inoltre, tenendo conto che i vertici peculiari della regolarizzazione di point-splitting danno almeno un fattore  $\delta$ , i loro contributi alle correzioni di vertice sono nulli nel limite  $\delta \rightarrow 0$ . Isolando i diagrammi che contengono le divergenze, possiamo raggrupparli nel seguente modo: tredici diagrammi del tipo indicato in fig. 8a, dodici del tipo indicato in fig. 8b e quattordici del tipo indicato in fig. 8c.



**Fig. 8:** Correzioni di vertice che danno origine alle divergenze logaritmiche.

La somma dei contributi divergenti di tutti questi diagrammi risulta essere gauge invariante. Si può quindi richiedere l'annullamento del coefficiente di  $\ln |\delta|$  ottenendo la seguente relazione:

$$\begin{aligned}
 & m_e^2 + m_\mu^2 + m_\tau^2 + 3(m_u^2 + m_d^2 + m_c^2 + m_s^2 + m_t^2 + m_b^2) \\
 & = \frac{15}{2} M_Z^2 + 3M_W^2 + \frac{3}{2} m_e^2.
 \end{aligned}$$

Considerando il vertice  $\mu\mu H$ , non si ottiene la stessa relazione poiché nel secondo membro compare  $m_\mu$  al posto di  $m_e$ . Tuttavia, se teniamo conto della grandezza delle masse dei leptoni rispetto alle masse dei bosoni vettoriali  $W^\pm$  e  $Z^0$ , possiamo trascurare i

termini leptonici leggeri e utilizzare la relazione generale

$$\begin{aligned} m_\tau^2 + 3(m_u^2 + m_d^2 + m_c^2 + m_s^2 + m_t^2 + m_b^2) \\ \simeq \frac{15}{2}M_Z^2 + 3M_W^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Essendo  $m_t$  l'unica incognita di questa equazione, si trova:

$$\begin{aligned} m_t = \left[ \frac{5}{2}M_Z^2 - M_W^2 - \frac{1}{3}(m_\tau^2) \right. \\ \left. - (m_u^2 + m_d^2 + m_c^2 + m_s^2 + m_b^2) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

La massa dell'Higgs si ricava sostituendo la (3.3) nella (3.1). Dai valori delle masse dei bosoni vettoriali risultano i seguenti valori di  $m_t$  e  $m_H$ :

$$m_t = 120 \text{ GeV}, \quad (3.4)$$

$$m_H = 190 \text{ GeV}. \quad (3.5)$$

Un bosone di Higgs con questa massa avrebbe una larghezza  $\Gamma_H = 1 \text{ GeV}$  e decadrebbe prevalentemente in  $W^+W^-$ ,  $Z^0Z^0$  e  $b\bar{b}$  con i seguenti branching ratios:

$$BR(H \rightarrow W^+W^-) = 77\%,$$

$$BR(H \rightarrow Z^0Z^0) = 22\%,$$

$$BR(H \rightarrow b\bar{b}) = 1\%$$

e sarebbe facilmente rivelabile a LHC e SSC, i futuri grandi acceleratori di particelle.

## Conclusioni

L'aspetto positivo dell'analisi delle divergenze quadratiche nel Modello Standard mediante la regolarizzazione di point splitting consiste nel fatto che si può dare una predizione per la massa del quark top e del bosone di Higgs senza la necessità di estendere il Modello Standard mediante una teoria più generale. Tuttavia tale risultato è basato su un calcolo perturbativo a un loop e, per il momento, non è chiaro cosa si ottiene andando al secondo ordine dello sviluppo perturbativo. In ogni caso è sorprendente l'accordo che si nota tra il valore (3.4) della massa del quark top e i valori (2.1) e (2.2), ottenuti eseguendo dei best fit con i dati sperimentali attualmente disponibili.

## Bibliografia

- [1] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **B22** (1961) 579;  
S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264;  
A. Salam, Proc. *8th Nobel Symposium*, p. 367, Stoccolma 1968, N. Svartholm ed.;  
S. L. Glashow, J. Illiopoulos e L. Maiani, Phys. Rev. **D2** (1970) 1285.
- [2] G. Montagna, *La ricerca del bosone di Higgs ai futuri acceleratori*, Scientifica Acta (Quaderni del Dottorato), Vol. 7, n. 1, p. 57.
- [3] M. Veltman, Acta Physica Polonica **B12** (1981) 437.
- [4] M. Consoli, W. Hollik e F. Jergelehner in *Z Physics at LEP 1* CERN 89-08 (1989) Vol. 1 p. 8 G. Altarelli, R. Kleiss e C. Verzegnassi Editori.
- [5] The LEP Collaborations: ALEPH, DELPHI, L3 and OPAL, *Electroweak Parameters of the Z Resonance and the Standard Model*, Phys. Lett. **B276** (1992) 247;  
The LEP Electroweak Working Group, *Parameters of the Z<sup>0</sup>*

- resonance from combined preliminary data of the LEP experiments*, submitted to the Dallas Conference, August 1992;
- G. Montagna, O. Nicrosini and G. Passarino, *Standard Model Parameters From a Global Fit to LEP Data*, Phys. Lett. **B303** (1993) 170;
- L. Rolandi, *Precision Tests of the Electroweak Interactions*, Talk given at them XXVI ICHEP 1992, Dallas, USA, CERN-PPE/92-175;
- M. Pepe Altarelli, *Tests of the Electroweak Theory at LEP*, Talk given at the Workshop on Results and Perspective in Particle Physics, March 7-13 1993, La Thuile, LNF-93/019(P), May 1993;
- O. Nicrosini, F. Piccinini, G. Passarino, *Tests of the Standard Model and definition of errors at LEP*, Pavia e Torino preprint FNT/T-93/21, DFTT/G-93-6;
- C. de Clercq, *Z<sup>0</sup> lineshape and leptonic forward-backward asymmetries at LEP* Bruxelles preprint IIHE-93-03.
- [6] C. G. Bollini e J. J. Giambiagi, Phys. Lett. **B40** (1972) 566;  
 G. 't-Hooft e M. Veltman, Nucl. Phys. **B44** (1972) 189;  
 J. Ashmore, Nuovo Cim. Lett. **4** (1972) 289;  
 G. M. Cicuta e E. Montaldi, Nuovo Cim. Lett. **4** (1972) 329;  
 P. Breitenlohner e D. Maison, Comm. Math. Phys. **52** (1977) 11, 39, 55.
- [7] P. Osland e T. T. Wu, Phys. Lett. **B291**, 315 (1992);  
 CERN Reports CERN-TH.6385/92, CERN-TH.6386/92, CERN-TH.6387/92.
- [8] P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Phil. Soc. **30** (1934) 150;  
 R. Peierls, Proc. Roy. Soc., Serie **A 146** (1934) 420.  
 J. Schwinger, Phys. Rev. **82** (1951) 664;  
 K. Johnson, in *Lectures on Particles and Field Theory*, Lectures at Brandeis University 1964, ed. S. Deser e K. W. Ford, vol. 2 (Prentice-Hall, Inc., 1965) p.1.
- [9] Yu. A. Gol'fand and E. P. Likhtman, JETP Lett. **13** (1971) 323;  
 D. V. Volkov and V. P. Akulov, JETP Lett. **16** (1972) 438;  
 J. Wess and B. Zumino, Nucl. Phys. **B70** (1974) 39.



**Luisa Laboranti**

**Dipartimento di Fisica "A. Volta"  
Università di Pavia**

**DIELETTROFORESI:  
LEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO**

**Seminario tenuto il 1° dicembre 1992**

## Introduzione

La *dielettroforesi* è il moto traslatorio di materia elettricamente neutra, in un campo elettrico non uniforme; essa si distingue dalla più nota *elettroforesi* che è invece il moto di cariche libere provocato da un generico campo elettrico.

Per analizzare la natura dell'azione del campo non uniforme sulla materia neutra, è utile paragonare le risposte di corpi carichi e neutri sia in campo uniforme che in campo non uniforme, seguendo le illustrazioni di Fig. 1 (a) ed 1 (b).

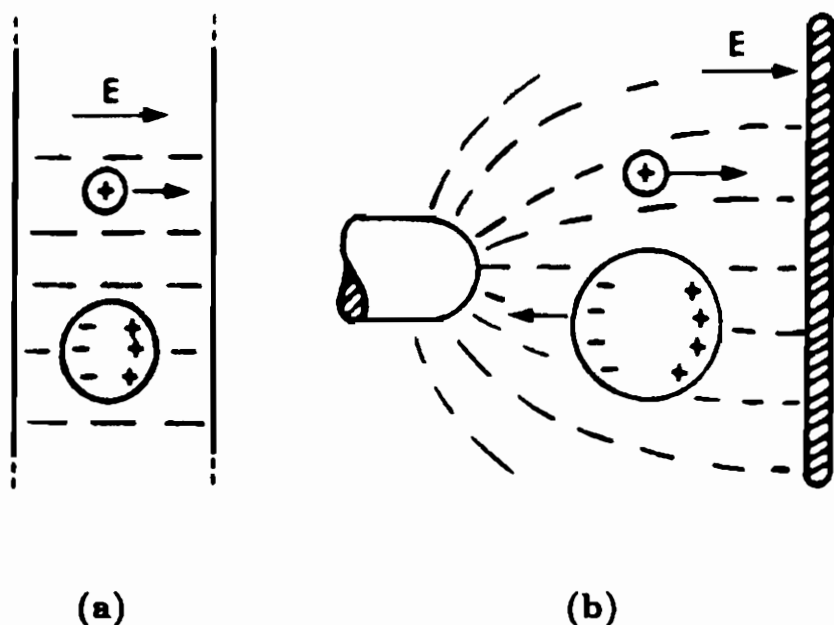


Fig. 1 Effetti del campo elettrico uniforme (a) e non uniforme (b), su particelle cariche e neutre.

