

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA

SCIENTIFICA ACTA

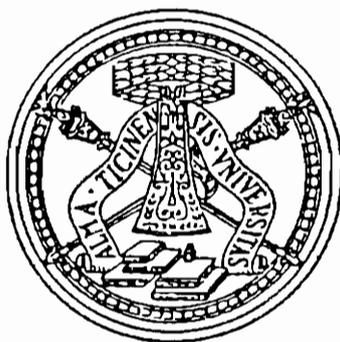
QUADERNI DEL DOTTORATO

VOLUME II

ANNO II

NUMERO 2

10 DICEMBRE 1987



ISTITUTO NAZIONALE DI FISICA NUCLEARE

CENTRO STAMPA - DIPARTIMENTI FISICI
via Bassi, 6 27100 Pavia

INDICE

- 1 - TRANSIZIONE LIQUIDO-SOLIDO - M.Tosi pag. 3
- 2 - EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO ED
ELETTRODINAMICA QUANTISTICA - E.Zavattini " 27

Mario Tosi

Dipartimento di Fisica Teorica, Università' di Trieste.

TRANSIZIONE LIQUIDO-SOLIDO

(lezione inaugurale A.A. 1985/86)

1. ASPETTI TERMODINAMICI E STRUTTURALI DELLA COESISTENZA LIQUIDO-SOLIDO

Il cambiamento di stato della materia da solido a liquido e' un fenomeno di cui si incontrano nell'esperienza comune esempi specifici come la fusione del ghiaccio. Non e' quindi sorprendente che risalgano all'antichita' classica le prime discussioni della natura di questo processo e del concetto implicito che il calore, in una visuale atomistica della costituzione della materia, non e' altro che una forma di energia di moto.

E' nel Settecento, tuttavia, che inizia lo sviluppo di tecniche per la misura di fenomeni associati alla fusione. Sono anzitutto d'interesse le variazioni discontinue di calore e di volume nella transizione di fase. Gli studi sperimentali di proprieta' termodinamiche si estendono nel corso dell'Ottocento agli effetti di pressione e alla determinazione della relazione tra la pressione e la temperatura di fusione (curva di fusione). L'applicazione dei metodi della termodinamica alla coesistenza tra fase solida e fase liquida inizia verso la meta' dell'Ottocento e porta a descrivere la curva di fusione sia su base termodinamica fondamentale (equazione di Clausius-Clapeyron) sia mediante relazioni empiriche applicabili per quanto possibile su ampi intervalli di pressione e per sistemi diversi. Ovviamente, tali descrizioni termodinamiche non fanno alcun riferimento a considerazioni di struttura atomistica e di forze interatomiche. Stime teoriche della curva di fusione, basate su calcoli microscopici della differenza di energia libera tra le due fasi in funzione delle variabili termodinamiche, sono comparse nella letteratura solo recentemente per alcuni metalli⁽¹⁾.

Lo sviluppo delle tecniche di diffrazione di raggi X per studi

strutturali agli inizi del secolo in corso ha invece posto enfasi sulla natura della fusione come transizione da una fase ordinata ad una fase essenzialmente disordinata. La struttura microscopica di solidi e di liquidi e' ora nota da esperimenti di diffrazione di raggi X e di neutroni. In parallelo a queste misure, metodi di simulazione numerica determinano proprieta' termodinamiche e strutturali di sistemi-modello da forze interatomiche che sono esattamente note anche se piu' o meno realistiche.

Di particolare interesse fondamentale sono attualmente le seguenti problematiche: (1) la connessione tra la struttura del liquido prossimo alla solidificazione e la struttura del solido corrispondente prossimo alla fusione, stabilita se possibile ad un livello di dettaglio sufficiente per una descrizione teorica completa della coesistenza tra le due fasi; (2) il grado di "universalita'" della transizione liquido-solido nei suoi aspetti termodinamici e strutturali. Quest'ultima problematica e' evidentemente suggerita dai ben noti caratteri di universalita' dei fenomeni critici. In relazione ad una transizione del primo ordine, tuttavia, va intesa nel senso di evidenziare proprieta' della transizione che mostrino bassa sensibilita' ai dettagli delle forze interatomiche.

In questa breve rassegna presentero' risultati significativi gia' acquisiti lungo le due linee di sviluppo sopra menzionate. Va qui osservato che, allo stato attuale, una discussione microscopica della coesistenza liquido-solido e' necessariamente limitata a sistemi-modello e a sistemi reali con forze interatomiche relativamente semplici. In particolare e' tuttora esclusa la possibilita' di una teoria microscopica per la transizione acqua-ghiaccio. Ci si puo' riferire al

libro di Ubbelohde⁽²⁾ per un'ampia panoramica della fenomenologia della fusione nelle varie classi di sistemi fisici, ben corredata da dati sperimentali.

2. CARATTERISTICHE DI "UNIVERSALITA'"

2.1 Proprieta' della curva di fusione

La descrizione delle grandezze termodinamiche associate alla fusione si semplifica notevolmente nel limite di alta temperatura, in cui restano importanti solo le interazioni repulsive tra gli atomi del sistema. Rappresentando queste interazioni con una dipendenza del tipo r^{-n} dalla distanza interatomica r , si dimostra facilmente che la funzione di partizione classica dipende per questo modello⁽³⁾ dalla densita' ρ e dalla temperatura T solo tramite la variabile $\rho T^{-d/n}$, d essendo la dimensionalita' del sistema. La pressione P ha la forma

$$P/(\rho k_B T) = 1 + f(\rho T^{-d/n}) \quad (2.1)$$

e la coesistenza tra le due fasi e' percio' caratterizzata da due valori universali $\rho_S T^{-d/n}$ e $\rho_L T^{-d/n}$ per il solido e per il liquido.

Conseguenze di questa proprieta' sono:

a) la curva di fusione ha una forma "universale" (dipendente dal parametro n delle repulsioni interatomiche), con i casi notevoli $P \propto T$ per $n \rightarrow \infty$ (sfere dure) e $\rho \propto T^d$ per $n=1$ (plasma classico; vedremo piu' avanti un'osservazione sperimentale di quest'ultima curva di fusione per un plasma elettronico bidimensionale):

b) l'entropia di fusione S_f e la variazione relativa di volume $\Delta V/V_S$ nella fusione assumono valori costanti, dipendenti da n . Ad illustrazione notiamo che la simulazione numerica del modello da'

libro di Ubbelohde⁽²⁾ per un'ampia panoramica della fenomenologia della fusione nelle varie classi di sistemi fisici, ben corredata da dati sperimentali.

2. CARATTERISTICHE DI "UNIVERSALITA'"

2.1 Proprieta' della curva di fusione

La descrizione delle grandezze termodinamiche associate alla fusione si semplifica notevolmente nel limite di alta temperatura, in cui restano importanti solo le interazioni repulsive tra gli atomi del sistema. Rappresentando queste interazioni con una dipendenza del tipo r^{-n} dalla distanza interatomica r , si dimostra facilmente che la funzione di partizione classica dipende per questo modello⁽³⁾ dalla densita' ρ e dalla temperatura T solo tramite la variabile $\rho T^{-d/n}$, d essendo la dimensionalita' del sistema. La pressione P ha la forma

$$P/(\rho k_B T) = 1 + f(\rho T^{-d/n}) \quad (2.1)$$

e la coesistenza tra le due fasi e' percio' caratterizzata da due valori universali $\rho_s T^{-d/n}$ e $\rho_l T^{-d/n}$ per il solido e per il liquido.

Conseguenze di questa proprieta' sono:

a) la curva di fusione ha una forma "universale" (dipendente dal parametro n delle repulsioni interatomiche), con i casi notevoli $P \propto T$ per $n \rightarrow \infty$ (sfere dure) e $\rho \propto T^d$ per $n=1$ (plasma classico; vedremo piu' avanti un'osservazione sperimentale di quest'ultima curva di fusione per un plasma elettronico bidimensionale):

b) l'entropia di fusione S_f e la variazione relativa di volume $\Delta V/V_s$ nella fusione assumono valori costanti, dipendenti da n . Ad illustrazione notiamo che la simulazione numerica del modello da'

$S_f = 0.90 k_B$ e $\Delta V/V_s = 3.8\%$ per $d = 3$ e $n = 12$, mentre esperimenti sull'argon⁽⁴⁾ danno $S_f \approx 0.9 k_B$ e $\Delta V/V_s \approx 3\%$ per estrapolazione ad alta temperatura.

Mediante un'opportuna accensione di attrazioni Coulombiane, questo modello puo' essere convertito in un modello per un sistema ionico quale un alogenuro alcalino a temperatura arbitraria. E' possibile in tal caso introdurre una scala di lunghezza a (ad esempio, il raggio della sfera di volume ρ^{-1}) ed una scala di energie e^2/a , in modo che l'equazione di stato ha la forma⁽⁵⁾

$$P = \frac{e^2}{a} f(\rho a^3, e^2/ak_B T). \quad (2.2)$$

Ne scende la relazione

$$e^2/(ak_B T) = \text{costante} \quad (2.3)$$

per la temperatura di fusione a bassa pressione. Questa relazione e' ben soddisfatta dagli alogenuri alcalini a pressione atmosferica.

Osserviamo che la relazione (2.3) e' in effetti equivalente alla relazione $\rho \propto T^d$ notata sopra per il plasma classico, anche se le costanti di proporzionalita' in gioco nei due casi sono diverse ($e^2/ak_B T \approx 50-60$ per gli alogenuri alcalini a pressione atmosferica, contro $e^2/(ak_B T) \approx 178$ per il plasma classico tridimensionale).