Una particella carica posta in un campo elettrico uniforme (Fig. 1 (a)) si muove nella direzione delle linee di campo in senso equiverso o contrario al campo stesso, secondo il segno positivo o

negativo della carica. Lo stesso accade per cariche elettriche libere in un campo elettrico non uniforme (Fig. 1 (b)).

Un corpo elettricamente neutro posto in un campo elettrico  $\mathbf{E}$  si polarizza, cioè su di esso viene indotto un momento di dipolo  $\mathbf{p}$  diretto come il campo e ad esso controverso. L'energia potenziale di un dipolo in campo elettrico è  $U = -\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}$ . Se il campo elettrico è uniforme, ogni punto dello spazio è equivalente al fine dell'equilibrio per il dipolo. La particella polarizzata rimane così ferma, o eventualmente, nel caso ad esempio di un corpo anisotropo ed allungato, è sottoposta a un moto torsionale per effetto di una coppia di momento  $\mathbf{T} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}$ , ma non ad una netta forza di traslazione. Se il campo è non uniforme, invece, la particella neutra polarizzata è spinta nel senso delle linee di campo verso i punti di minima energia potenziale e quindi verso le regioni in cui il campo elettrico è più intenso.

Si può osservare che il verso del moto della particella elettricamente neutra non cambia se si inverte la direzione del campo elettrico, mentre cambia il verso del moto delle particelle cariche. Pertanto, se agli elettrodi si applica una differenza di potenziale alternata l'effetto prodotto su corpi elettricamente neutri è lo stesso che si ha per campi statici, mentre su particelle cariche si produce, almeno in prima approssimazione, un moto oscillatorio attorno alla loro posizione iniziale.

### La forza dielettroforetica

Nel calcolo delle forze e delle coppie esercitate su particelle dielettriche da un campo elettrico non uniforme si incontrano, in generale, parecchie difficoltà, in modo particolare se il mezzo dielettrico è dispersivo. Lo studio accurato di tale problema può essere affrontato, ad esempio, applicando il metodo del tensore degli sforzi di Maxwell. Nel caso particolare di una sfera dielettrica immersa in un fluido isolante e soggetta al campo elettrico non uniforme generato da una carica puntiforme, tale metodo conduce ad una espressione per la forza dielettroforetica<sup>[1]</sup> costituita

dalla somma di tutti i contributi dovuti all'interazione tra il campo elettrico esterno non uniforme con i multipoli di ogni ordine indotti.

Tuttavia, sulla base di alcune assunzioni semplificatrici si può determinare in modo più immediato la forza dielettroforetica esercitata da un campo elettrico non uniforme su un dielettrico ideale, senza ricorrere al metodo del tensore degli sforzi di Maxwell.

Si consideri un corpo neutro isotropo ed omogeneo, linearmente polarizzabile e di dimensioni piccole rispetto alla scala di non uniformità del campo esterno; esso risponde alla sollecitazione prodotta dal campo elettrico esterno  $\mathbf{E}$  polarizzandosi. Se si trascurano momenti multipolari di ordine superiore, alla particella può essere associato un momento di dipolo elettrico così espresso:

$$\mathbf{p} = \alpha v \mathbf{E} \quad (1)$$

dove  $v$  e  $\alpha$  sono rispettivamente il volume e la polarizzabilità (scalare), o momento di dipolo per unità di volume e di campo, del corpo in considerazione. La forza netta agente sulla particella così polarizzata è data dalla somma delle forze agenti sulle due estremità cariche di segno opposto. Per essa si può, dunque, scrivere:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_+ + \mathbf{F}_- = ql_x \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x} \quad (2)$$

dove si è indicato con  $l_x$  la distanza tra le due estremità della particella cariche di segno opposto con carica  $q$ , nell'ipotesi in cui  $l_x$  sia sufficientemente piccolo,  $\mathbf{E}$  sia diretto lungo la direzione  $x$  ed il mezzo sia isotropo.

Nel caso più generale in cui la direzione del campo elettrico sia del tutto arbitraria, si ha:

$$\mathbf{F} = q(l_x \frac{\partial}{\partial x} + l_y \frac{\partial}{\partial y} + l_z \frac{\partial}{\partial z}) \mathbf{E} = (\mathbf{p} \cdot \nabla) \mathbf{E}. \quad (3)$$

Con opportune trasformazioni vettoriali dell'operatore  $(\mathbf{p} \cdot \nabla)$  ed esprimendo  $\mathbf{p}$  in funzione del campo elettrico tramite la (1), la forza dielettroforetica agente sul corpo assume la forma:

$$\mathbf{F} = \frac{1}{2} \alpha v \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (4)$$

Nel caso in cui la particella da polarizzare sia anisotropa la polarizzabilità  $\alpha$  diventa una quantità tensoriale ed i calcoli, in tal caso, si complicano notevolmente.

Il risultato presentato nella (4) si può riassumere notando che la forza è direttamente proporzionale alla polarizzabilità del mezzo, al suo volume e dipende dal quadrato dell'intensità del campo elettrico. Quest'ultima considerazione è a riprova del fatto che la forza dielettroforetica non dipende dalla direzione del campo e che quindi si manifesta con stessa direzione e verso anche in campo alternato.

Si consideri il caso particolarmente semplice di un corpo omogeneo ed isotropo di forma sferica. Come dimostrato in testi classici di elettrostatica<sup>[2,3]</sup> il momento di dipolo indotto di una sfera polarizzabile, di raggio  $a$ , e di permittività dielettrica  $\epsilon_2$ , immersa in un mezzo infinito di permittività  $\epsilon_1$  ed in un campo elettrico  $\mathbf{E}$ , è dato da:

$$\mathbf{p} = 4\pi a^3 \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \mathbf{E} = \alpha v \mathbf{E} \quad (5)$$

da cui segue che

$$\alpha = 3\epsilon_0 \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1}. \quad (6)$$

Introducendo dunque la polarizzabilità  $\alpha$  così definita nella (4) l'espressione della forza dielettroforetica assume la forma

$$\mathbf{F} = 2\pi a^3 \epsilon_0 \epsilon_1 \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_2 + 2\epsilon_1} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (7)$$

A questa espressione ci si riconduce facilmente a partire dalla forma completa, ottenuta col metodo del tensore degli sforzi di Maxwell<sup>[1]</sup>, troncando al primo ordine la serie dei termini multipolari di cui il secondo membro della (7) rappresenta il termine di interazione tra dipolo elettrico indotto e campo non uniforme.

Se si fa uso di campi alternati bisogna, però, prestare attenzione al fatto che la permittività della particella e quella del fluido in cui essa si trova immersa vengono a dipendere in modo più o meno sensibile dalla frequenza del campo applicato. In

questo caso la formula (7) per la forza dielettroforetica è ancora sostanzialmente valida, purché sia modificata nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re} \left\{ \hat{\epsilon}_1 \frac{\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_1}{\hat{\epsilon}_2 + 2\hat{\epsilon}_1} \right\} \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (8)$$

dove al posto delle permittività reali che comparivano nella (7) ci sono ora le permittività complesse così definite  $\hat{\epsilon}_k(\omega) = \epsilon'_k(\omega) - i\epsilon''_k(\omega)$ . Poiché i mezzi considerati presentano in genere una conducibilità  $\sigma_k(\omega)$ , si usa definire la parte immaginaria della permittività dielettrica come  $\epsilon''_k(\omega) = \sigma_k(\omega)/\omega$ .

### Applicazioni della dielettroforesi

Già nella espressione (4) della forza dielettroforetica sono implicitamente contenuti i limiti di osservabilità degli effetti da essa derivabili. Infatti, per avere una forza di intensità tale da prevalere su altri effetti che tipicamente si manifestano nei sistemi studiati (come ad esempio l'attrito viscoso, le interazioni molecolari, la diffusione ecc.), occorre innanzitutto che il volume della particella in esame sia superiore a un determinato valore minimo, mentre l'intensità del campo elettrico applicato deve essere sufficientemente elevata per provocare effetti dinamici, ma inferiore al limite di rottura elettrico dei sistemi in esame.

Il primo requisito limita l'applicazione di tecniche dielettroforetiche ad agglomerati di molecole, particelle e corpuscoli. Ad esempio, per contrastare con la forza dielettroforetica l'effetto di disordine provocato dal moto browniano delle molecole in una sospensione, si può valutare<sup>[4]</sup> che le particelle in essa contenute debbano avere una dimensione radiale almeno dell'ordine di 4000–6000 Å. Le applicazioni della dielettroforesi a livello molecolare sono dunque limitate a particolari polimeri e macromolecole, mentre non esistono limitazioni per la dielettroforesi di cellule le cui dimensioni sono in genere superiori al micron.