Nel limite di alta pressione, d'altra parte, si e' osservato sperimentalmente⁽⁴⁾ che l'entropia di fusione dell'argon e del sodio si estrapola ad un valore $S_f \approx k_B \ln 2$. Notando che $\Delta V/V_s \rightarrow 0$ per $p \rightarrow \infty$, Lasocka⁽⁶⁾ e Tallon⁽⁷⁾ hanno proposto la relazione

$$S_f = (\delta S/\delta V)_T + \sigma k_B \ln 2 \quad (2.4)$$

in cui $(\delta S/\delta V)_T$ e' uguale al rapporto α/K_T tra l'espansione termica α e la compressibilita' isoterma K_T , mentre α e' il numero di atomi nella formula chimica del materiale. La relazione (2.4) e' ben verificata sia in modelli di tipo r^{-n} sia in vari sistemi reali, purché il carattere delle forze interatomiche non cambi drasticamente nella fusione (fanno eccezione, ad esempio, silicio e germanio, che sono semiconduttori in fase solida e metalli in fase liquida).

Vari sistemi ionici presentano vistosi fenomeni di disordine in fase solida precursori della fusione, che si manifestano a livello macroscopico in un elevato valore della conducibilita' elettrica (conduzione superionica) e in anomalie termodinamiche. La figura 1) illustra ad esempio il comportamento dell' SrCl_2 : il calore specifico ha un picco ad una temperatura di disordine in fase solida e una successiva discontinuita' alla fusione, mentre l'entropia del solido caldo eccede la sua estrapolazione da basse temperature. E' interessante notare che la relazione (2.4) e' soddisfatta con $\alpha = 3$ in questi sistemi dalla somma dell'entropia di disordine del solido e dall'entropia di fusione⁽⁷⁾.

2.2 Criteri strutturali di fusione e di solidificazione

Il criterio di fusione dato da Lindemann⁽⁸⁾ asserisce su basi empiriche che un cristallo fonde quando lo spostamento quadratico medio $(\bar{u}^2)^{1/2}$ degli atomi in vibrazioni termicamente eccitate raggiunge un valore che e' una certa frazione del parametro reticolare r_0 . Tale frazione e' circa costante per sistemi diversi aventi la stessa struttura cristallina.

E' utile osservare esplicitamente che il criterio di Lindemann e'

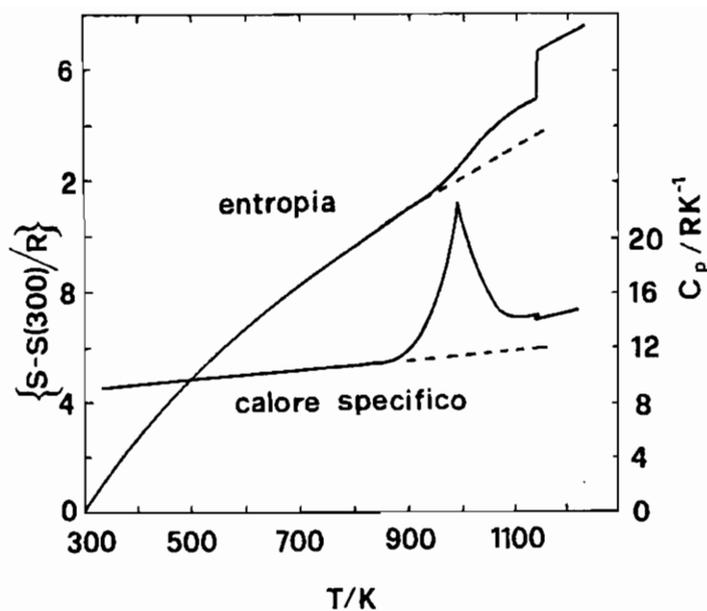


Figura 1. Calore specifico C_p e entropia S dell' SrCl_2 attraverso la transizione superionica a 993 K e la fusione a 1146 K. Le linee tratteggiate mostrano il comportamento presunto in assenza della transizione superionica.

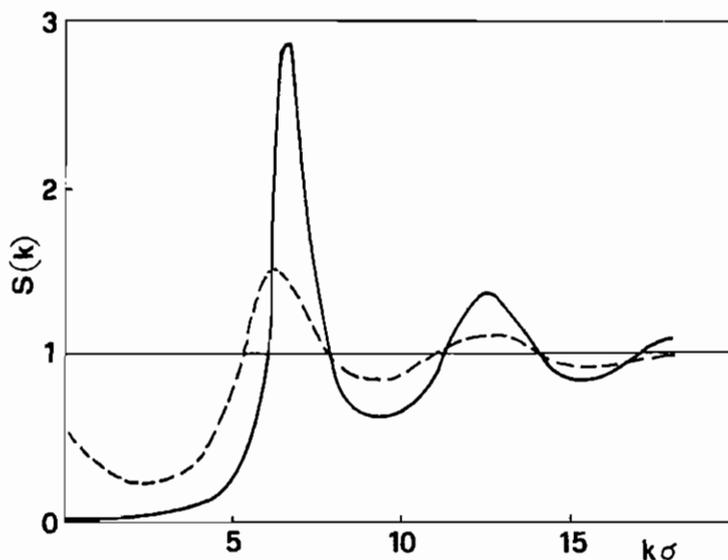


Figura 2. Fattore di struttura $S(k)$ di un fluido monoatomico in uno stato di gas denso (a tratteggio) e in uno stato prossimo alla cristallizzazione (a tratto pieno).

in effetti un criterio strutturale per la fusione. Infatti, nell'ambito della teoria armonica delle vibrazioni reticolari, il rapporto di Lindemann \bar{u}^2/r_0^2 determina i valori del fattore di Debye-Waller per vettori d'onda corrispondenti a vettori del reticolo reciproco della struttura cristallina e cioè l'intensità delle corrispondenti riflessioni di Bragg dal cristallo. Queste intensità, unitamente alla quantità $\Delta V/V_s$, rappresentano come vedremo i parametri d'ordine della transizione liquido-solido.

In parallelo al criterio di Lindemann per la fusione, Hansen e Verlet⁽⁹⁾ hanno proposto un criterio strutturale per la cristallizzazione sulla base della figura di diffrazione del liquido. Questa figura è rappresentata per un fluido monoatomico dal cosiddetto fattore di struttura $S(k)$ in funzione del numero d'onde k trasferito nel processo di diffrazione. La figura 2) mostra $S(k)$ per un fluido in due stati termodinamici diversi, corrispondenti ad un gas denso e a un liquido prossimo alla cristallizzazione. Il picco principale di questa funzione è evidentemente molto più marcato nel liquido che nel gas, come conseguenza del maggior ordine a corto raggio. Il criterio di Hansen e Verlet asserisce che il liquido cristallizza quando il valore di picco del suo fattore di struttura sale a $S_p \approx 3$. L'evidenza disponibile mostra che tale valore critico per sistemi monoatomici è poco sensibile ai dettagli delle forze interatomiche.

Il criterio empirico di Hansen e Verlet ha avuto un ruolo importante negli sviluppi recenti della teoria microscopica. Ciò è dovuto al significato duplice che si può attribuire alla funzione $S(k)$, in virtù del teorema di fluttuazione-dissipazione per un fluido classico. Il fattore di struttura, oltre che misurabile in un esperimento di diffrazione, è anche inversamente proporzionale alla resistenza mec-

canica del fluido in risposta ad una perturbazione esterna in cui la sua densita' venga modulata con un'onda di densita' di vettore d'onda \underline{k} - nello stesso senso in cui la compressibilita' del fluido misura la sua deformabilita' sotto compressione uniforme.

Con riferimento alla figura 2, notiamo percio' che la crescita del valore di picco S_p mentre il fluido si avvicina alla cristallizzazione indica anche che la spesa di energia libera necessaria per modulare il fluido ai vettori d'onda corrispondenti sta diminuendo. In un senso che sara' precisato nel seguito immediato, considereremo il cristallo a coesistenza come il liquido spontaneamente modulato e collegheremo la sua comparsa al fattore di struttura del liquido. Troveremo per il liquido monoatomico la possibilita' di una transizione del primo ordine ad una fase cristallina, in cui la spesa di energia libera necessaria per modulare la densita' del liquido e' bilanciata tramite la variazione di volume nella transizione⁽¹⁰⁾.

3. TEORIA MECCANICO-STATISTICA DELLA COESISTENZA

La densita' $\rho_s(\underline{r})$ di particelle nel cristallo e' una funzione periodica della posizione \underline{r} , che e' rappresentata dalla serie di Fourier

$$\rho_s(\underline{r}) = \rho_s + \sum_{\underline{G} \neq 0} \rho_{\underline{G}} \exp(i\underline{G} \cdot \underline{r}) \quad (3.1)$$

ove ρ_s e' la densita' media del solido e \underline{G} denota i vettori di reticolo reciproco della struttura cristallina. In uno stato termodinamico in cui il liquido, a densita' $\rho(\underline{r}) = \rho_l$, sia stabile, il profilo di densita' (3.1) puo' essere creato applicando al liquido un potenziale

esterno periodico $U(\underline{r})$. Questo potenziale deve tendere a zero mentre lo stato termodinamico viene portato verso la coesistenza, ove la differenza $\rho_s - \rho_l$ di densita' media e le componenti di Fourier $\rho_{\underline{G}}$ compaiono spontaneamente. Notiamo inoltre le quantita' $|\rho_{\underline{G}}|^2$ misurano le intensita' delle varie riflessioni di Bragg dal cristallo, tali intensita' essendo, come sopra osservato, le grandezze d'interesse nel criterio di Lindemann.

Secondo il teorema di Hohenberg, Kohn e Marmin⁽¹¹⁾, l'energia libera di Helmholtz F di un sistema classico avente densita' $\rho(\underline{r})$ in un potenziale $U(\underline{r})$ ha la forma

$$F = k_B T \int d\underline{r} \rho(\underline{r}) \{ \ln [\lambda^3 \rho(\underline{r})] - 1 \} + \int d\underline{r} \rho(\underline{r}) U(\underline{r}) + F_e [\rho(\underline{r})] \quad (3.2)$$

in cui il primo termine e' proprio di un gas ideale (λ essendo la lunghezza d'onda termica di de Broglie), mentre il secondo termine rappresenta l'interazione con il potenziale esterno e il terzo e' dovuto alle interazioni mutue tra le particelle del sistema. Il teorema di HKM assicura che quest'ultimo termine e' un funzionale della densita' $\rho(\underline{r})$, come indicato nell'eq.(3.2). La densita' d'equilibrio e' determinata dal principio variazionale $\delta(F - \mu N) / \delta \rho(\underline{r}) = 0$, μ essendo il potenziale chimico e N il numero di particelle:

$$\rho(\underline{r}) = \lambda^{-3} \exp [C(\underline{r}) - \beta U(\underline{r}) + \beta \mu] \quad (3.3)$$

ove $\beta = (k_B T)^{-1}$ e $C(\underline{r}) = - \beta \delta F_e / \delta \rho(\underline{r})$. A coesistenza, prendendo $U(\underline{r}) \rightarrow 0$ e utilizzando la condizione $\mu_s = \mu_l$ per l'equilibrio termodinamico, si ottiene dall'eqn.(3.3) che le densita' di equilibrio delle due fasi sono legate dalla relazione

$$\rho_s(\underline{r}) / \rho_l = \exp [C(\underline{r}) - C_l] \quad (3.4)$$

ove C_1 e' il valore di $C(\underline{r})$ calcolata sulla fase omogenea a densita' ρ_1 . La coesistenza stessa e' determinata dalla condizione di uguaglianza della pressione $P = (N\mu - F)/V$ delle due fasi⁽¹²⁾.

La connessione tra questo sviluppo formalmente esatto e la struttura del liquido a coesistenza diventa esplicita se si assume che la transizione in esame puo' essere trattata come una transizione debole del primo ordine⁽¹⁰⁾. In tal caso e' possibile espandere $F_e[\rho_s(\underline{r})]$, e quindi $C(\underline{r})$, attorno alla fase omogenea, arrestandosi a termini quadratici in $\rho_s(\underline{r}) - \rho_1$. L'eqn.(3.4) diventa

$$\ln[\rho_s(\underline{r})/\rho_1] = \int d\underline{r}' c_1(|\underline{r}-\underline{r}'|)[\rho_s(\underline{r}')-\rho_1] \quad (3.5)$$

e la condizione di uguaglianza delle pressioni da'

$$\sum_{\underline{G} \neq 0} \hat{c}_1(\underline{G}) |\rho_G|^2 = (\rho_s^2 - \rho_1^2)/(\rho_1 k_B T k_T). \quad (3.6)$$

In queste equazioni la funzione $c_1(r)$, con trasformata di Fourier $\hat{c}_1(k)$, e' la funzione di correlazione diretta di Ornstein e Zernike per il liquido. Essa e' formalmente definita tramite la derivata funzionale seconda di F_e ed e' legata dal teorema di fluttuazione-dissipazione al fattore di struttura $S(k)$ da

$$\hat{c}_1(k) = 1 - 1/S(k). \quad (3.7)$$

E' quindi possibile con le eqn.(3.5) e (3.6), conoscendo il fattore di struttura del liquido e la sua compressibilita' in funzione delle variabili di stato, determinare lo stato di coesistenza e i parametri d'ordine della transizione supposta debolmente del prim'ordine. Si noti nell'eqn.(3.6) il bilancio tra la modulazione del liqui-

do e la variazione di densita' media del sistema nella transizione di fase.

4. DESCRIZIONE DELLA TRANSIZIONE IN ALCUNE CLASSI DI SISTEMI

Illustrero' brevemente in questa sezione il materiale presentato nelle due sezioni precedenti con una descrizione della transizione liquido-solido in vari tipi di sistemi semplici. Vedremo poi nella sezione 5 un'applicazione dettagliata della teoria meccanico-statistica alla cristallizzazione di un sistema specifico.

4.1 Teoria del criterio di Hansen-Verlet per i metalli

Nella forma piu' semplice della teoria possiamo vedere la cristallizzazione come un processo cooperativo tra la comparsa del primo parametro d'ordine ρ_{G_1} , corrispondente ai vettori di reticolo reciproco giacenti sotto il picco principale di $S(k)$, e la variazione di densita' $\rho_s \leftarrow \rho_l$. Nel caso dei metalli possiamo inoltre sfruttare il fatto che sia $(\rho_s \leftarrow \rho_l)/\rho_l$ sia K_T sono relativamente piccoli per passare al limite di liquido incompressibile ($\Delta V/V_s \rightarrow 0$ e $K_T \rightarrow 0$ con $\Delta V/(V_s K_T)$ finito). La teoria predice in questo limite un valore "universale" per $\hat{c}_1(G_1)$ alla cristallizzazione, che dipende solo dalla struttura cristallina tramite la molteplicita' dei vettori sottesi dal picco di $S(k)$. Come mostra la Tabella 1, questa predizione e' in buon accordo con l'esperienza per le tre principali strutture cristalline di metalli⁽¹³⁾. La costanza approssimata dei valori sperimentali di $\hat{c}_1(G_1)$ in questa tabella rappresenta, ovviamente, il criterio di Hansen e Verlet.

TABELLA 1

Valori di $\hat{c}_1(G_1)$ per metalli alla transizione liquido-solido⁺

Struttura cristallina:	b.c.c.	f.c.c.	h.c.p.
teoria:	0.70	0.56	0.63
$\hat{c}_1(G_1)$ esperimento:	0.58±0.64	0.59±0.64	0.60±0.65

+ I valori sperimentali si riferiscono alle misure esistenti piu' prossime alla temperatura di cristallizzazione a pressione atmosferica e riguardano i seguenti metalli: Li, Na, K, Rb, Cs, Ca, Sr, Ba, Mn, Fe, Cr, Zr (b.c.c.); Al, Cu, Ag, Au, Pb, Co, Ni, Pd, Pt (f.c.c.); Mg, Zn, Cd (h.c.p.).

4.2 Cristallizzazione dei metalli alcalini e del plasma tridimensionale

Nell'ambito della teoria elettronica dei metalli, il fattore di struttura dei metalli alcalini liquidi puo' essere calcolato da quello di un plasma classico tridimensionale (rappresentante gli ioni "nudi") mediante accensione delle interazioni elettrone-ione e elettrone-elettrone⁽¹⁴⁾. L'effetto fisico di queste interazioni e' lo schermo elettrico delle repulsioni Coulombiane tra gli ioni metallici, che risulta essere importante solo a numeri d'onda relativamente piccoli. In particolare, il picco principale e i picchi successivi del fattore di struttura di questi metalli liquidi sono direttamente collegati alle strutture analoghe nel plasma.

Con riferimento alla discussione della sezione 2.1, la Tabella 2 mostra anzitutto che tutti questi sistemi solidificano a valori della forza d'interazione $e^2/(ak_B T)$ che sono circa uguali. Le righe successive della tabella illustrano il criterio di Lindemann e il criterio di Hansen-Verlet.

Mediante un calcolo specifico della solidificazione del sodio, Ramakrishnan e Yussouff⁽¹⁰⁾ hanno riprodotto il valore di S_p alla solidificazione utilizzando due parametri d'ordine ρ_{G1} e ρ_{G2} per la transizione. Il valore misurato di $\Delta V/V_s$ e' pure ben prodotto dalla teoria se si tien conto di effetti non lineari associati alla notevole differenza di compressibilita' tra le due fasi. Risultati analoghi si ottengono per la solidificazione dell'argon in un cristallo f.c.c.

La teoria della cristallizzazione del plasma classico tridimensionale mostra l'esistenza di accoppiamenti non lineari tra alcuni parametri d'ordine e porta a determinare un limite inferiore per la forza di interazione alla transizione⁽¹⁵⁾. Tale risultato e' $e^2/(ak_B T) > 150$,

TABELLA 2

Cristallizzazione dei metalli alcalini e del plasma classico
tridimensionale

Sistema:	Li	Na	K	Rb	Cs	Plasma
$e^2/(ak_B T)$ alla solidificazione:	211	208	186	188	181	178
Fattore di Debye- Waller alla prima stella:	0.66	0.66	0.65	0.67	0.63	0.62
s_p :	3	2.8+3.1	2.7+3.1	3	3	3

da confrontarsi con il valore $e^2/(ak_B T) \approx 178$ riportato in Tabella 2 da esperimenti di simulazione numerica.

Il liquido degenere di elettroni rappresenta l'analogo quantistico del plasma tridimensionale. Per questo liquido quantistico Wigner⁽¹⁶⁾ propose originalmente una transizione a un cristallo b.c.c. per effetto delle repulsioni Coulombiane mutue degli elettroni. La transizione di Wigner nel plasma degenere e' stata determinata recentemente con metodi di simulazione numerica⁽¹⁷⁾ ad una forza d'interazione $r_s \approx 80$ (con la definizione $r_s a_B = (4\pi\rho/3)^{-1/3}$, a_B essendo il raggio di Bohr). Il ruolo cruciale dell'energia cinetica quantistica nella transizione di Wigner, associato alla scomparsa della superficie di Fermi nella solidificazione del liquido di elettroni, e' stato sottolineato da un confronto tra i comportamenti del plasma degenere e del plasma classico in funzione della forza d'interazione⁽¹⁸⁾.

4.3 Cristallizzazione degli alogenuri alcalini

Una descrizione strutturale di un liquido a piu' specie componenti richiede una molteplicita' di fattori di struttura, che descrivono l'ordine relativo tra le varie coppie di particelle componenti. La separazione della figura di diffrazione in questi fattori di struttura parziali e' effettuata sperimentalmente mediante tecniche di diffrazione di neutroni, utilizzando campioni di diversa costituzione isotopica.