Gli effetti prodotti dalla forza dielettroforetica trovano impiego in applicazioni di vario genere. Sfruttando tali effetti si può,

ad esempio, attirare polveri di inchiostro sulle immagini ottenute nei processi xerografici, pompare liquidi e polveri, raffreddare superfici e persino produrre una gravità artificiale che può essere utile in sistemi aerospaziali che operano in assenza di gravità. La dielettroforesi viene soprattutto impiegata nel campo della chimica in tecniche di separazione, raccolta ed analisi di sostanze in forma di corpuscoli, polveri e macromolecole, come tecnica complementare ad altri processi quali la filtrazione, la centrifugazione, l'elettroforesi e nel campo delle tecnologie industriali per fare precipitare polveri e ceneri dai fumi di forni ed inceneritori. In tempi più recenti essa sta riscuotendo particolare successo nello sviluppo di tecniche di indagine di proprietà dielettriche di materiali biologici<sup>[5-8]</sup>.

Il crescente interesse per la dielettroforesi in tale campo di ricerca va senz'altro messo in relazione con il fatto che si è osservato che le proprietà bioelettriche delle membrane di cellule tumorali differiscono da quelle di cellule normali. Già intorno agli anni '20 Fricke e Morse<sup>[9]</sup> avevano osservato che la costante dielettrica di campioni di materiale biologico affetto da tumore era in relazione pressoché costante con la natura maligna del tumore. Questa relazione suggeriva, dunque, che la misura della costante dielettrica di cellule tumorali forniva un utile metodo per diagnosi biomediche. Stranamente questa scoperta non fu, apparentemente, né studiata né verificata fino a tempi più recenti.

Il metodo più diffuso per studiare le proprietà dielettriche delle cellule biologiche consiste nel preparare una sospensione di tali particelle in un liquido di note proprietà, inserirla in un'apposita cella capacitiva ed effettuare misure dielettriche mediante le usuali tecniche di impedenza. Dai risultati di tali misure le proprietà dielettriche delle cellule esaminate vengono quindi dedotte invocando le appropriate formule per le miscele. Sebbene questa tecnica fornisca soddisfacenti risultati, ad esempio per quanto riguarda la misura della capacità delle membrane cellulari, essa non è, tuttavia, sufficientemente sensibile per fornire anche una adeguata misura della conduttanza delle stesse membrane. Inoltre, poiché le misure vengono effettuate su sospensioni contenenti un gran numero di cellule, le proprietà dielettriche che ne derivano sono in effetti dei valori medi su tutta la popolazione di cellule. In

questi ultimi anni<sup>[10-13]</sup> è stato messo a punto un nuovo metodo di indagine delle proprietà elettriche di cellule biologiche, intatte ed isolate, basato sul principio della levitazione dielettroforetica. Questo metodo consente lo studio delle proprietà dielettriche al variare della frequenza in un intervallo che va da 100 Hz a 50 MHz.

### La levitazione dielettroforetica

Nel caso di particelle sferiche di raggio  $a$  e permittività complessa  $\hat{\epsilon}_2$ , immerse in un mezzo di permittività complessa  $\hat{\epsilon}_1$  la forza dielettroforetica è data dalla (8) che per comodità riscriviamo nel modo seguente:

$$\mathbf{F} = 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] \nabla |\mathbf{E}|^2. \quad (9)$$

dove  $\mathbf{E}$  è il campo elettrico esterno e  $K$  è il coefficiente di polarizzazione legato ad  $\hat{\epsilon}_1$  e ad  $\hat{\epsilon}_2$  dalla relazione seguente:

$$K = \hat{\epsilon}_1 \frac{\hat{\epsilon}_2 - \hat{\epsilon}_1}{\hat{\epsilon}_2 + 2\hat{\epsilon}_1}. \quad (10)$$

Tramite  $\hat{\epsilon}_1$  ed  $\hat{\epsilon}_2$ ,  $K$  è dunque funzione della frequenza del campo elettrico applicato. Al variare della frequenza  $K$  può cambiare segno e con questo anche il verso della forza dielettroforetica cambia.

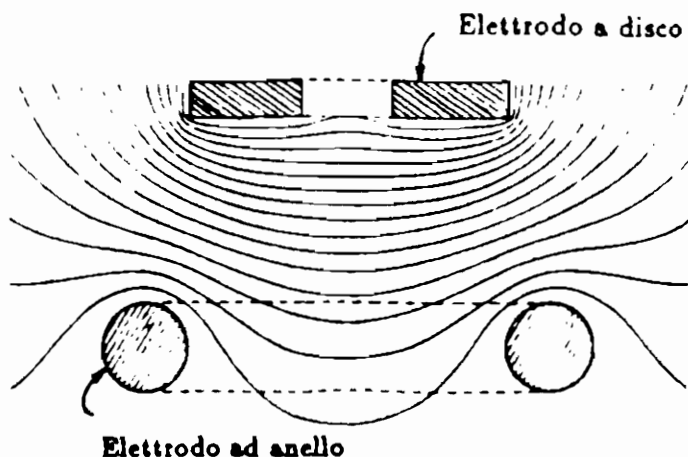
Una particella in sospensione in un liquido e sottoposta ad un campo elettrico non uniforme, può esibire una forza dielettroforetica attrattiva, diretta cioè verso i punti di maggior intensità del campo elettrico, se  $\operatorname{Re}[K] > 0$  (forza dielettroforetica positiva), o repulsiva se  $\operatorname{Re}[K] < 0$  (forza dielettroforetica negativa).

La levitazione dielettroforetica su particelle isolate offre l'opportunità di studiare la risposta di polarizzazione di ogni singola cellula. Questa tecnica si basa sull'equilibrio raggiunto tra forza gravitazionale, attrito viscoso e forza dielettroforetica, in modo



che la particella risulti stabilmente sospesa in una posizione di equilibrio all'interno del fluido di proprietà note.

Per levitare stabilmente una particella che esibisca una forza dielettroforetica negativa ( $Re[K] < 0$ ) è necessario che l'intensità del campo presenti un minimo isolato lontano dagli elettrodi<sup>[14]</sup>. Tale situazione si può facilmente verificare nel caso di un campo elettrico a simmetria assiale come quello generato da elettrodi del tipo presentato in Fig. 2. In questo modo si realizza comunemente la levitazione spontanea (passiva) di particelle, gocce o bolle che si portano in posizioni di equilibrio stabile lontano dagli elettrodi.



*Fig. 2 Sistema di elettrodi a simmetria assiale che generano un campo elettrico con minimi di intensità localizzati in punti dell'asse di simmetria e lontani dagli elettrodi, adatto a levitazione spontanea di particelle nel caso di forza dielettroforetica negativa.*

Nel caso invece di forza dielettroforetica positiva ( $Re[K] > 0$ ) per consentire la levitazione passiva di una particella è richiesta l'esistenza di un punto di massimo isolato nell'intensità del campo elettrico, ma si può dimostrare<sup>[14]</sup> che, per campi elettrici irrotazionali e a divergenza nulla tali massimi non esistono in punti che non appartengano agli elettrodi stessi.

Poiché molte cellule biologiche esibiscono dielettroforesi positiva a frequenze di interesse biofisico, la levitazione passiva ha solo limitate applicazioni possibili. D'altra parte è possibile ottenere una levitazione stabile anche per particelle con dielettroforesi positiva ricorrendo ad un controllo reazionato e dinamico della posizione di sospensione modificando opportunamente ed in tempo reale il potenziale degli elettrodi che generano il campo elettrico. Le condizioni richieste per una levitazione stabile di una particella soggetta a forza dielettroforetica positiva, in un campo elettrico a simmetria assiale, sono soddisfatte quando la particella, posizionata in un punto dell'asse di simmetria del campo, è in condizioni di stabilità per movimenti assiali e radiali. La stabilità radiale è raggiungibile usando un campo elettrico focalizzato, come quello generato da elettrodi del tipo presentati in Fig. 3, con intensità che decresce allontanandosi dall'asse. La stabilità assiale si raggiunge invece modificando al tempo opportuno il potenziale degli elettrodi, nel modo che verrà illustrato nel seguito.

### Condizioni di equilibrio e stabilità

L'equazione di moto di una particella sita in prossimità dell'asse di un campo elettrico a simmetria assiale è

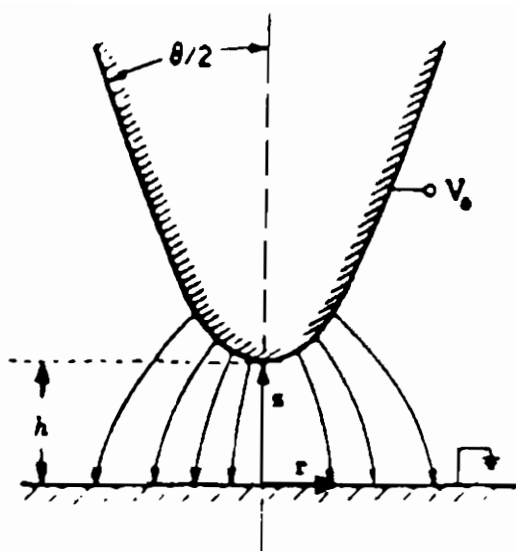
$$m_{\text{eff}} \frac{dv}{dt} = m_g g - b v + F_{\text{DEP}}. \quad (11)$$

Il primo termine rappresenta la forza peso agente sulla particella in direzione verticale nel quale si è tenuto conto anche della spinta idrostatica di Archimede. La massa  $m_g$  è infatti definita nel modo seguente:

$$m_g = \frac{4\pi}{3} a^3 (\gamma_2 - \gamma_1) \quad (12)$$

in cui  $\gamma_2$  e  $\gamma_1$  sono rispettivamente la densità della particella e quella del liquido di sospensione.