Questi esperimenti mostrano che un alogenuro alcalino fuso puo' essere strutturalmente descritto come un liquido poco comprimibile in cui le due componenti sono piuttosto ben ordinate una rispetto all'altra. Tale ordine a corto raggio nella distribuzione di carica e'

l'elemento determinante nel processo di cristallizzazione, coadiuvato dal forte cambio di volume nella transizione⁽¹⁹⁾.

4.4 Solidificazione in una fase superionica

I fattori di struttura parziali sono noti sperimentalmente anche per due liquidi ionici che hanno comportamento superionico in fase solida a struttura tipo fluorite ad alte temperature (SrCl_2 e BaCl_2 ; si veda la discussione in sezione 2.1). Molto marcato in questi liquidi e' l'ordine a corto raggio nella componente cationica, avente carica $2|$ e $|$; in effetti, una descrizione approssimata delle correlazioni catione-catione puo' essere ottenuta rappresentando questa componente del liquido come un plasma classico tridimensionale immerso in un bagno uniforme di carica neutralizzante.

Una discussione specifica della cristallizzazione di questi sistemi mostra che la transizione e' pilotata dalla componente cationica; negli interstizi del reticolo cationico, la componente anionica costituisce un liquido modulato in uno stato di ordine relativamente debole⁽¹⁹⁾. Questi risultati sono consistenti con la proprieta' di superionicita' di questi solidi, che e' dovuta ad un elevato stato di disordine nel reticolo di anioni.

5. UN ESEMPIO SPECIFICO: CRISTALLIZZAZIONE DEL PLASMA CLASSICO BIDIMENSIONALE

In opportune condizioni sperimentali, un monostrato di elettroni puo' essere depositato sulla superficie dell'elio liquido, formandovi un liquido elettronico bidimensionale in una buca di potenziale dovuta all'attrazione delle cariche-immagine e alla repulsione di Pauli. Il

numero di elettroni per unita' di area e' basso, cosicche' la temperatura di Fermi del liquido elettronico e' piccola rispetto alla temperatura fisica e gli effetti di statistica quantistica sono trascurabili. Grimes e Adams⁽²⁰⁾ hanno studiato sperimentalmente la transizione liquido-solido di questo sistema bidimensionale, osservando l'eccitazione risonante di onde capillari sulla superficie del substrato di elio liquido per urti da parte del monostrato elettronico in oscillazione forzata. Questi dati mostrano una curva di fusione di forma $\rho \propto T^2$ (si veda la sezione 2.1): piu' precisamente, il risultato sperimentale e' $e^2(\pi\rho)^{1/2}/(k_B T) = 137 \pm 15$ per la forza d'interazione alla transizione, ρ essendo il numero di elettroni per unita' di area.

Studi di simulazione numerica di un plasma classico bidimensionale mostrano effetti d'isteresi in proprieta' termodinamiche e di trasporto nella transizione, indicando che essa e' del primo ordine⁽²¹⁾. Questi studi collocano la transizione ad una forza d'interazione nell'intervallo 118 ± 130 .

Una teoria della cristallizzazione del plasma bidimensionale secondo le linee descritte in sezione 3 richiede anzitutto una teoria accurata della struttura della sua fase liquida in funzione della forza d'interazione. Tale teoria e' stata recentemente sviluppata⁽²²⁾ e la figura 3 ne mostra i risultati per la funzione $\hat{\epsilon}_1(k)$ di Ornstein e Zernike ad una forza d'interazione $e^2(\pi\rho)^{1/2}/(k_B T) = 90$, in confronto con i dati di simulazione.

Nella parte superiore della figura sono riportate sbarre che danno la posizione e la molteplicita' delle stelle di vettori reciproci per un reticolo triangolare. Dalla corrispondenza quasi perfetta tra le prime tre stelle e i primi due picchi di $\hat{\epsilon}_1(k)$ possiamo immediatamente concludere che il liquido e' strutturalmente predisposto a cristalliz-

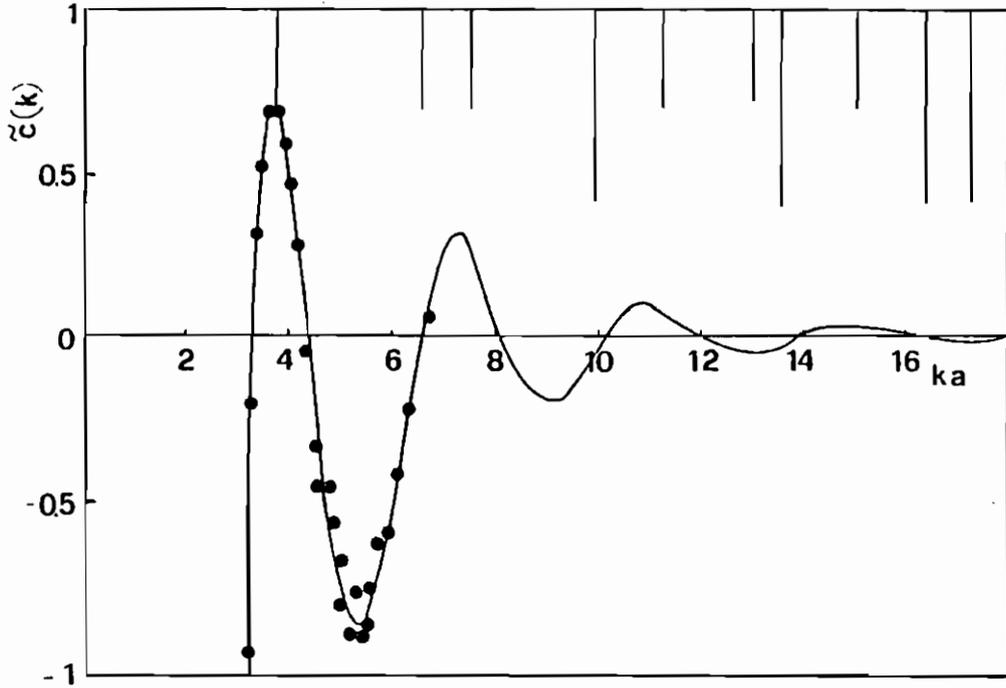


Figura 3. Funzione di correlazione diretta $\hat{c}_1(k)$ del plasma classico bidimensionale in fase liquida ad una forza d'interazione $e^2(\pi\rho)^{1/2}/(k_B T) = 90$: risultati teorici (curva a tratto pieno) e di simulazione numerica (punti). Le sbarre mostrano le posizioni e molteplicita' delle stelle di vettori reciproci di un reticolo triangolare a densita' media pari a quella del liquido.

zare nel reticolo triangolare. Inoltre, poiche' le stelle successive giacciono in vicinanza di nodi di $\hat{c}_1(k)$, i parametri d'ordine successivo ai primi tre sono essenzialmente irrilevanti nella transizione.

L'applicazione della teoria descritta nella sezione 3 alla cristallizzazione di questo sistema predice la transizione ad una forza d'interazione pari a 149 e permette di dimostrare che il reticolo triangolare e' termodinamicamente stabile rispetto a deformazioni. Poco soddisfacenti, d'altra parte, sono i risultati quantitativi della teoria per l'entropia di fusione e il dipolo elettrico dell'interfaccia liquido-solido.

6. OSSERVAZIONI CONCLUSIVE

Come abbiamo incidentalmente notato alcune volte nelle sezioni precedenti, la principale limitazione quantitativa della teoria attuale della coesistenza liquido-solido sorge dalla linearizzazione fatta nel passaggio dalle equazioni (3.2) e (3.4) alle equazioni (3.5) e (3.6). D'altra parte, e' proprio questa linearizzazione che da' alla teoria la possibilita' di formulare in maniera semplice connessioni tra la struttura del liquido e quella del solido e di giustificare similarita' di comportamento tra sistemi diversi.

Ulteriori possibilita' interessanti offerte dalla teoria sono una trattazione microscopica della cristallizzazione di un liquido sopra-raffreddato, con evidente rilievo per la teoria della nucleazione omogenea della fase solida, e una trattazione della cristallizzazione in un potenziale periodo esterno, con applicazioni alla transizione superionica delle fluoriti ed a transizioni per sistemi intercalati e per adsorbati su superfici solide.

RIFERIMENTI

1. Si veda ad esempio J.A.Moriarty, D.A.Young e M.Ross, Phys.Rev. B30, 578 (1984).
2. A.R.Ubbelohde, "The Molten State of Matter", Wiley, Chichester 1978.
3. W.G.Hoover e M.Ross, Contemp.Phys. 12, 339 (1971).
4. S.M.Stishov, Sov.Phys.Uspekhi 17, 625 (1975).
5. H.Reiss, S.W.Mayer e J.L.Katz, J.Chem.Phys. 35, 820 (1961).
6. M.Lasocka, Phys.Lett. 51A, 137 (1975).
7. J.L.Tallon, Phys.Lett. 87A, 362 (1982) e Solid State Commun. 42, 243 (1982).
8. F.A.Lindemann, Zs.Phys. 11, 609 (1910).
9. J.P.Hansen e L.Verlet, Phys.Rev. 184, 151 (1969).
10. T.V.Ramakrishnan e M.Yussouff, Phys.Rev. B19, 2775 (1979).
11. P.Hohenberg e W.Kohn, Phys.Rev. 136B, 864 (1964); N.D.Mermin, Phys.Rev. 137, 1441 (1965).
12. A.D.J.Haymet e D.W.Oxtoby, J.Chem.Phys. 74, 2559 (1981). Nel caso del plasma classico menzionato in sezione 2.1, la transizione avviene con $\rho_s = \rho_l$ per elettroneutralita', ma si forma uno strato di dipolo elettrico interfacciale tra le due fasi che porta a $\mu_s \neq \mu_l$ e $P_s \neq P_l$. Per la teoria della cristallizzazione di questo sistema si veda M.Rovere e M.P.Tosi, rif. 15.
13. B.D'Aguanno, Tesi di D.Ph., Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati, Trieste 1984.
14. G.Pastore e M.P.Tosi, Physica 124B, 383 (1984).
15. M.Rovere e M.P.Tosi, J.Phys.C (1985).

16. E.P.Wigner, Phys.Rev. 46, 1002 (1934) e Trans. Faraday Soc. 34, 678 (1938).
17. D.M.Ceperley e B.J.Alder, Phys.Rev.Lett. 45, 567 (1980).
18. N.H.March e M.P.Tosi, Phys.Chem.Liquids (1985).
19. B.D'Aguanno, M.Rovere, M.P.Tosi e N.H.March, Phys.Chem.Liquids 13, 113 (1983).
20. C.C.Grimes e G.Adams, Phys.Rev.Lett. 42, 795 (1979).
21. R.K.Kalia, P.Vashishta e S.W. de Leeuw, Phys.Rev. B23, 4794 (1981).
22. P.Ballone, G.Pastore, M.Rovere e M.P.Tosi, J.Phys. C (1985).

EQUAZIONI DI MAXWELL NEL VUOTO
ED ELETTRODINAMICA QUANTISTICA

E.Zavattini

CERN - Geneva, Switzerland

Abstract:

Si descrive un apparato sperimentale per mettere in evidenza macroscopicamente il termine di interazione (di natura quantistica) fotone-fotone nella propagazione delle onde elettromagnetiche nel vuoto in presenza di un campo magnetico statico.

1. INTRODUZIONE

Nell'elettromagnetismo classico la propagazione delle onde elettromagnetiche, così come i vari fenomeni elettrici e magnetici associati a "sorgenti" cariche e correnti, sono descritti dalle equazioni di Maxwell. Queste, nel sistema CGS, si scrivono:

$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\delta \vec{B}}{\delta t} & ; \text{div } \vec{D} &= 4\pi\rho \\ \text{rot } \vec{H} &= \frac{1}{c} \frac{\delta \vec{D}}{\delta t} + \frac{4\pi}{c} \vec{J} & ; \text{div } \vec{B} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

ove i vettori \vec{E} ed \vec{H} sono rispettivamente i vettori campo elettrico e campo magnetico, mentre i vettori \vec{D} e \vec{B} sono l'induzione elettrica (o densità di flusso elettrico) e l'induzione magnetica; \vec{J} e ρ sono rispettivamente la densità di corrente elettrica e la densità di carica elettrica e rappresentano la sorgente del campo elettromagnetico caratterizzato dai vettori \vec{E} , \vec{H} , \vec{B} e \vec{D} .

In via del tutto generale le (1) vanno completate con le equazioni costitutive che legano i vettori \vec{E} e \vec{B} ad i vettori \vec{D} ed \vec{H} : queste equazioni, una volta scritta la lagrangiana L associata alle equazioni (1), si ottengono da

$$\vec{D} = 4\pi \frac{\delta L}{\delta E} \qquad \vec{H} = -4\pi \frac{\delta L}{\delta B} \quad (2)$$

In una regione ove la materia è assente, cioè nel vuoto, ed inoltre assumendo $\vec{J}=0$ e $\rho=0$ nella regione considerata si può scrivere

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) \quad (3)$$

da cui si deducono, per il caso del vuoto, le note eguaglianze;

$$\bar{D} = \bar{E} \quad ; \quad \bar{H} = \bar{B} \quad (4)$$

Le (4) insieme con le (1) mostrano una tipica caratteristica dell'elettromagnetismo classico nel vuoto e cioè che le equazioni differenziali che descrivono la propagazione delle onde elettromagnetiche sono lineari o meglio che vale rigorosamente il principio di sovrapposizione; quest'ultimo si può enunciare stabilendo che, date due soluzioni del sistema differenziale (1), rappresentate da $E_1(x,t), B_1(x,t)$ e $E_2(x,t), B_2(x,t)$ allora una qualunque combinazione lineare di queste due soluzioni è anch'essa una soluzione del sistema differenziale (1).

Una delle conseguenze di questo fatto è, ad esempio, che un fascio di luce che attraversa una regione (nel vuoto) in cui è presente un campo magnetico si propaga senza essere perturbato; in parole semplici non esiste nel vuoto una interazione luce-luce diretta (o meglio come si dice in linguaggio più moderno una interazione fotone-fotone).

Va chiarito che il principio di sovrapposizione è approssimamente valido, in moltissimi casi, anche in presenza di materia; in generale però, nella materia, le relazioni (3) non danno luogo a relazioni lineari tra i campi (\bar{E}, \bar{B}) e (\bar{D}, \bar{H}) specie nel caso di campi \bar{E} e \bar{B} particolarmente forti. In questi casi, ovviamente, il sistema (1) non è un sistema lineare di equazioni differenziali.

Un tipico esempio di relazione non lineare tra campi B ed H è data dalla relazione

$$\bar{B} = \mu(H) \bar{H} \quad (5)$$

con $\mu(H)$ una funzione di \bar{H} piuttosto complicata, valida nei materiali ferromagnetici.

E' importante stigmatizzare che relazioni non lineari tra i vettori $\bar{E}, \bar{B}, \bar{D}, \bar{H}$ sono possibili solo in presenza di materia e che in maniera del tutto generale, nell'Elettrodinamica classica e nel vuoto, vale sempre incondizionatamente il principio di sovrapposizione.

Ci si pone ora il problema di cosa succede delle equazioni (1) nello schema della Teoria Quantistica dei Campi ed in particolare nella Elettrodinamica Quantistica. Consideriamo sempre il caso in cui si sia in assenza di materia.

L'assunzione che non ci sia una interazione diretta fotone-fotone resta naturalmente valida anche nello schema della teoria dell'Elettrodinamica Quantistica; pero' le cose sono piu' complesse a causa delle relazioni di indeterminazione di Heisenberg. Ricordiamo che alla base della Teoria Quantistica, teoria che ha preso nella fisica moderna un posto dominante nel condizionare la descrizione dei fenomeni naturali, sta il Principio di Indeterminazione di Heisenberg.

Secondo il Principio di Indeterminazione, in qualunque punto Q dello spazio vuoto, durante un intervallo di tempo Δt sufficientemente breve ($\Delta t < h/2m_e c^2$ ove h e' la costante di Planck e $m_e c^2$ e' l'energia di riposo dell'elettrone) e' probabile la presenza di una coppia elettrone-positrone: l'esistenza nel vuoto di queste coppie cariche di fluttuazione (dette anche coppie virtuali) da' origine a tutta una serie di fenomeni nuovi, misurabili, non previsti dall'Elettromagnetismo Classico.

Ad esempio puo' accadere che un fotone reale, mentre viaggia nello spazio vuoto, venga assorbito e riemesso da una di queste coppie di

fluttuazione (vedi fig.1). Oppure che due fotoni reali che si incrocia-

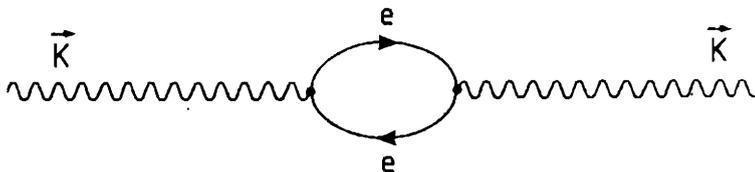


Figura 1 e 2 : Diagrammi di Feynmann di una coppia virtuale $e^+ e^-$ che interagisce rispettivamente con uno (fig.1) o due fotoni (fig.2) .

no siano assorbiti dalla stessa coppia virtuale (fig.2): in quest'ultimo caso si realizza una specie di interazione fotone-fotone, interazione pero' di natura indiretta essendo mediata nel vuoto da queste coppie virtuali.

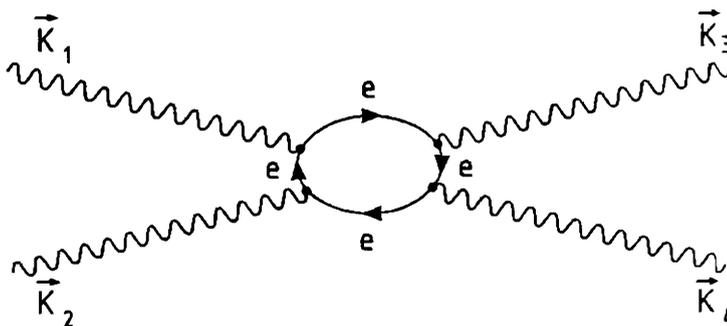


Fig. 2

Come questo tipo di interazione fotone-fotone nel vuoto influisca sulla propagazione delle onde elettromagnetiche o meglio come si debbano modificare le equazioni di Maxwell a causa delle fluttuazioni del vuoto e' il problema affrontato da Euler e Heisenberg nel

1936 [2,3].

Essi hanno dimostrato che il sistema di equazioni differenziali (1) e' ancora valido ma che ora nel vuoto non valgono piu' la (3) e le (4) e che la nuova lagrangiana L si puo' scrivere in prima approssimazione

$$L = \frac{1}{8\pi} (E^2 - B^2) + \frac{A}{4\pi} [(E^2 - B^2)^2 + 7 (E \cdot B)^2] \quad (6)$$

con α costante di struttura fine:

$$\text{ed} \quad A = \frac{\alpha^2}{90\pi} \frac{\lambda e^3}{m_e c^2} = \frac{4}{3} 10^{-32} \frac{\text{cm}^3}{\text{erg}}; \quad \lambda_e = \frac{h}{m_e c}$$

Le condizioni per cui la (6) e' valida (considerando il caso di campi statici o armonici) sono

$$| E | < | E_{\text{crit}} | \quad (7)$$

$$| B | < | B_{\text{crit}} |$$

con $E_{\text{crit}} = 1.5 \times 10^{16} \text{V/cm}$ e $B_{\text{crit}} = 5 \times 10^{13} \text{gauss}$

e che per la frequenza ν del campo valga $\nu < m_e c^2/h$.