Il secondo termine è la forza viscosa che si assume per semplicità proporzionale alla velocità e con coefficiente di attrito  $b$  valutabile,



*Fig. 3 Sistema di elettrodi a simmetria assiale che generano un campo elettrico focalizzato adatto alla levitazione dielettroforetica a controllo reazionato nel caso di forza dielettroforetica positiva.*

nel caso di particelle sferiche immerse in un mezzo di viscosità  $\eta_1$ , tramite la legge di Stokes

$$b = 6\pi\eta_1 a. \quad (13)$$

L'ultimo termine a secondo membro è la forza dielettroforetica così come è stata definita nella (1).

Va osservato che è opportuno usare un valore effettivo  $m_{eff}$  della massa nell'equazione dinamica poiché la particella sposta una massa fluida che non può in genere essere ignorata quando la particella accelera o decelera. In generale tale massa viene valutata nei termini seguenti<sup>[15]</sup>:

$$m_{eff} = \frac{4\pi}{3} a^3 \left( \gamma_2 + \frac{\gamma_1}{2} \right). \quad (14)$$

Per la particolare simmetria del campo elettrico, scegliamo un sistema di riferimento a simmetria assiale  $(r, z)$ , dove  $r$  indica la coordinata radiale e  $z$  quella assiale, ed assumiamo che ad un certo istante la particella si trovi in un punto di coordinate  $(0, z_0)$  dell'asse del sistema. Consideriamo piccoli spostamenti da tale posizione:

$$z(t) = z_0 + z'(t), \quad (15)$$

$$r(t) = r'(t). \quad (16)$$

Usiamo per il campo elettrico a simmetria assiale lo sviluppo in serie di Holmes<sup>[16]</sup>, per cui le componenti assiali e radiali del campo intorno alla posizione di equilibrio sono rispettivamente:

$$E_z \simeq V_0 \left[ \alpha_0 + \alpha_1 z' + \alpha_2 \left( z'^2 - \frac{r'^2}{2} \right) \right], \quad (17)$$

$$E_r \simeq V_0 \left[ -\alpha_1 \frac{r'}{2} - \alpha_2 r' z' \right], \quad (18)$$

dove  $V_0$  è la differenza di potenziale tra gli elettrodi ed i coefficienti dello sviluppo sono definiti dalla relazione seguente:

$$\alpha_n(z_0) = \frac{1}{V_0 n!} \left. \frac{\partial^n E_z}{\partial z^n} \right|_{r=0, z=z_0}. \quad (19)$$

Possiamo valutare la forza dielettroforetica calcolando il gradiente dell'intensità di campo elettrico  $E^2 = E_z^2 + E_r^2$ , usando per l'operatore gradiente nel sistema di riferimento assiale l'espressione:

$$\nabla = \hat{z} \frac{\partial}{\partial z} + \hat{r} \frac{\partial}{\partial r} \quad (20)$$

in cui  $\hat{z}$  e  $\hat{r}$  indicano i versori di riferimento lungo l'asse  $z$  e  $r$  rispettivamente.

Al primo ordine perturbativo in  $z'$  e  $r'$  l'equazione di moto si scrive dunque:

$$\begin{aligned} m_{\text{eff}} (\ddot{z}' \hat{z} + \ddot{r}' \hat{r}) = & -m_g g \hat{z} - b (\dot{z}' \hat{z} + \dot{r}' \hat{r}) + \\ & + 2\pi a^3 \epsilon_0 \text{Re}[K] V_0^2 \left[ (2\alpha_1^2 + 4\alpha_0 \alpha_2) z' + 2\alpha_0 \alpha_1 \right] \hat{z} + \\ & + 2\pi a^3 \epsilon_0 \text{Re}[K] V_0^2 \left[ \frac{\alpha_1^2}{2} - 2\alpha_0 \alpha_2 \right] r' \hat{r}. \end{aligned} \quad (21)$$

L'equazione di moto fornisce innanzitutto la condizione di equilibrio. Per  $\ddot{z}' = \dot{z}' = \ddot{r}' = \dot{r}' = 0$  si ha infatti:

$$m_g g = 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] V_0^2 (2\alpha_0 \alpha_1). \quad (22)$$

Sulla base di questa condizione l'equazione al primo ordine può essere scomposta in una componente radiale

$$m_{\text{eff}} \ddot{r}' + b \dot{r}' - 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] V_0^2 \left( \frac{\alpha_1^2}{2} - 2\alpha_0 \alpha_2 \right) r' = 0, \quad (23)$$

ed in una assiale

$$m_{\text{eff}} \ddot{z}' + b \dot{z}' - 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] V_0^2 (2\alpha_1^2 + 4\alpha_0 \alpha_2) z' = 0. \quad (24)$$

Nel caso di forza dielettroforetica positiva,  $\operatorname{Re}[K] > 0$ , la stabilità dell'equilibrio radiale è assicurata dalla condizione

$$\frac{\alpha_1^2}{2} - 2\alpha_0 \alpha_2 < 0. \quad (25)$$

Il verificarsi di questa condizione, però, impedisce implicitamente la stabilità assiale dell'equilibrio. Infatti, la (25) impone necessariamente che  $\alpha_0 \alpha_2$  sia positivo e quindi il coefficiente del termine in  $z'$  della (24) viene ad essere sicuramente negativo.

Per fare in modo che anche l'equilibrio assiale sia raggiungibile si assume un potenziale che abbia oltre alla componente costante  $V_0$  anche un piccolo contributo dipendente dallo spostamento rispetto alla posizione di equilibrio prescelta e quindi dal tempo:

$$V(t) = V_0 + v'(t) \quad (26)$$

con

$$v'(t) = -GV_0 z'(t) \quad (27)$$

dove la costante  $G$  è detta fattore di guadagno. In questo modo solo l'equazione di moto lungo l'asse viene modificata al primo ordine in  $z'$ , cosicché al posto della (24) si ha:

$$\begin{aligned} m_{\text{eff}} \ddot{z}' + b \dot{z}' - 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] V_0^2 (2\alpha_1^2 + 4\alpha_0 \alpha_2) z' + \\ - 2\pi a^3 \epsilon_0 \operatorname{Re}[K] 2\alpha_0 \alpha_1 V_0 v' = 0. \end{aligned} \quad (28)$$

Scegliendo opportuni valori di  $G$ , si può ora soddisfare la condizione di stabilità assiale che è fornita dall'equazione seguente:

$$\alpha_1^2 + 2\alpha_0\alpha_2 - 2\alpha_0\alpha_1G < 0. \quad (29)$$

A questo punto è possibile concludere che per particelle che mostrano una forza dielettroforetica positiva,  $Re[K] > 0$ , la levitazione dielettroforetica è possibile (i) quando il gradiente radiale dell'intensità di campo elettrico è negativo e (ii) se il moto verticale è stabilizzato da un sistema di controllo a reazione che possa stimare gli spostamenti verticali della posizione di equilibrio prescelta ed applichi un opportuno segnale correttivo al potenziale degli elettrodi. Un sistema di elettrodi che fornisce il gradiente radiale richiesto è proprio quello presentato in Fig. 3.

L'elettrodo inferiore è piano, posto orizzontalmente e messo a terra. L'elettrodo superiore è conico con un angolo di apertura  $\theta$  e vertice che dista  $h$  dall'elettrodo inferiore. La superficie conica di questo elettrodo coincide con una delle superfici equipotenziali che si generano a partire da una distribuzione di carica lineare, semi infinita e di densità costante, posta lungo l'asse perpendicolarmente all'elettrodo inferiore a distanza  $h_0$ , come illustrato in Fig. 4.