Naturalmente queste condizioni, nell'esperimento che descriveremo, saranno ampiamente verificate. Dalle espressioni (2) e (6) si ricava

$$\bar{D} = \bar{E} [1 + 4A(E^2 - B^2)] + 14A(\bar{E} \cdot \bar{B})\bar{B} \quad (8)$$

$$\bar{H} = \bar{B} [1 + 4A(E^2 - B^2)] - 14A(\bar{E} \cdot \bar{B})\bar{E}$$

Le (8) sostituiscono ora le (4); esse mostrano come per il campo elettromagnetico (nel vuoto) non vale il principio di sovrapposizione. Infatti le (8) insieme con le (1) costituiscono un sistema non lineare

di equazioni differenziali: da notare che la non linearita' e' determinata dal termine in L (vedi la (6)) proporzionale al parametro A (che naturalmente viene calcolato nell'ambito della teoria dell'Elettrodinamica Quantistica).

Va chiarito che l'interazione fotone-fotone, mediata da una coppia virtuale, e' stata messa in evidenza e quantitativamente controllata in esperimenti di elettrodinamica quantistica di grande precisione come le misure del $(g-2)$ dell'elettrone e del muone. Va detto pero' che una verifica diretta delle relazioni (8) non e' stata ancora realizzata; questo si puo' capire data la piccolezza del termine in A in queste.

In quanto segue vogliamo descrivere un esperimento allo studio all'Universita' di Pisa [3] il cui scopo e' appunto quello di verificare direttamente le (8).

Prima di procedere alla descrizione dell'apparato sperimentale vogliamo fare un'osservazione generale, che tra l'altro e' abbastanza pertinente a questo tipo di ricerche, mettendone in chiaro le generalita'.

La non linearita' delle equazioni di Maxwell nel vuoto, introdotte attraverso la lagrangiana efficace (6), e' un fenomeno tipicamente legato alla Elettromeccanica Quantistica.

Questa teoria, che entro gli errori di misura, non e' mai stata trovata in contraddizione con gli esperimenti, e' stata verificata quantitativamente, con grande precisione, in molti fatti sperimentali; c'e' da aspettarsi quindi che gli esperimenti confermino pienamente le conclusioni dedotte dalla (6).

Tuttavia va notato che ci possono essere altre cause (sempre di natura quantistica) che introducono ulteriori termini non lineari

nelle equazioni di Maxwell (sempre nel vuoto). Ad esempio, se in natura esistessero particolari campi pseudoscalari (come ipotizzato da vari teorici), ovviamente non ancora osservati, (sia ϕ_{PS} il valore del corrispondente potenziale in un punto dello spazio) questi potrebbero dare origine a due fotoni, nella lagrangiana efficace (ad es. termini del tipo $(\phi_{PS}/M)(E.B)$ ove M e' legato al valore della costante di accoppiamento del campo ϕ_{PS} col campo elettromagnetico)[4]. Vedi ad esempio la figura 3.

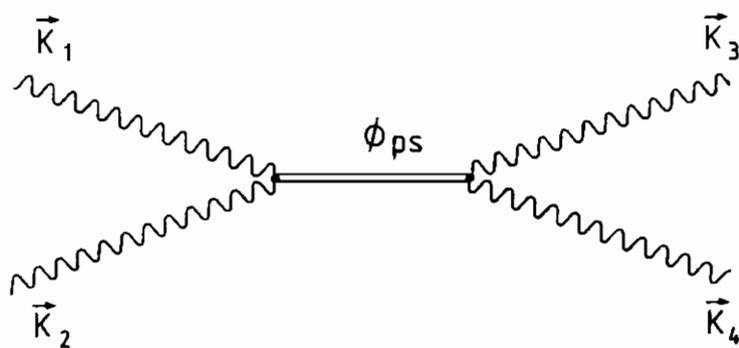


Figura 3 : Diagramma di Feynmann dell'interazione di una particella pseudoscalare (assione) virtuale con due fotoni.

In questo caso, per particolari valori della costante M e della massa m del campo ϕ_{PS} (assione invisibile) si possono ottenere effetti macroscopici non lineari osservabili, dello stesso ordine (o anche piu' grandi) di quelli che ci si aspetta dalla lagrangiana efficace (6).

Come abbiamo gia' accennato e' attualmente allo studio un progetto sperimentale per mettere in rilievo non linearita' nelle equazioni di Maxwell (applicate a onde elettromagnetiche che si propagano nel vuoto) dovute a termini di interazione fotone-fotone presenti nella lagrangiana efficace [6].

2. METODO

Supponiamo di avere un fascio laser con direzione (vedi fig.4) di propagazione \vec{k} lungo l'asse \vec{z} in una regione dove e' presente un forte campo magnetico B (costante o lentamente variabile con pulsazione "on-off" ω_M). Ponendo nelle (8) $B = B_0 + B_L$ e $E = E_L$ ove B_L e E_L sono i campi elettromagnetici corrispondenti al fascio laser, e scartando nelle espressioni termini non lineari in B_L e E_L (ricordiamo che certamente sara' $B_L \ll B_0$) diventano

$$\vec{D} = \vec{E} [1 - 4 A B_0^2] + 14 A \vec{B}_0 (\vec{E} \cdot \vec{B}_0) \quad (9)$$

$$\vec{H} = \vec{B} [1 - 4 A B_0^2] - 8 A \vec{B}_0 (\vec{B} \cdot \vec{B}_0)$$

ove in quest'ultime $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}$ e \vec{B} si riferiscono ai soli campi corrispondenti al fascio laser.

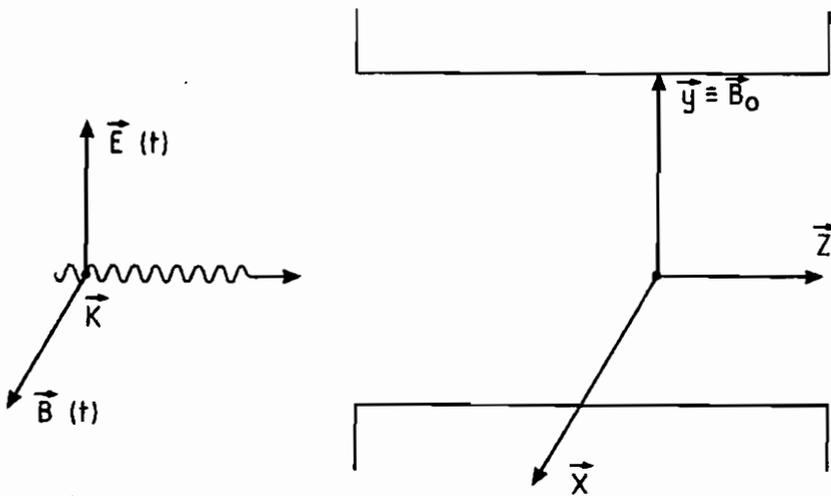


Figura 4 : Geometria dell'esperimento.

Dalle (9) si ricava facilmente che per un fascio di luce laser, linearmente polarizzato lungo la direzione \bar{y} , l'indice di rifrazione n_L e' dato da:

$$n_L = 1 + 7 A B_0^2 \quad (10)$$

mentre per un fascio con luce polarizzata ortogonalmente a \bar{B}_0 (asse \bar{x}) l'indice di rifrazione n_T e' dato da

$$n_T = 1 + 4 A B_0^2 \quad (11)$$

Dalle (10) e (11) si ricava

$$\Delta n = n_L - n_T = 3 A B_0^2 = 0$$

Come si vede, la zona ove e' presente il forte campo magnetico \bar{B}_0 (anche se siamo nel vuoto) appare, al fascio laser, come un mezzo birifrangente con l'asse di simmetria lungo l'asse \bar{z} . Da notare che Δn dipende da A , parametro ricavabile dalla teoria della Elettrodinamica Quantistica.

Senza entrare in dettagli, come abbiamo gia' accennato, la eventuale presenza di campi "assionici" (come certe caratteristiche specifiche) puo' anch'essa contribuire in modo sostanziale alla differenza Δn con termini aggiuntivi.

L'esperimento che descriviamo (e che e' ancora allo stadio di progetto) si puo' quindi da un lato interpretare come un "test" di Elettrodinamica Quantistica e dall'altro, come una indagine sulla possibile esistenza in natura di particolari campi pseudoscalari (in questo caso assumendo valida la Elettrodinamica Quantistica).

Dato un fascio di luce linearmente polarizzato, a 45 gradi rispetto alla direzione di \vec{B} , dalle formule precedenti si ricava che, dopo un percorso L (in una zona con B presente), esso acquista una ellitticità Ψ data da (vedi fig.5)

$$\Psi = \pi \Delta\eta \frac{L}{\lambda} \quad (12)$$

ove λ e' la lunghezza d'onda della luce laser utilizzata.

Mettendo numeri dell'ordine $L = 3\text{Km}$, $\lambda = 5140 \text{ Angstrom}$ e $B_0 = 10^5$ gauss si ottiene una ellitticità'

$$\Psi = 0.5 \times 10^{-11} \quad (13)$$

Da cui si vede che con un apparato ottico di sensibilità D_s pari a $10^{-8} \sqrt{\text{Hz}}$ e' possibile rivelare valori di ellitticità' intorno al valore (13) con misure lunghe alcuni mesi.

A questo punto, in relazione alla scelta dei parametri suddetti, sono da chiarire i seguenti punti:

1) Si puo' realizzare un cammino L pari a 3 Km scegliendo una zona con campo magnetico lunga circa 6 metri ed intrappolando il fascio laser di una "multipass cavity" in modo che il fascio ripassi nella stessa zona per circa 500 volte. Questo e' possibile con l'uso di specchi sferici di tipo interferenziale, opportunamente scelti. Date le dimensioni pratiche del fascio laser cio' comporta che tale cavita' debba avere un diametro di almeno 6 cm.