Le superfici equipotenziali generate da una tale distribuzione di carica sono iperboliche con il vertice posto a quota  $h$  rispetto all'elettrodo inferiore, legata all'angolo di apertura ed alla distanza  $h_0$  dalla relazione:

$$h = h_0 \cos \frac{\theta}{2}. \quad (30)$$

L'elettrostatica di tale sistema è relativamente semplice e consente di determinare le espressioni analitiche del potenziale e del campo elettrico in punti prossimi all'asse. In particolare, nei punti dell'asse, il potenziale generato dall'elettrodo conico tenuto ad un potenziale  $V_0$ , costante rispetto a terra, ha la seguente forma:

$$V(z) = V_0 \frac{\ln \left( \frac{h+z \cos \theta/2}{h-z \cos \theta/2} \right)}{\ln \left( \frac{1+\cos \theta/2}{1-\cos \theta/2} \right)} \quad (31)$$

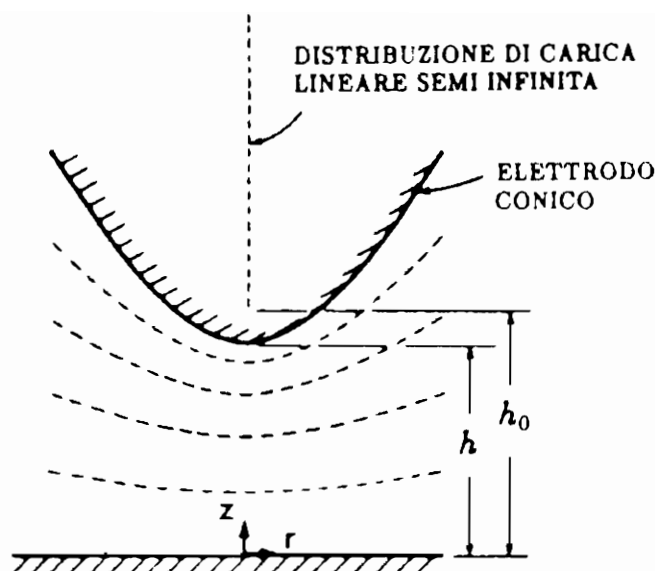


Fig. 4 Distribuzione lineare semi infinita di carica che genera superfici equipotenziali iperboliche.

La componente assiale del campo elettrico è invece:

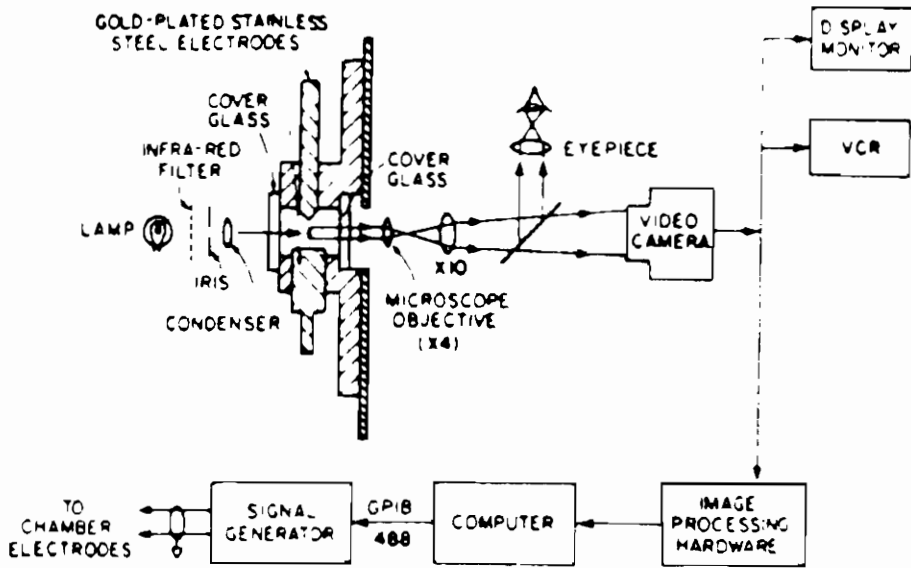
$$E_z = \frac{-2V_0}{\ln \left( \frac{1+\cos \theta/2}{1-\cos \theta/2} \right)} \frac{h \cos \theta/2}{h^2 - z^2 \cos^2 \theta/2}. \quad (32)$$

A partire da quest'ultima espressione, calcolando i coefficienti  $\alpha_0$ ,  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  dello sviluppo di Holmes per il campo elettrico in simmetria assiale, secondo la definizione data dalla (19), si verifica immediatamente che la condizione (25), che assicura la stabilità radiale dell'equilibrio in un punto dell'asse di simmetria, è soddisfatta per un siffatto sistema di elettrodi.

### La levitazione a controllo reazionato

In Fig. 5 è mostrato schematicamente l'apparato sperimentale usato da Jones e Kaler<sup>[11]</sup> in un tipico esperimento di levitazione dielettroforetica. Le particelle sono levitate lungo l'asse

tra i due elettrodi. Un fascio collimato di luce illumina la particella ed un'immagine reale viene focalizzata su un dispositivo a 128 fotodiodi disposti lungo un segmento verticale. Questo sensore permette di rivelare la posizione della particella lungo l'asse verticale.



*Fig. 5 Schema di apparato sperimentale impiegato da Jones e Kaler<sup>[11]</sup> in esperimenti di levitazione dielettroforetica a controllo reazionato.*

La particella da levitare viene iniettata all'interno della cella di levitazione attraverso un piccolo foro sito nell'elettrodo inferiore in prossimità dell'asse del sistema. Il campo elettrico non uniforme attrae la particella verso l'elettrodo superiore. Il sistema di controllo a reazione si attiva azzerando il potenziale all'elettrodo superiore. In assenza di campo elettrico la particella si stacca dall'elettrodo superiore e ricade verso l'elettrodo inferiore, frena-



ta solamente dalla forza di attrito viscoso del liquido che riempie la cella di levitazione. La sua posizione viene ora rilevata dal sistema ottico. In particolare la posizione del bordo inferiore dell'ombra gettata dalla particella sul sensore a diodi viene codificata in forma digitale e fornita alla porta di ingresso di un calcolatore. Quest'ultimo è programmato con un semplice algoritmo lineare che mette in relazione la posizione della particella con la differenza di potenziale richiesta per rendere stabile la levitazione lungo l'asse. L'algoritmo usato è del tipo

$$N = N_0 + G(z - z_0), \quad (33)$$

anche se, più recentemente<sup>[12]</sup> sono state usate altre formule non molto dissimili da questa che tengono in considerazione le fluttuazioni della particella durante la fase di cattura della stessa.  $N_0$  e  $z_0$  sono stime relative al potenziale ed alla posizione di equilibrio e  $G$  è il fattore di guadagno.  $N_0$ ,  $z_0$  e  $G$  possono essere inseriti nel calcolatore dalla tastiera di controllo anche durante il processo di levitazione, o, eventualmente, essere modificati. Il valore di  $N$  viene convertito dalla forma digitale a quella analogica ed amplificato opportunamente fino ad ottenere la differenza di potenziale,  $V_0 + v'(t)$ , richiesta tra i due elettrodi della cella di levitazione.

Le dimensioni della cella di levitazione sono tali che  $h$  varia da qualche millimetro fino anche ad alcune centinaia di micron; la differenza di potenziale applicata tra gli elettrodi va da qualche decina fino a qualche centinaia di volt, a seconda delle dimensioni della cella, che equivale a campi elettrici dell'ordine di  $10^4 \text{ V m}^{-1}$ , al di sotto, dunque, del limite di rottura elettrica dei sistemi considerati.

Per quanto visto finora, è evidente che, per effettuare misure delle proprietà dielettriche su cellule biologiche facendo uso di levitazione dielettroforetica, ci si deve affidare a due distinti sistemi di levitazione. Per particelle, bolle o gocce, caratterizzate da forza dielettroforetica negativa, si deve usare un sistema di elettrodi che creino un campo a simmetria assiale con dei minimi dell'intensità del campo elettrico localizzati e lontani dagli elettrodi, mentre per particelle soggette a forza dielettroforetica positiva si può ottenere una levitazione stabile solo usando un campo elettrico a simmetria assiale focalizzato ed un controllo a reazione in tempo reale del potenziale degli elettrodi.

In linea di principio si potrebbe far uso di entrambe i metodi di levitazione effettuando due serie successive di misure limitate agli intervalli di frequenza nei quali la forza dielettroforetica è rispettivamente positiva o negativa. Tuttavia un simile procedimento è del tutto inapplicabile per studi su cellule viventi isolate poiché si incontrano notevoli difficoltà nella calibrazione dei due sistemi di misura ed inoltre è meglio evitare un'eccessiva manipolazione delle cellule viventi per i possibili danneggiamenti che si avrebbero durante le procedure di trasporto da una cella di levitazione all'altra.

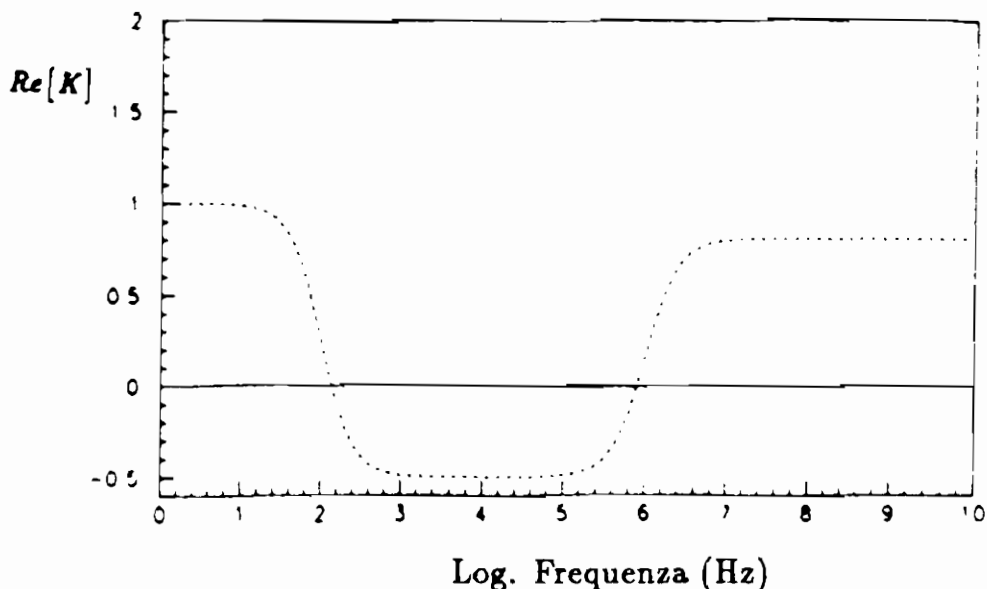
Per superare queste difficoltà ed ottenere lo spettro completo dei dati per cellule individuali, utilizzando un'unica tecnica di levitazione, recenti studi<sup>[13]</sup> hanno mostrato come questo sia possibile, semplicemente modificando la procedura di controllo retroattivo cioè usando la somma di due segnali a due diverse frequenze.