2) Nel progetto e' previsto che il campo magnetico B sia modulato con una frequenza "on-off" ω_M , di alcuni minuti (il magnete deve essere superconduttore e pensare una tale frequenza piu' alta puo' essere non realistico). Questo in modo da mettere in risalto l'effetto

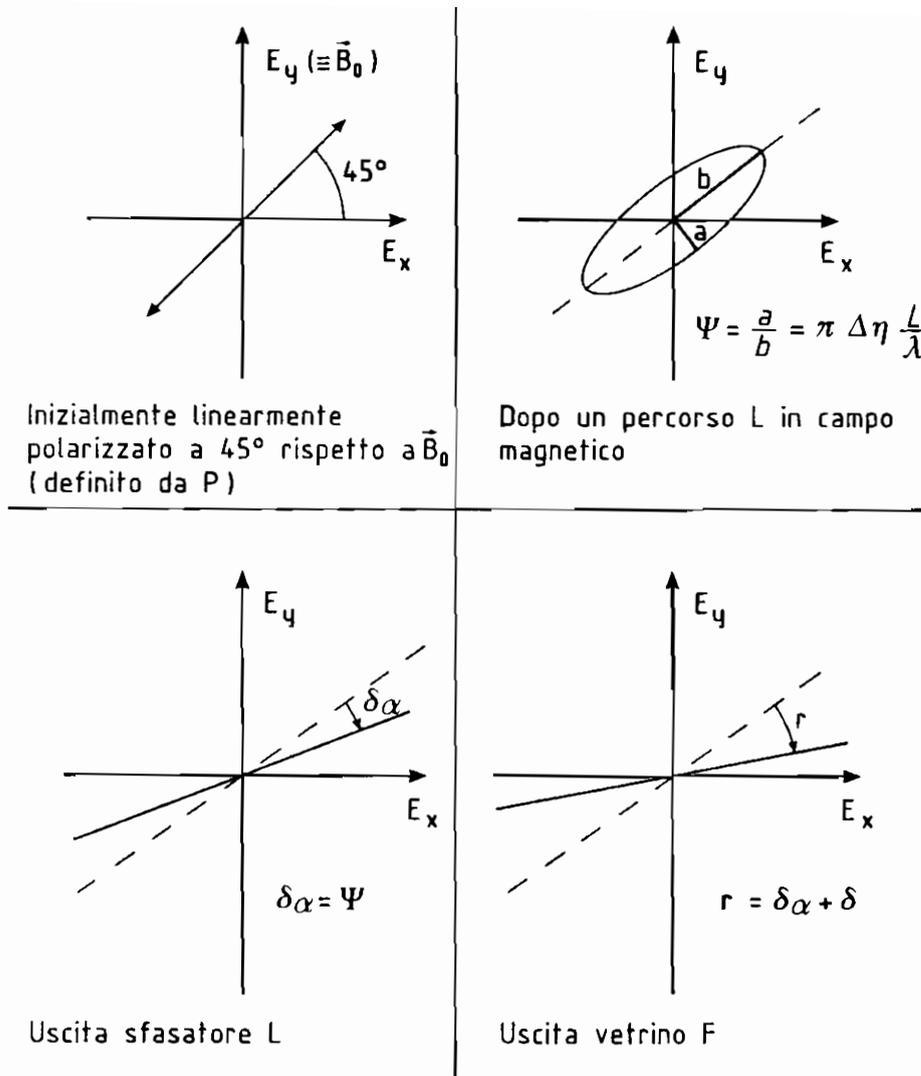


Figura 5 : Situazione dello stato di polarizzazione del fascio in vari punti dell'apparato.

del campo magnetico ed eliminare vari rumori di fondo. C'e' da chiarire che non e' ancora possibile di costruire un tale magnete: pensiamo che tra due anni la tecnologia sara' sufficientemente avanzata per realizzarlo.

3. APPARATO (OTTICO) REALIZZATO.

E' stato realizzato al CERN il montaggio completo dell'esperimento (vedi fig.6) ma ovviamente senza il magnete finale; le varie parti, laser, ottica d'entrata, cavita' multipass, ottica d'uscita e relativa elettronica di registrazione e d'analisi, sono state realizzate e rese operanti con l'intenzione di completare l'esperimento quando sara' possibile avere il magnete. In queste condizioni e' stato possibile simulare, realisticamente, un (piccolo) "effetto" che ci ha permesso di studiare il modo di ottimizzare l'apparato, vederne i punti ancora da migliorare, e misurarne la sensibilita' nelle condizioni finora realizzate.

Con riferimento alla figura 6 passiamo ora a chiarire i vari componenti dell'apparato. C'e' da chiarire che tutti gli elementi, salvo la parte M5 (secondo specchio della cavita') sono montati e rigidamente fissati su un unico grande tavolo (90x250 cm) di granito K. Inoltre tutta la parte essenziale dell'apparato contenuta tra le finestre F1 ed F2 e' sotto vuoto.

1) Il laser e' un laser cw Argon-Krypton di 2-3 watts - per lo piu' abbiamo lavorato con la riga 514 nm. La principale caratteristica di questo laser (tipo LEXEL) e' la sua stabilita' in puntamento. Il laser e' montato in una scatola di ferro dolce per schermarlo magneti-

camente.

2) Segue il laser un telescopio T (vedi fig.6) fatto con due opportune lenti (trattate antiriflettenti); lo scopo di questo telescopio e' di adattare la cavita' del laser alla cavita' multipass definita dagli specchi sferici M4 ed M5 (che sono specchi interferenziali).

3) Dopo il telescopio seguono due sistemi di specchi M1 ed M2 (anch'essi interferenziali): due di questi congegnati in modo che sia possibile (girando manualmente delle manopole) traslare parallelamente a se stesso il fascio laser, nelle due direzioni orizzontale e verticale (± 1 cm). Nel sistema M2 ci sono in piu' due gradi di liberta' angolari, comandabili manualmente, θ_1 e ϕ_1 (ortogonali tra loro) in modo da dare al fascio laser all'uscita di M2 la direzione voluta.

4) La finestra d'entrata F1 inizia il vuoto (circa 10^{-6} mm); come abbiamo gia' accennato il vuoto finisce con la finestra F2.

5) Gli elementi P ed A sono due polarizzatori (Karl-Lambrecht), il secondo e' messo incrociato rispetto al primo in modo che in assenza del campo magnetico (quindi in assenza di "effetto") l'intensita' in uscita dall'analizzatore sia minima. I polarizzatori utilizzati sono scelti in modo che il fattore (α) di estinzione tra di loro sia sufficientemente piccolo: $\alpha=10^{-8}$.

6) All'uscita di P il fascio e' inviato nella cavita' M4 M5 facendolo passare attraverso un foro (diametro 1 cm) posto al centro dello specchio interferenziale M3: lo specchio, e con esso il foro, e' traslabile nelle due direzioni verticale ed orizzontale, in modo da

lasciare passare il fascio di luce.

7) L'entrata del fascio nella cavita' avviene attraverso il foro f praticato nello specchio M4 (diametro del foro 0.5 cm). Gli specchi sferici M4 ed M5 della cavita', date le dimensioni di questa, sono scelti in modo che si possano fare circa 500 riflessioni con il fascio laser di diametro costante sugli specchi (circa 1.5 mm) e le varie riflessioni ben separate l'una dall'altra: l'insieme dei vari raggi riflessi e' contenuto in un cilindro di diametro circa 5 cm. Data la riflettivita' degli specchi M4 ed M5 l'intensita' del fascio in uscita e' circa 0.12 quella del fascio all'entrata dal foro f .

8) Il fascio, dopo circa 500 riflessioni, esce dalla cavita' attraverso stesso foro f , ma leggermente inclinato, rispetto alla direzione d'entrata, (circa 10^{-2} rad.) in modo da andare a colpire la parte speculare dello specchio interferenziale M3 (evitando il foro centrale). Questo specchio dei cui gradi di liberta' traslazionali abbiamo parlato sopra, ha anche due gradi di liberta' angolari (ortogonali tra loro) ω e ϕ ; questi permettono di mandare il fascio uscente verso il centro dello specchio interferenziale M6.

9) Durante il tragitto tra gli specchi M3 ed M6 il fascio passa attraverso uno sfasatore (una specie di lamina quarto d'onda) composto di due superfici d'oro parallele ed inclinate di un angolo opportuno rispetto al fascio [6]. Lo scopo di questo sfasatore e' quello di trasformare in rotazione faraday la piccola ellitticita' dovuta all'effetto del campo magnetico (vedi formula (12)), ricevuta dal fascio durante il passaggio nella cavita' (quando ci sara' il magnete naturalmente). In condizioni di regime, quindi col magnete finale, il fascio

laser arrivera' sullo specchio M6 con il suo piano di polarizzatore leggermente ruotato di una quantita' proporzionale alla ellitticita' (12) che vogliamo rivelare. Nelle prove eseguite senza campo magnetico lo sfasatore e' aggiustato in modo tale che l'effetto visibile sia nullo: questo e' ottenibile manovrando sull'angolo dello sfasatore fino a che l'estinzione tra il polarizzatore P e l'analizzatore A sia minima (e circa 10^{-8}). Le prove sono fatte con lo sfasatore inserito per studiare il rumore cagionato dallo sfasatore stesso sulla polarizzazione del fascio laser. Naturalmente nell'incrociare P ed A ci sara' inevitabilmente un (piccolo) residuo β di disallineamento (vedi la formula (16) piu' avanti).

10) Intorno allo specchio M6 (vedi fig.6) e' montata una bobina in modo da poter produrre un campo magnetico di qualche decina di gauss ortogonale alla superficie dello specchio.