### Controllo retroattivo a doppia frequenza

Se la frequenza di oscillazione del campo elettrico tra i due elettrodi di una cella di levitazione positiva raggiunge un valore tale per cui  $Re[K(\omega)]$  tende a zero, allora, per il verificarsi della condizione di equilibrio espressa dalla (22), il potenziale  $V_0$  dovrebbe crescere illimitatamente. Inoltre, quando  $Re[K(\omega)]$  diventa negativo il sistema di controllo a reazione non riesce più a mantenere la particella in equilibrio stabile sull'asse verticale perché la condizione (25), soddisfatta dal campo a simmetria assiale focalizzato, non garantisce più la stabilità radiale dell'equilibrio.

L'equilibrio può essere ristabilito sovrapponendo al segnale di riferimento a frequenza variabile  $\omega$ , nella regione dello spettro caratterizzato da forza dielettroforetica negativa, un altro segnale a frequenza fissa  $\omega_0$ , scelta nella regione in cui  $Re[K(\omega)] > 0$  e quasi costante al variare della frequenza. Un tipico andamento di  $Re[K(\omega)]$  per cellule biologiche sospese in soluzione acquosa è, infatti, quello descritto in Fig. 6 in cui si osserva una regione alle basse ed alle alte frequenze in cui  $Re[K(\omega)]$  è  $> 0$  e poco variabile

al variare della frequenza ed una regione a frequenze intermedie in cui  $Re[K(\omega)] < 0$ .



*Fig. 6 Andamento tipico del coefficiente  $Re[K]$  in funzione della frequenza.*

Scegliendo di operare con una sovrapposizione di segnali a diversa frequenza la differenza di potenziale tra gli elettrodi avrà la seguente forma:

$$V(t) = V_1 \cos(\omega t + \phi) + V_2 \cos \omega_0 t \quad (34)$$

dove  $\phi$  è una costante di fase arbitraria mentre  $V_1$  e  $V_2$  sono le ampiezze dei segnali applicati.

Il calcolo della forza dielettroforetica effettiva agente sulla particella nel caso di un potenziale a doppia frequenza è complicata dal fatto che essa dipende dal quadrato della differenza di potenziale tra gli elettrodi. Tuttavia si può dimostrare<sup>[13]</sup> che la

forza dielettroforetica media può, con buona approssimazione, essere espressa come somma di due termini ciascuno nella forma dell'equazione (9) e cioè

$$\langle \mathbf{F}_{\text{DEP}} \rangle = \langle \mathbf{F}_{\text{DEP}} \rangle_{\omega_0} + \langle \mathbf{F}_{\text{DEP}} \rangle_{\omega} \quad (35)$$

Questa espressione, in cui le parentesi ad angolo indicano la media temporale, può essere usata nell'analisi dei dati raccolti, purché le misure a ciascuna frequenza vengano effettuate in un tempo sufficientemente lungo assicurandosi così che la particella abbia effettivamente raggiunto l'equilibrio. Se  $\omega_0$  è scelta in modo che  $\omega \ll \omega_0$ , un tempo di 5 s può bastare.

L'applicazione di questo metodo di levitazione a due frequenze richiede innanzitutto una procedura di calibrazione. Questo primo passo si effettua bilanciando la forza gravitazionale nel caso in cui  $\omega = \omega_0$  e prendendo  $V_1 = 0$  e  $V_2 = V_{\text{cal}}$ , cosicché si abbia, in accordo con la (22),

$$\mathbf{F}_g = \langle \mathbf{F}_{\text{DEP}} \rangle \propto \text{Re}[K(\omega_0)] V_{\text{cal}}^2 \quad (36)$$

In tal modo la particella può essere levitata stabilmente anche in regioni dello spettro caratterizzate da forza dielettroforetica negativa, purché nella (35) il contributo positivo alla forza dielettroforetica totale prevalga su quello negativo.

Al variare della frequenza  $\omega$  il sistema di controllo a reazione modifica la differenza di potenziale  $V_2$  fino ad ottenere la stabilità voluta.

Una volta noto  $\text{Re}[K(\omega_0)]$  tramite la procedura di calibrazione, la variazione di  $V_2$  richiesta per mantenere la particella in una posizione fissa, fornisce una misura indiretta di  $\text{Re}[K(\omega)]$ . Infatti la condizione di equilibrio della particella sottoposta al segnale a doppia frequenza può essere così espressa:

$$\text{Re}[K(\omega)] V_1^2 + \text{Re}[K(\omega_0)] V_2^2 = \text{Re}[K(\omega_0)] V_{\text{cal}}^2, \quad (37)$$

da cui si ricava:

$$\text{Re}[K(\omega)] = \text{Re}[K(\omega_0)] \frac{V_{\text{cal}}^2 - V_2^2}{V_1^2}. \quad (38)$$

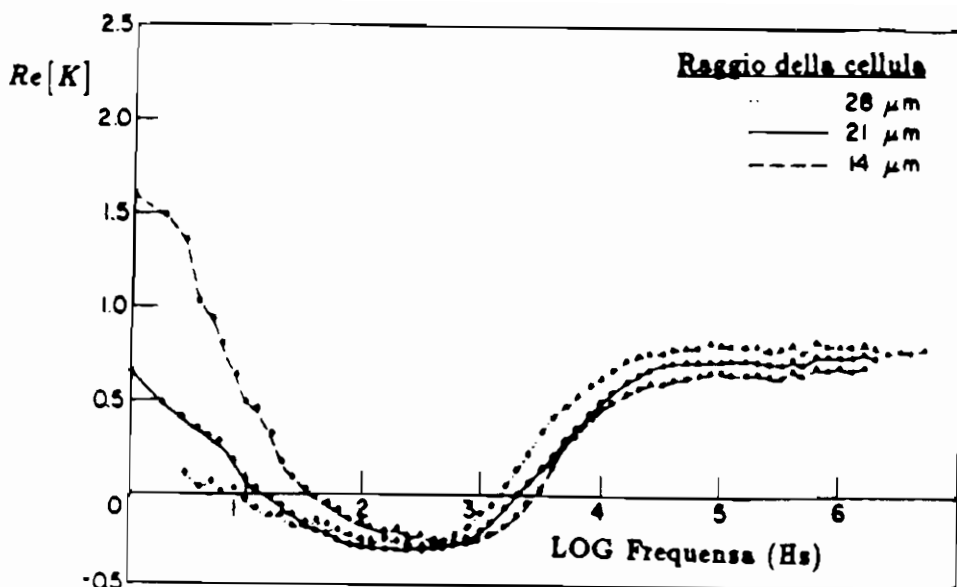
In esperimenti tipici di questo tipo le misure vengono effettuate partendo da frequenze  $\omega$  nella regione a forza dielettroforetica positiva in cui si effettua la calibrazione, ed abbassando successivamente la frequenza finché  $Re[K(\omega)]$  diventa zero e poi negativa.

## Conclusioni

In Fig. 7 sono riportate misure della parte reale del coefficiente di polarizzazione  $K$  di cellule viventi di protoplasti di vario raggio. Queste misure sono state ottenute<sup>[12]</sup> mediante un unico apparato di misura, con elettrodi a campo elettrico focalizzato ed a controllo reazionato, del tipo descritto in Fig. 3 e Fig. 5, sia nelle regioni dello spettro di frequenze in cui  $Re[K(\omega)]$  è positivo che in quelle in cui  $Re[K(\omega)]$  è negativo. In quest'ultimo caso per raggiungere la levitazione dielettroforetica stabile delle particelle in un punto dell'asse di simmetria, nonostante l'apparente inadeguatezza del sistema di elettrodi, il controllo retroattivo si avvale di un potenziale costituito dalla sovrapposizione di due segnali a diversa frequenza. Con questo metodo è possibile studiare la risposta dielettroforetica di cellule biologiche viventi su un ampio intervallo di frequenze che va da 1 Hz a 1 MHz.

I dati ottenuti nella regione alle medie ed alte frequenze sono in genere conformi alle previsioni teoriche sulla base di un semplice modello in cui le cellule vengono considerate di forma sferica<sup>[11]</sup>. In base a questo modello, si spiega la dipendenza di  $Re[K(\omega)]$  dal raggio dei protoplasti che è contenuta implicitamente nel valore effettivo della permittività dielettrica  $\hat{\epsilon}_2 = \hat{\epsilon}_{\text{eff}}$  della cellula.

Nella regione delle basse frequenze, però, i dati sperimentali si discostano significativamente dalla previsione teorica. La principale differenza che si osserva è un innalzamento pronunciato dell'effetto dielettroforetico positivo alle frequenze più basse, con valori di  $Re[K(\omega)] > 1$ , inaccettabili secondo la definizione stessa del coefficiente  $K$ . Questa incoerenza tra risultati sperimentali e previsione teorica indica, evidentemente, che si viene a verificare una situazione in cui le assunzioni fatte nell'ambito del modello



*Fig. 7 Misura della parte reale del coefficiente di polarizzazione  $K$  al variare della frequenza per cellule di protoplasti a diverso raggio.*

non sono più soddisfatte cosicché il modello perde di validità nella regione delle basse frequenze.

Una possibile spiegazione per il comportamento anomalo della dielettroforesi a basse frequenze è che l'elettroforesi, non considerata nel modello, possa in effetti entrare in gioco alle basse frequenze anche quando la media temporale del campo elettrico è nulla, se il campo è non uniforme. Da parte del gruppo di ricerca che fa capo a T. B. Jones sono attualmente in corso o in programmazione esperimenti volti ad indagare gli effetti del campo elettrico non uniforme su cellule biologiche nella regione delle basse frequenze e sviluppi di modelli teorici che possano adeguatamente interpretare i risultati sperimentali.

## Riferimenti bibliografici

- [1] E. R. Mognaschi e A. Savini, *J. Phys. D: Appl. Phys.*, **16**, 1533, (1983)
- [2] A. von Hippel, *Dielectrics and Waves*, Wiley, New York, (1954).
- [3] C. J. F. Böttcher, *Theory of Dielectric Polarization*, Elsevier, New York, (1952).
- [4] H. A. Phol, *Dielectrophoresis*, Cambridge University Press, London, (1978).
- [5] K. R. Foster e H. P. Schwan, *Critical Rev. Biomed.*, **17**, 25, (1989).
- [6] S. Takashima, K. Asami, e Y. Takahashi, *Biophys. J.*, **54**, 995, (1988).
- [7] W. M. Arnold e U. Zimmerman, *Z. Naturforsch. Teil C, Biochem. Biophys. Virol.*, **37**, 908, (1982).
- [8] J. P. H. Burt, R. Pethig, R. C. Gascoyne e F. F. Becker, *Biochem. Biophys. Acta*, **1034**, 93, (1990).
- [9] H. Fricke e S. Morse, *J. gen. Physiol.*, **9**, 153, (1925).
- [10] T. B. Jones e J. P. Kraybill, *J. Appl. Phys.*, **60**, 1247, (1986).
- [11] K. V. I. S. Kaler e T. B. Jones, *Biophys. J.*, **57**, 173, (1990).
- [12] T. N. Tombs e T. B. Jones, *Rev. Sci. Instrum.*, **62**, 1072, (1991).
- [13] K. V. I. S. Kaler, J-P. Xie, T. B. Jones e R. Paul, *Biophys. J.*, **63**, 58, (1992).
- [14] T. B. Jones e T. W. Bliss, *J. Appl. Phys.*, **48**, 1412, (1977).
- [15] H. Lamb, *Hydrodynamics*, articolo 92, (Dover, New York, 1945).
- [16] L. M. Holmes, *J. Appl. Phys.*, **49**, 3102, (1978).

Volume I - n. 1 4/3/1986	CINQUANTA ANNI DI INTERAZIONI DEBOLI: DALLA TEORIA DI FERMI ALLA SCOPERTA DEI BOSONI PESANTI - Marcello Conversi	pag. 1
Volume I - n. 2 1/7/1986	EFFECTS OF DIOXINS ON NATURE AND SOCIETY - Opening talk, Sergio P. Ratti	pag. 3
	DIOXIN IN MISSOURI - Arnon F. Yanders	pag. 11
	DEMONSTRATION OF INNOVATIVE REMEDIAL ACTION TECHNOLOGIES AT UNITED STATES MILITARY DIOXIN CONTAMINATED SITES - Terry L. Stoddard	pag. 23
	TIMES BEACH DIOXIN RESEARCH FACTUALLY - Robert J. Schreiber	pag. 41
	E.P.A. RISK ASSESSMENT OF CHLORINATED DIBENZO-P-DIOXIN AND DIBENZOFURANS (CCDs/CDFs) - Donald G. Barnes, Patricia Roberts	pag. 51
	RECENT INTERNATIONAL COOPERATION IN EXCHANGE OF INFORMATION ON DIOXIN - Donald G. Barnes	pag. 63
Volume II - n. 1 15/9/1987	CHLORACNE AND THE AGENT ORANGE PROBLEM IN THE U.S.A. - B. Fischmann	pag. 69
	CONVEGNO SU "LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITA- ZIONALE" - MOTIVAZIONI DEL CONVEGNO - Sergio P. Ratti	pag. 3
	LA CONOSCENZA ATTUALE DELLA INTERAZIONE GRAVITAZIONALE: UN PROBLEMA APERTO - Sergio P. Ratti, Roberto Silvotti	pag. 5
	SVILUPPI RECENTI SULLA CONOSCENZA DELLA COSTANTE DI GRAVITA- ZIONE UNIVERSALE - Anna Grassi, Giuliano Strini	pag. 19
	LIMITI SPERIMENTALI SULLA MISURA DELL'ACCELERAZIONE DI GRAVITA' - Roberto Cassinis	pag. 31
	CONSEGUENZE SPERIMENTALI DELLA IPOTESI DI ESISTENZA DI UNA QUINTA INTERAZIONE - Fabrizio Massa	pag. 43
	VERIFICA DEL PRINCIPIO DI EQUITVALENZA E FORZE TRA PARTICELLE ELEMENTARI - Bruno Bertotti	pag. 81
Volume II - n. 2 10/12/1987	TRANSIZIONE LIQUIDO SOLIDO - Mario Tosi	pag. 3
	EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - Emilio Zavattini	pag. 27
Volume III - n. 1 6/6/1988	METODI DI DILATAZIONE ANALITICA E RISONANZE IN SISTEMI QUANTISTICI NON RELATIVISTICI - Fausto Borgonovi	pag. 1
	CAMPO ELETTRICO ED EMISSIONI DA CARICHE IN UN MEZZO - Michele Spada	pag. 13
	SPETTROSCOPIA VIBRAZIONALE DI SUPERRETTICOLI SEMICONDUTTORI - Luciano Colombo	pag. 29
	SOLITONI IN FISICA NUCLEARE - Marco Radici	pag. 51
	ASPETTI NON LOCALI DEL COMPORTAMENTO QUANTISTICO - Oreste Nicosini	pag. 83
Volume III - n. 2 4/7/1988	CARATTERIZZAZIONE OTTICA IN SITU DI FILMS SOTTILI - Alessandra Piaggi	pag. 1
	TRANSIZIONI DI WETTING - Tommaso Bellini	pag. 23
	FORZE A TRE CORPI NEI GAS RARI - Silvia Celi	pag. 49
Volume III - n. 3 15/12/1988	FLAVOUR PHYSICS - Luciano Maiani	pag. 1
	THE STANDARD ELECTROWEAK MODEL: PRESENT EXPERIMENTAL STATUS - Pierre Darrulat	pag. 27
	WHY BE EVEN-HANDED? - Martin M. Block	pag. 47
Volume IV - n. 1 6/4/1989	LA FISICA DEI COLLIDER - Paolo Bagnaia, Fernanda Pastore	pag. 1
Volume IV - n. 2 15/6/1989	SOLAR WIND AND PHYSICS OF THE HELIOSPHERE - Bruno Coppi	pag. 2
	THE IGNITOR PROJECT - Bruno Coppi, Francesco Pegoraro	pag. 32
Volume IV - n. 3 15/9/1989	SPETTROSCOPIA ELLISSOMETRICA NEI SOLIDI - Alessandra Piaggi	pag. 3
	UNA INTRODUZIONE AL SUPERCONDUCTING SUPERCOLLIDER - R. Diaferia	pag. 23
	FENOMENI DI TRASPORTO IN SISTEMI HAMILTONIANI - Fausto Borgonovi	pag. 49
Volume V - n. 1 15/3/1990	MULTI-BODIED PHASE SPACE - A NEW APPROACH - Martin M. Bloch	pag. 1
	SCATTERING BRILLOUIN RISONANTE - Cristina Bosio	pag. 20
	METODO DI RINORMALIZZAZIONE PER LO STUDIO DELLA STRUTTURA ELET- TRONICA DI SUPPERRETTICOLI - Saverio Moroni	pag. 40
	MECCANISMI DI CONDUCTIBILITA' IONICA MEDIATI DA DIFETTI ESTRINSECI - IL CASO DEL QUARZO - Alberto Paleari	pag. 57
	STATISTICHE QUANTISTICHE ED INDISTINGUIBILITA' - Gianluca Introzzi	pag. 69
Volume V - n. 2 15/6/1990	FISICA DELLE ALTE ENERGIE ALLE KOAN FACTORIES - Renato Diaferia	pag. 1
	NEUTRONI FREDDI E NEUTRONI ULTRAFREDDI - Gianluca Raselli	pag. 15
	TRANSIZIONI ORDINE-DISORDINE NELLE DISPERSIONI COLLOIDALI - Paolo Di Trapani	pag. 51
Volume VI - n. 1 p. I - 11/10/1991	LE UNITA' DI MISURA DELLA RADIOPROTEZIONE - Sergio P. Ratti	pag. 1
	L'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Giuseppe Belli	pag. 7
	NORMATIVA E PRINCIPI DI RADIOPROTEZIONE - Argeo Benco	pag. 17
	APPENDICE 1 - Pubblicazioni I.C.R.P. - Argeo Benco	pag. 56
	APPENDICE 2a) - Il regime giuridico dell'impiego pacifico dell'energia nucleare	pag. 59
	APPENDICE 2b) - Elenco di provvedimenti di interesse per le attività di impiego pacifico dell'energia nucleare e delle radiazioni ionizzanti	pag. 64
	APPENDICE 2c) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative all'utilizzazione delle sostanze radioattive e delle macchine radiogene	pag. 78