Se quindi, nella bobina b_1 circola corrente i_1 , il raggio riflesso da M6 acquista una minuscola rotazione faraday $\delta\alpha$ (di valore tra zero e 10^{-7} rad a secondo della corrente i_1): questa rappresenta nel test "l'effetto" e viene utilizzato per misurare la sensibilita' dell'apparato. Per questa ragione la corrente i_1 in questione e' modulata dalla frequenza ω_M con cui il magnete superconduttore finale sara' modulato (circa 2-3 minuti). Quest'ultimo punto e' molto importante perche' i piu' rilevanti rumori di fondo (che sono quelli che limitano la sensibilita') in generale hanno una intensita' che va come l'inverso della frequenza a cui si lavora. E' quindi importante fare il "test" intorno a valori della frequenza "vera". In conclusione l'effetto per noi e' una piccola rotazione faraday presente nel fascio uscente da M6 data dalla espressione

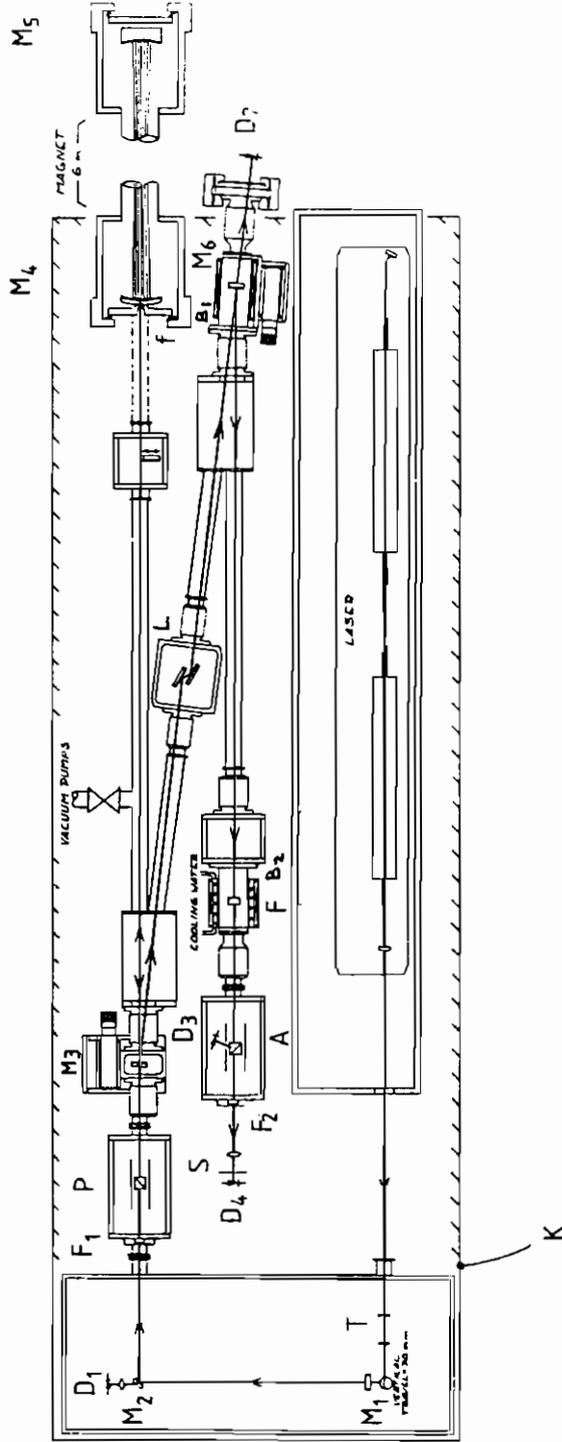


Figura 6 : Disegno schematico dell'apparato.

$$d\alpha(t) = (d\alpha)_0 \text{ sen } \omega_M t \quad (14)$$

ove $(d\alpha)_0$ dipende dal valore della corrente i_1 .

11) Prima di arrivare all'analizzatore A il fascio laser passa attraverso un vetrino (otticamente il piu' isotropico possibile): questo vetrino F e' posto in un'altra bobina b_2 nella quale circola una corrente i_2 , piuttosto alta, in modo da ruotare ulteriormente la polarizzazione del fascio di un angolo δ tra 10^{-4} e 10^{-3} rad. La corrente i_2 nella bobina b_2 e' modulata alla frequenza ω_F (90 Hz) ed e' raffreddata da un circuito con circolazione ad acqua. Concludendo, a causa della bobina b_2 , la polarizzazione del fascio e' ulteriormente modulata di una quantita' $\delta(t)$ data da

$$\delta(t) = \delta_0 \text{ sen } \omega_F t \quad (15)$$

con δ dipendente dalla corrente i_2 ma certamente $>10^{-4}$ rad. Nei vari tests che abbiamo fatto, abbiamo appurato che per ottenere una sensibilita' prossima a quella necessaria per l'esperimento il fascio di luce non deve attraversare ne' gas ne' sostanze materiali: pertanto (visto che non siamo riusciti ad evitare la necessita' di inserire un vetrino faraday) il vetrino F e' stato ridotto al minimo (10mm di spessore).

12) Alla fine il fascio e' analizzato dall'analizzatore A che, come abbiamo detto, e' incrociato rispetto alla polarizzazione del fascio ad "effetto" nullo (con un certo errore angolare β). In questo caso si puo' dimostrare che l'intensita' della luce vista dal diodo D_4 , posto dopo il filtro spaziale S, e' data da;

$$I - I_0 \{ (\sigma^2 + \beta^2) + \delta^2(t) + 2\delta(t) [\beta + d\alpha(t)] + \dots \} \quad (16)$$

Il segnale (16) analizzato nelle sue componenti di Fourier contiene, tra le altre;

1. una componente di ampiezza $(\delta)_0^2$ alla frequenza $2\omega_F$
2. una componente alla frequenza ω_F di ampiezza $2\delta_0\beta$
3. due componenti, rispettivamente alle frequenze $\omega_F \pm \omega_M$ di ampiezza $2\delta_0(d\alpha)_0$; queste contengono l'informazione su $(\delta\alpha)_0$ che e' l'effetto che vogliamo misurare.
4. uno spettro di rumore di fondo.

L'analisi consiste nel separare dal rumore di fondo le righe alle frequenze $\omega_F \pm \omega_M$ e misurarne l'ampiezza; purtroppo in vicinanza di queste righe di frequenza ω c'e' il segnale di ampiezza $2\delta_0\beta$ che e' di parecchi ordini di grandezza maggiore. Inoltre il suddetto segnale (alla frequenza ω_F) e' piuttosto allargato dalle fluttuazioni di natura termica delle proprieta' ottiche dei vari elementi (parecchi millihertz); c'e' quindi il pericolo che il segnale dell'effetto si perda sommerso nella coda della linea "spuria" a ω_F .

4. RISULTATI

Il risultato dell'analisi di vari runs e' il seguente:

1) Su periodi lunghi circa un'ora siamo riusciti ad avere (in periodi termicamente calmi) una sensibilita' in ellitticita' D_s pari a

$$D_s = (2+4)10^{-8} \frac{1}{\sqrt{T}} \quad (17)$$

dove T e' il tempo di integrazione. C'e' da dire che la sensibilita'

per rivelare rotazioni (importante per ricerche sull'assione) e' di circa due volte migliore del valore (17). Il valore limite stabilito dalla fotostatica e' circa 4+8 volte minore del valore (17).

Abbiamo anche visto che vari periodi "buoni" possono essere sommati tra di loro visto che e' possibile registrare le varie fasi dei vari segnali.

Questo risultato comporta che per misurare un effetto dell'ordine di 5×10^{-12} in ellitticita' occorre un tempo di integrazione dell'ordine dell'anno; crediamo che questo periodo e' troppo lungo per essere sicuri di riuscire a controllare sufficientemente bene l'apparato.

2) Le instabilita' maggiori sono di natura termica (intorno a frequenze dell'ordine del minuto). Il fatto che il secondo specchio della cavita' multipass fosse distaccato ed indipendente dal resto dell'apparato ottico, e' stata una delle principali cause delle fluttuazioni osservate. Altra causa delle fluttuazioni (e che in futuro dovra' essere assolutamente corretta) e' stato il fatto che l'ambiente in cui l'apparato era montato non era termicamente stabilizzato.

Le conclusioni che ne possiamo trarre sono:

α) La sensibilita' dell'apparato ottico costruito e' certamente sufficiente per intraprendere ricerche sulla esistenza dell'assione: una tale utilizzazione dell'apparato da noi montato e' attualmente allo studio. C'e' da chiarire che per le ricerche di questo tipo un magnete (superconduttore) lungo alcuni metri, con un campo magnetico (trasversale) dell'ordine di 50 KG, e' gia' sufficiente per dare risultati significativi. Oggi e' possibile costruire un tale magnete.

β) Per eseguire un "Test" di Elettrodinamica Quantistica con questo metodo (ricordiamo però che oggi non si sa' ancora come costruire un magnete di 100 KG lungo 6 metri, come qui richiesto) occorre, secondo noi, una sensibilità almeno due o tre volte migliore: nelle condizioni attuali si è troppo al limite. E' allo studio come stabilizzare l'ambiente in temperatura ($\pm 0.1^\circ \text{C}$) e si sta studiando come assicurare una maggiore stabilità del secondo specchio (M5) della cavità rispetto alla parte ottica principale.

5. BIBLIOGRAFIA

1. E.Iacopini, F.Scuri, G.Stefanini, E.Zavattini, S.Carusotto,
E.Polacco: Rapporto interno.
2. W.Heisenberg and H.Euler: Z. Phys. 98 (1936) 718.
3. S.L.Adler: Ann.Phys. (USA) 87 (1971) 599.
4. P.Sikivie: Phys.Rev.Lett. 51 (1983) 1415.
5. E.Iacopini et al.: CERN-Pisa Univers. Collaboration,
CERN proposal D2 (March 8, 1983).
6. S.Carusotto et al.: Applied Physics B36 (1985) 125.