	APPENDICE 2d) - Raccolta di Circolari Ministeriali relative al trasporto delle sostanze radioattive	pag. 85
	RADIOATTIVITA' AMBIENTALE E RADIOECOLOGICA - Arrigo Cigna	pag. 87
	EFFETTI BIOLOGICI DELLE RADIAZIONI IONIZZANTI - Marco Caproni	pag. 107
Volume VI - n. 1	MODELLO PREVISIONALE DELLA CONCENTRAZIONE DI $^{90}\text{Sr}$ , $^{134}\text{Cs}$ E $^{137}\text{Cs}$	
p. II - 11/10/1991	NELLA CATENA ALIMENTARE - Arrigo Cigna	pag. 117
	L'AMBIENTE E LA RADIOPROTEZIONE IN RELAZIONE AD INCIDENTI NUCLEARI - Arrigo Cigna	pag. 131
	INCIDENTE NUCLEARE "CHERNOBYL" E SUE RIPERCUSSIONI SULLA CATENA ALIMENTARE - R. Cazzaniga, G. Dominici, A. Malvicini, E. Sangalli	pag. 157
	PRIMA VALUTAZIONE DELL'IMPATTO RADIOLOGICO AMBIENTALE NELLA ZONA DI ISPIRA IN RELAZIONE ALL'INCIDENTE NUCLEARE DI CHERNOBYL - Argeo Benco	pag. 177
	APPROCCIO FRATTALE ALLA DESCRIZIONE DELLA RADIOATTIVITA' IN ARIA IN ITALIA DOPO CHERNOBYL - Gianfausto Salvadori	pag. 201
Volume VII - n. 1	ELECTRON ENERGY LOSS SPECTROSCOPY - Marco Amati	pag. 1
15/3/1992	LIVELLI ELETTRONICI PROFONDI IN SEMICONDUTTORI E LORO CARATTERIZZAZIONE - Adele Sassella	pag. 35
	LA RICERCA DEL BOSONE DI HIGGS AI FUTURI ACCELERATORI - G. Montagna	pag. 57
	SIMMETRIA CHIRALE E TEOREMA DI GOLDBERGER-TREIDMAN - Carlo Gobbi	pag. 81
Volume VII - n. 2	CRESCITA, CARATTERIZZAZIONE ED APPLICAZIONI DEI LANGMUIR-BLODGETT FILMS - Marco Amati	pag. 1
15/10/1992	LA CATTODOLUMINESCENZA - Vittorio Bellani	pag. 35
	CORRELAZIONI ELETTRONICHE IN OSSIDI DI METALLI DI TRANSIZIONE - Luigi Sangaletti	pag. 63
Volume VIII - n. 1	TEORIA DELLE STRINGHE IN DIMENSIONE NON CRITICA - Alberto Vancheni	pag. 1
15/1/1993	ROTTURA ESPlicita E SPONTANEA DI SIMMETRIE CONTINUE GLOBALI NEL MODELLO STANDARD - Antonio Defendi	pag. 25
	APPLICAZIONI DELLA $\mu^+\text{SR}$ NELLA STRUTTURA DELLA MATERIA - P. Carretta	pag. 39
	EFFETTI FOTORIFRATTIVI IN CRISTALLI IONICI - Enrico Giulotto	pag. 75
Volume VIII - n. 2	L'UNITA' DELLA SCIENZA. IL CASO DELLA FISICA, OGGI - Giorgio Salvini	pag. 1
15/4/1993	LA RICERCA DEL QU'ARK TOP: STATO ATTUALE E PROSPETTIVE FUTURE - Elisabetta Pennacchio	pag. 37
	MODELLO A TETRAEDRI PER LA FUNZIONE DIELETTRICA DI SOLIDI AMORFI - Adele Sassella	pag. 73
	INTRODUZIONE ALLE RETI NEURALI - Chiara Macchiavello	pag. 93
Volume VIII - n. 3	RPC: STATUS AND PERSPECTIVES - R. Santonico	pag. 1
15/6/93	PERFORMANCE OF E771 RPC MUON DETECTOR - E. Gorini (E771 Coll.)	pag. 13
	THE MUON TRIGGER HODOSCOPE OF THE BEAUTY HADRO PRODUCTION EXPERIMENT WA92: PERFORMANCES AND PRELIMINARY RESULTS ON BEAUTY MUONIC DECAYS - G. Martellotti, D. Orestano (Beauty Coll.)	pag. 29
	THE RPC TRIGGER SYSTEM FOR THE L3 FORWARD BACKWARD MUON DETECTOR - S. Patricelli	pag. 37
	RESULTS FROM THE RDS EXPERIMENT AT CERN - A. Di Ciaccio (RDS Coll.)	pag. 45
	LEVEL 1 MUON TRIGGER IN THE ATLAS EXPERIMENT AT THE LARGE HADRON COLLIDER - A. Nisau (ATLAS Coll.)	pag. 61
	RPC BASED MUON TRIGGER FOR THE CMS DETECTOR AT LHC - G. Wrochna (CMS Coll.)	pag. 73
	AN RPC MUON SYSTEM FOR SDC AT SSCL - G. Introzza (Pavia SDC Group)	pag. 83
	A MUON TRIGGER FOR LHB - R. Santacesaria	pag. 103
	MINI: A HORIZONTAL MUON TELESCOPE IMPLEMENTED WITH RESISTIVE PLATE CHAMBERS - G. Iaselli	pag. 115
	T&T: A NEW DESIGN FOR A FRONT-END TIME DIGITIZER ELECTRONICS - M. Ambrosio, G.C. Barbarino, A. Lauro, G. Ostera, G. Agnetta, O. Catalano, L. Scarsi, A. Lanza, G. Liguori, P. Torre	pag. 123
	ATMOSPHERIC AND ACCELERATOR NEUTRINO PHYSICS WITH RPCS IN THE SOUDAN 2 CAVERN - D.J.A. Cockeill	pag. 133
	STUDY OF THE CHARACTERISTICS OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS IN THE RDS EXPERIMENT - L. Pontecorvo (RDS Coll.)	pag. 145
	OPERATION OF RESISTIVE PLATE CHAMBERS WITH PURE $\text{CF}_3\text{BR}$ - R. Cardarelli	pag. 159
	WLDC: A DRIFT CHAMBER WITH A PAD RPC FOR MUON DETECTION AT LHC - H. Faissner, Th. Moers, R. Priem, B. Razen, D. Rein, H. Reithler, D. Samm, R. Schleichert, H. Schwarzhoff, H. Tuchscherer, H. Wagner	pag. 167
	GLASS ELECTRODE SPARK COUNTER - G. Bencivenni, G. Felici, E. Iacussa, C. Guastavino, M. D'Incecco	pag. 181
	RPC READOUT FOR PARTICLE ASTROPHYSICS - M. Bononi, U. Contino, F. Massa	pag. 193
	RESULTS OF TESTS OF PROTOTYPE RESISTIVE PLATE CHAMBERS - I. Crotty, J. Lamas Valverde, G. Laurenti, M.C.S. Williams, A. Zichichi	pag. 199

Volume IX - n. 1  
15/4/1994

GLASS ELECTRODES RPC: PERFORMANCE AND WORKING MODEL M. Bonori, U. Conuno, F. Massa	pag. 207
FAST PARALLEL RPC READOUT SYSTEM - A. Lanza, G. Liguori, P. Torre, M. Ambrosio, G.C. Barbarino, M. Iacovacci, A. Lauro, G. Osteria, G. Agnelli, O. Catalano, L. Scarzi	pag. 219
DATA ACQUISITION SYSTEMS DEVELOPED AT CAEN - F. Catarci, C. Landi, G. Franchi, M. Lippi	pag. 225
RETICOLI DISORDINATI: IL MODELLO DI ANDERSON - Riccardo Farchioni	pag. 1
BREVE INTRODUZIONE ALLA TEORIA QUANTISTICA DELLA STEMA - Matteo Paris	pag. 23
SUSY - Matteo Cacciari	pag. 36
MASSE DEL QUARK TOP E DEL BOSONE DI HIGGS NEL MODELLO STANDARD - Fulvio Piccinini	pag. 79
DIELETTROFORESI: LIEVITAZIONE A CONTROLLO REAZIONATO - Luisa Lubiazzi	pag. 97